5) L. Onsager, Phys. Rev. **37** (1931), 405: **38** (1931), 2265.
N. Hashitsume, Prog. Theor. Phys. **8** (1952), 461: **15** (1956), 369.
L. Onsager and S. Machlup, Phys. Rev. **91** (1953), 1505.
6) I. Prigogine, Introduction to Theormodynamics of Irreversible Processes (1955).
7) B. Ridley, Proc. Phys. Soc. **82** (1963), 954.

「非線型緩和について」

東大理　鈴木増雄

非線型緩和に関して最近考えた次のような3つの事についてお話した。

1. 不安定点からの緩和
2. System－size展開と，リャプーノフ関数及びH－定理
3. 線型及び非線型臨界緩和指数について

1. 最近，久保[1)－3)]によって提唱された示量性の仮設に対するミクロな基礎づけ[4)－8)]及び巨視的な立場からの偏微分方程式論的な示量性の証明が与えられた。[9)] これは，van Kampen[10)]の system－size 展開の拡張にもなっている。ここでは，示量性のワクの中で，即ち，分布関数に対する熱力学的極限をとるという漸近評価の範囲内で，T_c 以下に対しても，時間が充分経過した後では，平衡分布（又は定常分布）に近づくことを示した。[9)] 特に，初期分布が不安定な場合は，非常に扱いにくゝて難かしい問題であるが，それを取り扱う一つの方法を提案した。それは，確率変数Xを複素平面上に拡張して，$\xi = X^2$ と変数変換した新しい ξ 一平面の全軸上での most probable path $\mu(t)$ を追いかけてやると，$t \to \infty$ で $\mu(t) \to \mu_{eq}$ になり，分布も定常分布に近づくことが示せる。但し，これが本当に物理的な過程に対応に対応しているのか，単なる数学的な解に過ぎないのかは，今後の研究にまたねばならない。もう少し詳しくは，文献9)を参照して下さい。

2. System - size展開とリャプーノフ関数及びH－定理。

マルコフ的な巨視変数Xに対する分布関数 $P(X, t)$ 又は $P(x, t)$（但し，$x = X/\Omega$；Ω は系のサイズ）に関するマスター方程式を次のように書こう：

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \mathcal{H}\left(x, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, t\right) P(x, t) = 0 \qquad (1)$$

ここで，$\varepsilon = 1/\Omega$。示量性 $P(x, t) = C_{\exp}[\Omega \phi_0(x, t)]$ が証明されると同時に，$\phi_0(x, t)$ は，次式の解であることが，微分学の平均値の定理から導かれる。[9]

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_0(x, t) + \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial \phi_0(t)}{\partial t}, t\right) = 0。 \qquad (2)$$

これは，始め，久保[1)-3)]によって，ε に関する級数展開の和に求められた式である。或いは次のような母関数

$$\Psi(\lambda, t) \equiv \int P(X, t) e^{\lambda x} dX \cong C\exp[\Omega \psi_0(\lambda, t)] \qquad (3)$$

を定義すると，これも，示量性を示し，$\psi_0(\lambda, t)$は，次式の解として与えられることが証明できる：[9]

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\lambda, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \psi_0, -\lambda, t\right) = 0。 \qquad (4)$$

通常，$\mathcal{H}(x, p, t)$ はモーメント $cn(x, t)$ を用いて，

$$\mathcal{H}(x, p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n!)^{-1} cn(x, t)\, p^n, \qquad (5)$$

と表わされる。

さて，この安定性の議論に役立つリャプノフ関数に相当するのとして，$\Phi(t) = -\phi_{eq}(\mathbf{y}(t))$ を考えてみる。但し，$y(t)$ は most probable path で，$\dot{\mathbf{y}}(t) = c_1(\mathbf{y}(t))$ で与えられる。また，$\phi_{eq}(x)$ は $\phi_0(x, t)$ の定常値（$t \to \infty$）。このとき，

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = -\dot{\mathbf{y}}(t) \frac{\partial \phi_{eq}}{\partial \mathbf{y}} = \quad (1 - \mathbf{r}\mathbf{p}_e - e^{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}e}) w(\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \leq 0, \qquad (6)$$

