2次の sinh－振動子と sin－振動子

大阪教育大　鯖　田　秀　樹

§1. はじめに

単振り子の方程式

$$\ddot{x} = - \sin x \tag{1}$$

はJacobi の楕円関数を用いると厳密解が得られる。[1]　(1) の形に帰着される例は多くあり，sine－Gordon 方程式の進行波である単純解は有名である。そのときは符号がプラスのものも要求されるが，位相のずれを考えるとどちらか一方のみでよい。同様に

$$\ddot{x} = - \sinh x \tag{2}$$

もJacobi の楕円関数を用いると解が得られる。[1]

(2) の例としては，当然 sinh－Gordon 方程式の定常的な進行波を表わす解がある。物性の例としては，戸田格子の最短波長のモードに対応する振動の時間変化があげられる。このことは戸田先生の論文に詳しく述べられている[2),3)]。

以上の2つをそれぞれ1次の sin－振動子，1次の sinh－ 振動子と呼んでおこう。以下では sin 2x，sinh 2x の項が加わった場合を考える。すなわち，振動の原因となる力に2次の harmonics が含まれている場合である。

2次までならJacobi の楕円関数で解が表わされることがすぐ分かるのだが，1次だけの場合に比べると，パラメーターが1つ加わるため，解の形が複雑になる。そのためか，著者の知るかぎりでは explicit にすべての場合の解を表わした文献はない。3次以上の harmonics がさらに加わるとJacobi の楕円関数で解を表わすのは無理のようである。

λ_1，λ_2 を任意定数として，

$$\ddot{x} = \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x \tag{3}$$

$$\ddot{x} = \lambda_1 \sinh x + \lambda_2 \sinh 2x \tag{4}$$

を考える。(3)を2次のsin−振動子，(4)を2次のsinh−振動子と呼んでおこう。

2次の振動子は λ_1, λ_2 の符号によって，4つの場合に分けられる。変数のscale変換により，係数は比だけが問題となる。それで，一般性を失なうことなく，$\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = \pm\gamma$ ($\gamma > 0$) にえらんでおくことができる。

§2. 2次のsinh−振動子

〔I〕
$$\ddot{x} = \sinh x - \gamma \sinh 2x \ (\gamma > 0) \tag{1}$$

を考える。ポテンシャル関数は

$$U(x) = 1 - \cosh x + \gamma(\cosh^2 x - 1) \tag{2}$$

となる。グラフは図1のように表わされる。

Eをエネルギーとすると

$$\dot{x}^2 = 2[E - U(x)] = 2\gamma\left[-\cosh^2 x + \frac{1}{\gamma}\cosh x + \frac{E-1+\gamma}{\gamma}\right] \tag{3}$$

が第1積分である。

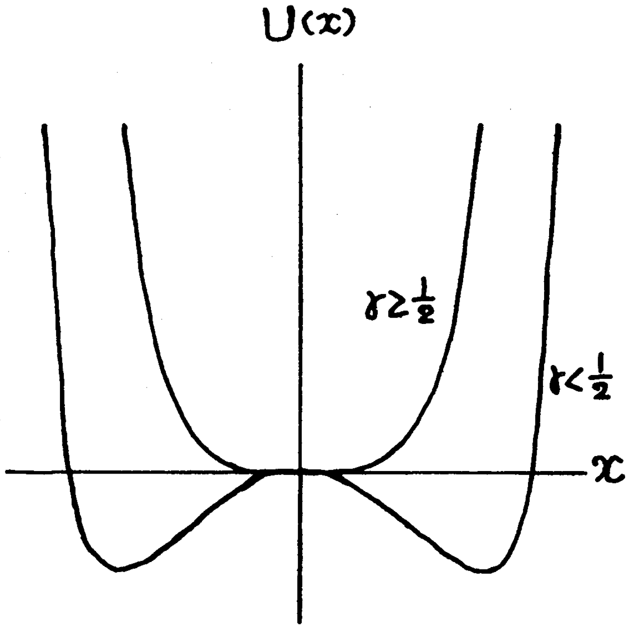

図1 〔I〕の振動子ポテンシャル

$$\cosh x \equiv y$$

とおき，$\dot{x}^2 = 0$ となる y を求めると，

$$y = \frac{1}{2\gamma}\left[1 \pm \sqrt{(2\gamma-1)^2 + 4E\gamma}\right] \tag{4}$$

