動的臨界現象におけるくりこみ群及びモード結合理論

京大基研　川崎恭治

Wilsonに始まるくりこみ群の方法が最近Bell Telephoneの人達によって動的臨界現象にも応用されるようになってきた。[1),2),3)] そして次元数 $d=4-\varepsilon$ として ε が小さい時には今までと異る新しい結果が得られている。この事から従来のモード結合理論には欠陥があるとする考え方が流布されているようである。[4)] 最近筆者はJ. D. Gunton氏と共にこの点を調べてみた[5)]のでその結果を報告した。結論から先に云えば結果のちがいはモード結合理論そのものの欠陥ではなくモード結合理論で出て来た方程式の従来の取り扱い方に不十分な点があったと云う事である。易ち $d-\varepsilon$ 次元でモード結合方程式を注意深く解けば ε の一次でくりこみ群の結果を完全に再現することがわかった。[6)] 例として容易平面をもった強磁性体（Planar Ferro）を考えてみる。丁度臨界点で容易平面の磁化の緩和に結びついた輸送係数を $L(k)$ とし hard axis 方向の磁化の拡散に結びついた輸送係数を $\xi(k)$ とすると，ε の一次まででモード結合方程式は

$$k\frac{dL(k)}{dk} = -k^{-\varepsilon}\frac{g^2}{L(k)+\xi(k)} \tag{1a}$$

$$k\frac{d\xi(k)}{dk} = -k^{-\varepsilon}\frac{g^2}{2L(k)} \tag{1b}$$

但し g はモード結合の強さである。一方，対応するくりこみ群の方程式は

$$k\frac{d}{dk}\hat{L}(k) = (z-2)\hat{L}(k)+\frac{\hat{g}(L)^2}{\hat{L}(k)+\hat{\xi}(L)} \tag{2a}$$

$$k\frac{d}{dk}\hat{\xi}(k) = (z-2)\hat{\xi}+\frac{\hat{g}(k)^2}{2\hat{L}(k)} \tag{2b}$$

$$k\frac{d}{dk}\hat{g}(k) = (z-\frac{d}{2})\hat{g}(k) \tag{2c}$$

但し z は動的臨界指数。

これらの２組の方程式の間には

$$\hat{g}(k) = Ak^{z-\frac{d}{2}}g \tag{3a}$$

$$\hat{L}(k) = Ak_m^{\Sigma}k^{z-2}L(k_m^2/k) \tag{3b}$$

$$\hat{\xi}(k) = Ak_m^{\Sigma}k^{z-2}\xi(k_m^2/k) \tag{3c}$$

なる関係がなり立つ。但し k_n と Aは任意定数。特に $A=1$ ととれば $z=\frac{d}{2}$ だから $\hat{g}(k)=g$

$$L(k) = L^* k^{-\varepsilon/2} \qquad \xi(k) = \xi^* k^{-\varepsilon/2} \tag{4}$$

ここで L^* と ξ^* は(2)式の固定点での $\hat{L}$ と $\hat{\xi}$ の値。即ち輸送係数の critical amplitudes がくりこみ群方程式の固定点での値に他ならよい。

結論は，少くとも ε の一次ではくりこみ群とモード結合理論は，同じ理論の２つの異った表現になっていると云う事。これは云わば量子力学で Heisenberg表示と Schrodinger 表示があるのに似ている。一方 ε の高次まで考えるとどうか。これは，そう単純ではない。即ちモード結合理論では（少くとも私のやり方では）平衡状態についての知識がわかっているとしてその上にダイナミックスを組み立てる方針をとったが（したがって出発点となる Kinetic equation に帯磁率，比熱等の siagular な係数がはいっている）くりこみ群では出発点が完全に analytic である。しかしこの差はそれ程本質的とは思えない。即ち完全に解析的な出発点（これは一般に stochastic equation の形をとるであろう）からモード結合理論を作ることは可能であるしこうすれば両方の理論は内容的に等価になると考えられるからである。ただモード結合理論では固定点の概念があるのに入って来ないが，これは前述した表現のちがいによるもので，モード結合理論では常に出発点に含まれているパラメターの空間内で最も安定な固定点を自働的に拾い出していることがわわる。

参考文献

1) B. Halperin, P. Hohenberg and S. Mo. Phys. Rev. **B10** (1974) 139.
2) B. Halperin, P. Hohenberg and E. Siggia, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 1289.
3) S. Ma and G. Mazenko, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1384.
4) M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. **46** (1974) 597.
5) K. Kawasaki and J. D. Gunton, RIFP Preprint No. 222 (1975).
6) J. D. Gunton and K. Kawasaki, J. Phys. A8 (1975) L9.