となる。ここに $\mathbf{p}_e \equiv \partial \phi_{eq}(\mathbf{y}(t)) / \partial \mathbf{y}(t)$。よって，$\Phi(t)$ は，時間と共に減少する。実際，次のように定義されたH－関数

$$H(t)=\int P(\boldsymbol{x},\ t)\log\left[P(\boldsymbol{x},\ t)/P_{eq}(\boldsymbol{x})\right]d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

は，$\phi_0(\mathbf{y}(t),\ t)-\phi_{eq}(\mathbf{y}(t))=\Phi(t)+$（定数）に等しいことが容易に示せる。それには，任意関数 f(x) に対して，熱力学的極限では，$<f(x)>_t=f(\mathbf{y}(t))$ が成立する[9),11)]ことを用いるとよい。 結局，漸近評価のワクの範囲でのH一定理の証明が示されたことになる。

3. 線型及び非線型臨界緩和指数について。

数年前,[12)]非線型緩和時間$\tau_A^{(n,\ell)}$を次のように導入し,その臨界指数$\triangle_A^{(n,\ell)}$を定義した：

$$\tau_A^{(n,\ell)}=\int_0^\infty \psi_A(t)/\psi_A(0)\ dt \simeq (T-T_c)^{-\triangle_A^{(n,\ell)}} \tag{8}$$

但し，$\psi_A(t)$ は，今着目している物理量Aの時刻 t における期待値である。一方線型緩和時間及び臨界指数は，次のように定義される：[13)]

$$\tau_A^{(\ell)}=\int_0^\infty <A(t)A_{eq}>/<A^2>_{eq}\,dt \simeq (T-T_c)^{-\triangle_A^{(\ell)}} \tag{9}$$

我々は， kinetic Ising model に摂動展開（高温展開）法を適用して，具体的に$\triangle_A^{(\ell)}$を推定し，$\triangle_A^{(\ell)}>\gamma$（但し， γは$<A^2>$の臨界振数）を示した。[13),14)] 最近，この結果の妥当性がくり込み群の方法によっても確認されるようになった。[15)]

ところで，コンピューターのシミュレーションの結果[16),17)]は，我々の結果と必ずしも一致せず，長い間，両者の関係を解明する問題が宿題になっていたのであるが，最近やっと，これが解き明かされたように思われる。シミュレーションでは，[16),17)] 多くの場合，初期分布としては，平衡から，はるかに離れた状態（例えば，全部一方向にそろった状態）から出発して，それが平衡に近づく様子を追いかける。この過程は正しく非線型臨界緩和である。そこで，線型緩和と非線型緩和との関係が問題になる。文献 12)で始めてこの両者の関係を詳しく論じた。要点は，

(i) $\triangle^{(n,\ell)}\leqq\triangle^{(\ell)}$ (10)

(ii) Non - ergodic な系では，一般に$\triangle^{(n,\ell)}<\triangle^{(\ell)}$。 (11)

（実際，一次元XY－模型のH_c近傍では，$\triangle^{(n,\ell)}=\frac{1}{2}$, $\triangle^{(\ell)}=1$である。[12)]）

(iii), ergodic な系では，非線型緩和でも，時間の経過と共に限りなく，平衡状態に近づき，臨界緩和の異常性は，その最終状態によって主に決まるだろうから，$\triangle^{(n,\ell)}=\triangle^{(\ell)}$と推測した。

最近の Rócz[18)] の dynamical scaling の仮説をもとにした現象論によると，上の (i)

と（ii）は正しいが，（iii）は訂正を要するようである。即ち，$\beta=0$ という特別な場合しか，$\triangle^{(n,\ell)}=\triangle^{(\ell)}$ とならず，一般に$\triangle^{(n,\ell)}=\triangle^{(\ell)}-\beta$ となる。（但し，βはオーダーパラメータ A の臨界指数。）（iii）の物理的な議論は正しいが，(8) の適用の仕方に不充分な点があった。そこで，次のように訂正すれば，Rácz の結果と一致するようになる。[6] 図1のように，初期段階（又は中間段階）と最終段階にわける。