となる。

(4)の2根を $\beta < \alpha$ とする。(3)の積分を求めると

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y+1)(y-1)(y-\beta)(\alpha-y)}} = \sqrt{2\gamma} \int dt \tag{5}$$

平方根の中の4つの根の大小関係はEの値により異なる。

(1)　$E > 2$　　$\alpha > 1 > -1 > \beta$

(2)　$E = 2$　　$\alpha > 1 > -1 = \beta$

(3)　$2 > E > 0$　　$\alpha > 1 > \beta > -1$

(4)　$E = 0$　　$\alpha > 1 = \beta > -1$　　$(\gamma < \frac{1}{2})$

(5)　$0 > E > U_{min}$　　$\alpha > \beta > 1 > -1$　　$(\gamma < \frac{1}{2})$

次に解を列挙する。

(1)　$E > 2$

$$y = \cosh x = \frac{1 + a_1 \, sn^2 \, \omega_1 t}{1 - a_1 \, sn^2 \, \omega_1 t} \tag{6}$$

ここに，

$$a_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma-1)^2 + 4E\gamma} + E + 2\gamma - 1\right]$$

sn はJacobi の楕円関数であり，母数 k は

$$k^2 = \frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta-1)} \tag{7}$$

である。

(2)　$E = 2$

$$y = \frac{(2\gamma+1) + \sin^2(\sqrt{2\gamma+1}\, t)}{(2\gamma+1) - \sin^2(\sqrt{2\gamma+1}\, t)} \tag{8}$$

$$k = 0, \quad \omega_1^2 = \omega_2^2 = 2\gamma + 1, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{2\gamma+1}$$

(3)　$2 > E > 0$

$$y = \frac{1 - \beta a_2 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_2 t}{1 - a_2 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_2 t} \tag{9}$$

$$a_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta}, \quad \omega_2 = \sqrt{(2\gamma - 1)^2 + 4E\gamma}$$
$$k^2 = \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)}{2(\alpha - \beta)} \tag{10}$$

(4)　$E = 0 \; (\gamma < \frac{1}{2})$

このときは $t = 0$ で $y = \alpha$ にとる。

$$y = \frac{2(1-\gamma) - (1-2\gamma)\tanh^2(\sqrt{1-2\gamma}\, t)}{2\gamma + (1-2\gamma)\tanh^2(\sqrt{1-2\gamma}\, t)} \tag{11}$$

$t \to \infty$ で，$y \to 1$ が (11) からでる。

(5)　$0 > E > U_{min}$

$$y = \frac{\beta - a_3 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_3 t}{1 - a_3 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_3 t} \tag{12}$$

$$a_3 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma - 1)^2 + 4E\gamma} + 1 - 2\gamma - E\right]$$

$$k^2 = \frac{2(\alpha - \beta)}{(\alpha - 1)(\beta + 1)} \tag{13}$$

〔II〕　$$\ddot{x} = -\sinh x + \gamma \sinh 2x \quad (\gamma > 0) \tag{14}$$

ポテンシャル関数は

$$U(x) = (\cosh x - 1) - \gamma(\cosh^2 x - 1) \tag{15}$$

である。グラフは図２に示す。

$\dot{x}^2 = 0$ となる y は

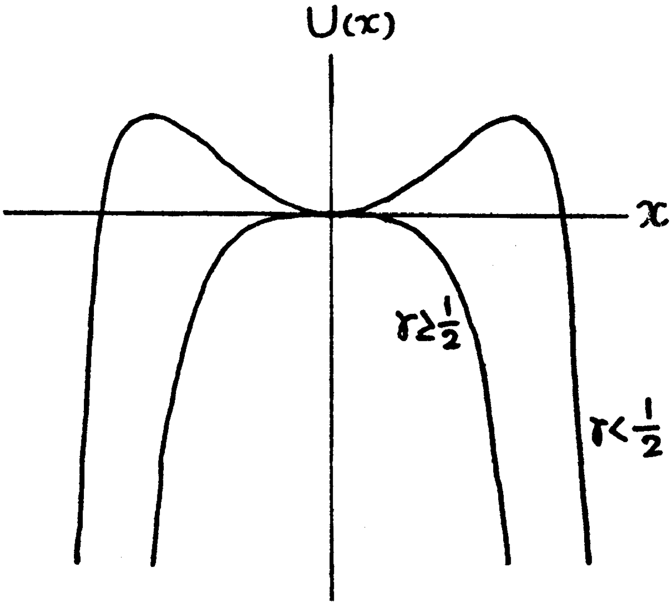

図２　〔Ⅱ〕の振動子のポテンシャル

$$y \equiv \cosh x = \frac{1}{2\gamma}\left[1 \pm \sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma}\right] \qquad (16)$$

である。

(5) に対応する積分は

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y+1)(y-1)(y-\alpha)(y-\beta)}} = \sqrt{2\gamma} \int dt \qquad (17)$$

$\alpha > \beta$ は (16) で表わされる２根である。

E の値により分類すると，

(1)　$E > U_{max}$　　α, β 虚根

(2)　$E = U_{max}$　$(\gamma \neq \frac{1}{2})$　　$\alpha = \beta = \frac{1}{2\gamma}$ $\begin{cases} \gamma > \frac{1}{2} & (1種類) \\ \gamma < \frac{1}{2} & (2種類) \end{cases}$

(3)　$U_{max} > E > 0$　$(\gamma \neq \frac{1}{2})$　　$1 > \alpha > \beta > -1$　　$(\gamma > \frac{1}{2})$

　　　　　　　　　　　　$\alpha > \beta > 1 > -1$　　$(\gamma < \frac{1}{2})$　(２種類)

(4)　$E = 0$　　$\gamma > \frac{1}{2}$　　　$\alpha = 1 > \beta > -1$

　　　　　　　$\gamma < \frac{1}{2}$　　　$\alpha > 1 = \beta > -1$

　　　　　　　$\gamma = \frac{1}{2}$　　　$\alpha = \beta = 1$　（(2), (3) と同じ。）

(5) $0 > E > -2$ $\qquad\qquad$ $\alpha > 1 > \beta > -1$

(6) $E = -2$ $\qquad\qquad$ $\alpha > 1 > -1 = \beta$

(7) $-2 > E$ $\qquad\qquad$ $\alpha > 1 > -1 > \beta$

となる。しかし，物理的に興味のある $t \to \infty$ まで続く周期解は (3) のうち $\gamma < \frac{1}{2}$ の1種類だけである。

(1)
$$y = \frac{1 - b_1 \operatorname{cn} \omega_1 t}{-b_1 + \operatorname{cn} \omega_1 t} \tag{18}$$

$$b_1 = \sqrt{E(E+2)} - (E+1), \quad \omega_1^2 = 2\sqrt{E(E+2)}$$

$$k^2 = \frac{E - (2\gamma - 1) + \sqrt{E(E+2)}}{2\sqrt{E(E+2)}}$$

(2) $\gamma > \frac{1}{2}$ のとき。 $k = 0$ となるから

$$y = \frac{1 - b_1 \cos \omega_1 t}{-b_1 + \cos \omega_1 t} \tag{19}$$

$\gamma < \frac{1}{2}$ のとき。$k = 1$ となる。$b_1 = -2\gamma$ 。

$t = 0$ のとき $y_0 = 1$ となる解は

$$y = \frac{1 + 2\gamma \operatorname{sech} \omega_1 t}{2\gamma + \operatorname{sech} \omega_1 t} \tag{20}$$