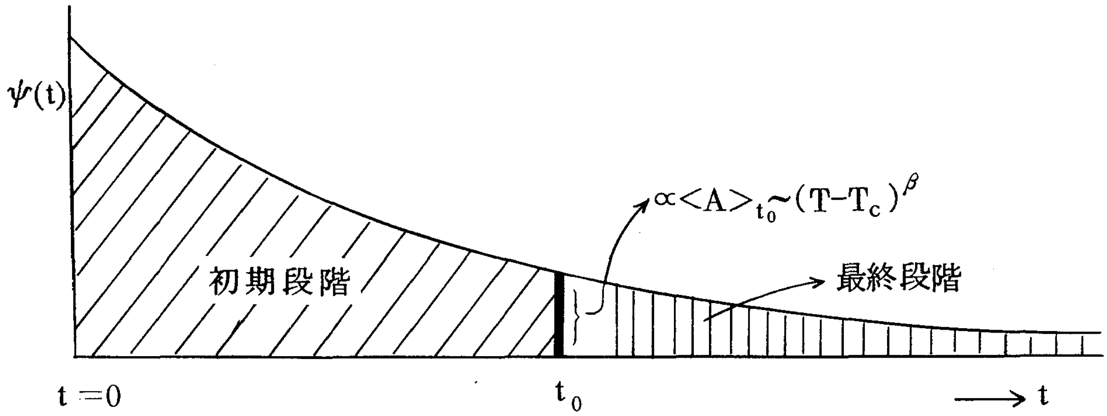

図 1

その境い目の時間 t_0 は，$T\to T_c$ と共にどんどん大きくなり，そこでのオーダーパラメーターの値は，$(T-T_c)^{\beta}$ に比例すると考えられるから，(8) の定義によれば，

$$\tau^{(n,\ell)}\cong(\text{初期段階の寄与})+(T-T_c)^{\beta}\tau^{(\ell)}, \tag{11}$$

ここで，（iii）の物理的な議論を借用して，最終段階の寄与が $\tau^{(n,\ell)}$ にとって dominant であると考える，少なくとも，高々，(11) の右辺の第1項が第2と同程度の発散を示すに過ぎないと考えれば，$\triangle^{(n,\ell)}=\triangle^{(\ell)}-\beta$ という Rácz の関係式が，非常に直観的に得られる。[6]

ついでに，グリーン関数を用いる場合には，自己エネルギーを $\Sigma(q, w)$ として，$q=0$ に対応する物理量の緩和時間は，(9) を変形して次のように変形することができる。[19]：

$$\tau=\chi(0,0)\{\tau_0-\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Im}\Sigma(0,\omega)/\omega\}。 \tag{12}$$

最近，これも，超伝導での臨界緩和の問題等に使われるようである。[20]

もっと厳密な modern な議論の方法として，非線型緩和の問題に「くり込み群の方法」を適用するというアプローチで，現在研究を進めている。これは別な機会にお話したい。

参 考 文 献

1) R. Kubo, in *Synergetics,* ed. H. Haken (B. G. Teubner, Stuttgart, 1973).
2) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51.
3) R. Kubo, *Proceedings on International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Kyoto, Jan. 23–29. 1975, Springer) (in press).
4) M. Suzuki, Phys. Letters **50A** (1974), 47; Prog. Theor. Phys. **53** (1975), No. 6.
5) M. Suzuki, *Proceedings on ISMPTP* (see ref. 3).
6) M. Suzuki, J. Stat. Phys. (Submitted).
7) 鈴木増雄，物性研究 23-5 (1975年2月号)， C 44.
8) 鈴木増雄，物性研究 24-2 (1975年5月号)， B 18.
9) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. (Submitted).
10) N. G. van Kampen, Can. J. Phys. **39** (1961), 551; Phys. Letters **50A** (1974), 237.
11) N. Ohata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan (Submitted).
12) M. Suzuki, Inst. J. Magnetism **1** (1971), 123.
13) M. Suzuki, H. Ikari (Yahata) and R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26**, Suppl. (1969) 153. H. Yahata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **27** (1969) 1421.
14) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **43** (1970) 882.
15) 例えば，日本物理学会論文選集 188 の文献Dの項参照
16) N. Ogita, A. Ueda, T. Matsubara, H. Matsuda and F. Yonezawa, J. Phys. Soc. Japan **26** Suppl. (1969) 146.
17) E. Soll, K. Binder and T. Schmeider, Phys. Rev. **B8** (1973) 3266.
18) Z. Rácz, preprint (McMaster Univ. Ontario).
19) M. Suzuki and G. Igarashi, Prog. Theor Phys. **49** (1973) 1070.
20) E. Šimánek and J. C. Hayward, Phys. Letters, **53A** (1975), 55.