$t = 0$ のとき $y_0 > \frac{1}{2\gamma}$ となる解は，$y_0 = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{sech} \varepsilon}{2\gamma + \operatorname{sech} \varepsilon}$ として

$$y = \frac{1 - 2\gamma \operatorname{sech} (\omega_1 t + \varepsilon)}{2\gamma + \operatorname{sech} (\omega_1 t + \varepsilon)} \tag{21}$$

となる。

(3) $\gamma > \frac{1}{2}$ のとき

$$y = \frac{1 - \alpha b_2 \operatorname{sn}^2 \omega_2 t}{1 - b_2 \operatorname{sn}^2 \omega_2 t} \tag{22}$$

$$b_2 = \frac{2}{\alpha+1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma} + 2\gamma - 1 - E\right] \tag{23}$$

$$k^2 = \frac{2(\alpha-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+1)}$$

$\gamma < \frac{1}{2}$ のとき

$t=0$ のとき $y=1$ となる解は

$$y = \frac{1 + b_3\ sn^2\ \omega_3 t}{1 - b_3\ sn^2\ \omega_3 t} \tag{24}$$

$$b_3 = \frac{\beta-1}{\beta+1}, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma} + E + 1 - 2\gamma\right] \tag{25}$$

$$k^2 = \frac{(\beta-1)(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\beta+1)}$$

$t=0$ で $y=\alpha$ となる解は

$$y = \frac{\alpha - \beta\ b_4\ sn^2\ \omega_3 t}{1 - b_4\ sn^2\ \omega_3 t} \tag{26}$$

$b_4 = \frac{\alpha+1}{\beta+1}$　　k, ω_3 は (25) と同じ。

(4)　$\gamma > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{2(\gamma-1)\tanh^2(\omega_2 t + \varepsilon) - (2\gamma-1)}{(2\gamma-1) - 2\gamma\tanh^2(\omega_2 t + \varepsilon)} \tag{27}$$

$\gamma = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{(t+\varepsilon)^2 + 1}{(t+\varepsilon)^2 - 1} \tag{28}$$

もちろん $t=0$ で $y = \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1} > 1$ にえらぶ。(28) は (27) で $\gamma \to \frac{1}{2}$ としても得られる。

$\gamma < \frac{1}{2}$ の場合はつぎの (5) で $E \to 0$ にしたものである。

(5)

$$y = \frac{\mathrm{sn}^2\ \omega_4 t - \alpha\ b_5}{\mathrm{sn}^2\ \omega_4 t - b_5} \tag{29}$$

$$b_5 = \frac{2}{\alpha+1}, \quad \omega_4^2 = \sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma}$$

$$k^2 = \frac{(1-\beta)(\alpha+1)}{2(\alpha-\beta)} \tag{30}$$

(6) グラフから明らかなように，(5) と (7) の場合の解で $E \to -2$ にすると得られる。関数形は双曲線関数であるが，有限の短い時間の間に粒子が $y \to \infty$ となるから不思議ではない。

(7)

$$y = \frac{\mathrm{sn}^2\ \omega_2 t - \alpha\ b_6}{\mathrm{sn}^2\ \omega_2 t - b_6} \tag{31}$$

$$b_6 = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \qquad k^2 = \frac{2(\alpha-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+1)} \tag{32}$$

〔Ⅲ〕

$$\ddot{x} = \sinh x + \gamma \sinh x \qquad (\gamma > 0) \tag{33}$$

ポテンシャルは

$$U(x) = -(\cosh x - 1) - \gamma(\cosh^2 x - 1) \tag{34}$$

である。グラフは図3に示す。

$\dot{x}^2 = 0$ になる y は

$$y \equiv \cosh x$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\left[-1 \pm \sqrt{(2\gamma+1)^2 - 4E\gamma}\right]$$

である。

(35) の2根を $\alpha > \beta$ で表わす。

E の値により，積分の中の根の大小を分類する。

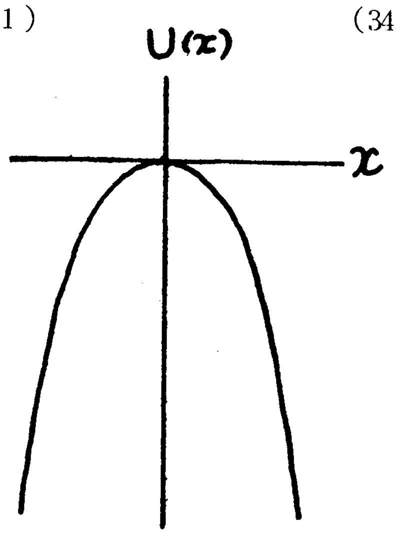

図3 〔Ⅲ〕の振動子のポテンシャル

(1)　$E > \dfrac{(2\gamma+1)^2}{4\gamma} > 2 \quad (\gamma \neq \frac{1}{2})$

α, β　虚根

$E > 2 \quad (\gamma = \frac{1}{2})$

(2)　$\dfrac{(2\gamma+1)^2}{4\gamma} > E > 2 \quad (\gamma \neq \frac{1}{2}) \quad \gamma > \frac{1}{2} \quad 1 > \alpha > \beta > -2$

$\gamma < \frac{1}{2} \quad 1 > -1 > \alpha > \beta$

(3)　$E = 2 \quad \gamma > \frac{1}{2} \quad 1 > \alpha > -1 = \beta$

$\gamma < \frac{1}{2} \quad 1 > \alpha = -1 > \beta$

$\gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha = \beta = -1$

(4)　$2 > E > 0 \qquad 1 > \alpha > -1 > \beta$

(5)　$E = 0 \qquad \alpha = 1 > -1 > \beta$

(6)　$E < 0 \qquad \alpha > 1 > -1 > \beta$

積分は

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y+1)(y-1)(y-\alpha)(y-\beta)}} = \int dt \tag{36}$$

以下結果を列挙する。

(1)

$$y = \frac{1 - c_1 \operatorname{cn} \omega_1 t}{\operatorname{cn} \omega_1 t - c_1} \tag{37}$$

$$c_1 = E - 1 - \sqrt{E(E+2)} \quad , \quad \omega_1^2 = 2\sqrt{E(E-2)}$$

$$k^2 = \frac{E - (2\gamma+1) + \sqrt{E(E-2)}}{2\sqrt{E(E-2)}} \tag{38}$$

(2)　$\gamma > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1 - \alpha c_2 \operatorname{sn}^2 \omega_2 t}{1 - c_2 \operatorname{sn}^2 \omega_2 t} \tag{39}$$

$$c_2 = \frac{2}{\alpha+1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[2\gamma+1-E+\sqrt{(2\gamma+1)^2-4E\gamma}\right]$$
$$k^2 = \frac{2(\alpha-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+1)} \tag{40}$$

$\gamma < \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1-c_3\,\mathrm{sn}^2\,\omega_3 t}{1+c_3\,\mathrm{sn}^2\,\omega_3 t} \tag{41}$$

$$c_3 = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{2}\left[2\gamma+1-E-\sqrt{(2\gamma+1)^2-4E\gamma}\right]$$
$$k^2 = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1+\beta)} \tag{42}$$

(3)　この場合はポテンシャルの形からわかるように定性的には特異なことはおこらない。定量的には (2), (4) の解の lim でよいが，楕円関数が双曲線関数に変わる。有限の短い時間で質点は ∞ に達する。

(4)
$$y = \frac{1-\alpha\,c_4\,\mathrm{sn}^2\,\omega_4 t}{1-c_4\,\mathrm{sn}^2\,\omega_4 t} \tag{43}$$

$$c_4 = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}, \quad \omega_4^2 = \sqrt{(2\gamma+1)^2-4E\gamma}, \quad k^2 = \frac{(\alpha+1)(1-\beta)}{2(\alpha-\beta)} \tag{44}$$

(5)
$$y = \frac{(2\gamma+1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma+1}\;t+\varepsilon)-2(\gamma+1)}{2\gamma-(2\gamma+1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma+1}\;t+\varepsilon)} \tag{45}$$

(6)
$$y = \frac{\mathrm{sn}^2\,\omega_2 t-\alpha\,c_5}{\mathrm{sn}^2\,\omega_2 t-c_5} \tag{46}$$

$c_5 = \dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$,　ω_2, k^2 は (40) 式に同じ。

〔IV〕
$$\ddot{x} = -\sinh x - \gamma \sinh 2x \qquad (\gamma > 0) \tag{47}$$

ポテンシャルは

$$U(x) = (\cosh x - 1) + \gamma(\cosh^2 x - 1) \tag{48}$$

である。グラフは図4に示す。

$\dot{x}^2 = 0$ になる根 y は

$$y \equiv \cosh x = \frac{1}{2\gamma}\left[-1 \pm \sqrt{(2\gamma+1)+4E\gamma}\right] \tag{49}$$

である。2根を $\alpha > \beta$ とする。

$E > 0$ の場合だけを考えたらよい。

解は

$$y = \frac{1 + d\ \mathrm{sn}^2\ \omega t}{1 - d\ \mathrm{sn}^2\ \omega t} \tag{50}$$

$$d = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{2}\left[2\gamma+1+E+\sqrt{(2\gamma+1)^2+4E\gamma}\right] \tag{51}$$

$$k^2 = \frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta-1)}$$

となる。$\alpha > 1 > -1 > \beta$ であるから x についても相異なる2実根をもつ。振動解である。

以上4つの振動子とも解の中に ϵ が現われていない場合は $t=0$ で $y=1$, $x=0$ にとってある。ϵ が現われている場合は $x=0$ が平衡点になるときで，初期条件を原点以外のところにえらび $t \to \infty$ で原点に達する解を現わしている。この解は他の解のパラメーターを変えても得られない。

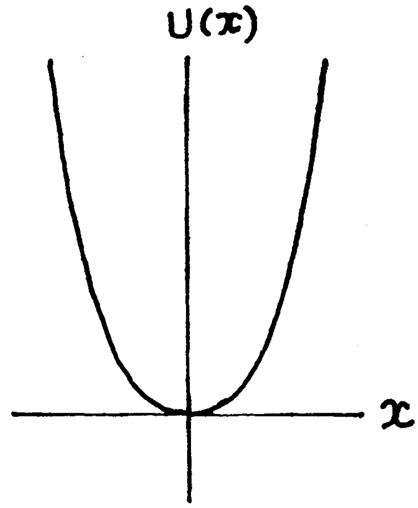

図4 〔Ⅳ〕の振動子のポテンシャル

§3. 2次の sin － 振動子

〔Ⅰ〕

$$\ddot{x} = \sin x - \gamma \sin 2x \quad (\gamma > 0) \tag{52}$$

ポテンシャルは

$$U(x) = \cos x - 1 + \gamma(1 - \cos^2 x) \tag{53}$$

で，グラフは図5である。

$\dot{x}^2=0$ の根は sinh − 振動子の〔II〕に対応している。

E の値で分類する。

(1)　$E > \dfrac{(2\gamma-1)^2}{4\gamma} \geqq 0$

α, β 虚根　等号は $\gamma=\dfrac{1}{2}$ のとき。

(2)　$E = \dfrac{(2\gamma-1)^2}{4\gamma} \quad \left(\gamma \neq \dfrac{1}{2}\right)$

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2\gamma} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma > \dfrac{1}{2} \\ \gamma < \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

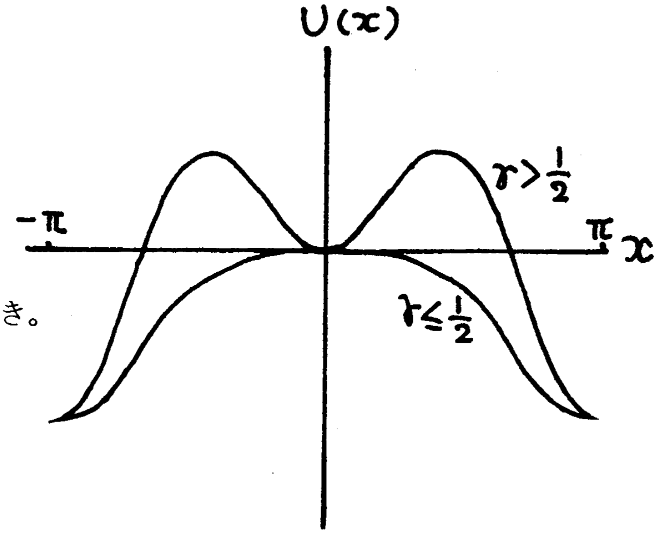

図5 〔I〕の振動子のポテンシャル

(3)　$\dfrac{(2\gamma-1)^2}{4\gamma} > E > 0 \quad \left(\gamma \neq \dfrac{1}{2}\right)$

$\alpha > \dfrac{1}{2} \qquad 1 > \alpha > \beta > -1$

$\gamma < \dfrac{1}{2} \qquad \alpha > \beta > 1 > -1$

E＝0, E＜0 は〔III〕に含まれる。 sin − 振動子は ポテンシャルが周期関数であるため， E＞0 の場合だけを考えればよい。 E≦0 は他のタイプの振動子の E＞0 に対応するからである。

sinh− 振動子と異なり有限時間で∞になる解はなく，周期解か， $t\to\infty$ である有限の位置に近ずくか2種類だけである。

$y=\cos x$ とおくと積分は

$$-\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(y+1)(y-\alpha)(y-\beta)}} = \sqrt{2\gamma}\int_0^t dt \tag{54}$$

である。以下解を列挙する。

(1)
$$y \equiv \cos x = \frac{\mathrm{cn}\ \omega_1 t - e_1}{1 - e_1\ \mathrm{cn}\ \omega_1 t} \tag{55}$$

$$e_1 = \sqrt{E(E+2)} - (E+1), \quad \omega_1^2 = 2\sqrt{E(E+2)}$$

$$k^2 = \frac{(2\gamma - 1) - E + \sqrt{E(E+2)}}{2\sqrt{E(E+2)}} \tag{56}$$

(2)　$\gamma > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1 + 2\gamma \ \mathrm{sech}\ \omega_1 t}{2\gamma + \mathrm{sech}\ \omega_1 t}$$

ここで　$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{4\gamma^2 - 1}{2\gamma}}$

$\gamma < \frac{1}{2}$

$$y = \frac{2\gamma + \cos \omega_1 t}{1 + 2\gamma \cos \omega_1 t} \tag{57}$$

(3)　$\gamma > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1 + e_2 \ \mathrm{sn}^2\ \omega_2 t}{1 - e_2 \ \mathrm{sn}^2\ \omega_2 t} \tag{58}$$

$$e_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma} + 2\gamma - 1 - E\right] \tag{59}$$

$$k^2 = \frac{(1-\alpha)(\beta+1)}{(1-\beta)(\alpha+1)}$$

$\gamma < \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1 - \beta\ e_3 \ \mathrm{sn}^2\ \omega_3 t}{1 - e_3 \ \mathrm{sn}^2\ \omega_3 t} \tag{60}$$

$$e_3 = \frac{2}{\beta + 1}, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(2\gamma-1)^2 - 4E\gamma} + E + 1 - 2\gamma\right]$$

$$k^2 = \frac{2(\alpha - \beta)}{(\alpha - 1)(\beta + 1)} \tag{61}$$

〔Ⅱ〕

$$\ddot{x} = -\sin x + \gamma \sin 2x \tag{62}$$

ポテンシャルは

$$U(x) = (1 - \cos x) + \gamma(\cos^2 x - 1) \tag{63}$$

図示すると図6のようになる。

$\dot{x}^2 = 0$ とする y を $\alpha > \beta$ とする。

積分は

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\alpha-y)(y-\beta)}} = \sqrt{2\gamma}\ dt \tag{64}$$

となる。

E の値により分類する。〔Ⅱ〕だけ例外的に $\gamma > \frac{1}{2}$ のとき $E \leqq 0$ を考える必要がある。2根は sinh－ 振動子の〔Ⅰ〕と同じである。

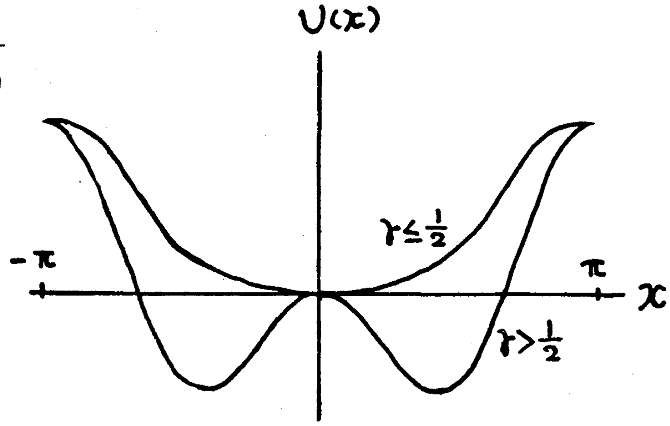

図6　〔Ⅱ〕の振動子のポテンシャル

(1)　$E = 2$　　　　$\alpha > 1 > -1 = \beta$

(2)　$2 > E > 0$　　　　$\alpha > 1 > \beta > -1$

(3)　$E = 0$　　$\gamma > \frac{1}{2}$　　$\alpha = 1 > \beta > -1$

　　　　$\gamma \leqq \frac{1}{2}$　　平衡点のみで可動範囲は存在しない。

(4)　$0 > E > U_{min}$　　　　$1 > \alpha > \beta > -1$

　　$\gamma > \frac{1}{2}$ のみ。

つぎに解を列挙する。

$$(1)\quad y = \frac{(2\gamma+1) - 2(\gamma+1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma+1}\ t)}{(2\gamma+1) - 2\gamma\tanh^2(\sqrt{2\gamma+1}\ t)} \tag{65}$$

(2)

$$y = \frac{1 - \alpha f_1 \, sn^2 \, \omega_1 t}{1 - f_1 \, sn^2 \, \omega_1 t} \tag{66}$$

$$f_1 = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}, \quad \omega_1^{\,2} = [(2\gamma-1)^2 + 4E\gamma]^{\frac{1}{2}} \tag{67}$$

$$k^2 = \frac{(\alpha+1)(1-\beta)}{2(\alpha-\beta)}$$

(3) $\gamma > \frac{1}{2}$ のときのみ。 $t=0$ で $y=\beta$ にとる。

$$y = \frac{2(1-\gamma) + (2\gamma-1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma-1}\,t)}{2\gamma - (2\gamma-1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma-1}\,t)} \tag{68}$$

(4)

$$y = \frac{\alpha - f_2 \, sn^2 \, \omega_2 t}{1 - f_2 \, sn^2 \, \omega_2 t} \tag{69}$$

$$f_2 = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta}, \quad \omega_2^{\,2} = \frac{1}{2}[\sqrt{(2\gamma-1)^2 + 4E\gamma} + E + 2\gamma - 1]$$

$$k^2 = \frac{2(\alpha-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+1)} \tag{70}$$

〔Ⅲ〕

$$\ddot{x} = -\sin x - \gamma \sin 2x \tag{71}$$

ポテンシャル関数は

$$U(x) = (1-\cos x) + \gamma(1-\cos^2 x) \tag{72}$$

グラフは数7である。

$\dot{x}^2 = 0$ となる $y \equiv \cos x$ の根は sinh－振動子の〔Ⅲ〕と同じである。2根を $\alpha > \beta$ とする。

$\gamma > \frac{1}{2}$ のときの $E > U_{max}$, $\gamma < \frac{1}{2}$ のときの $E > 2$ は〔Ⅰ〕で考察ずみの解に含まれている。

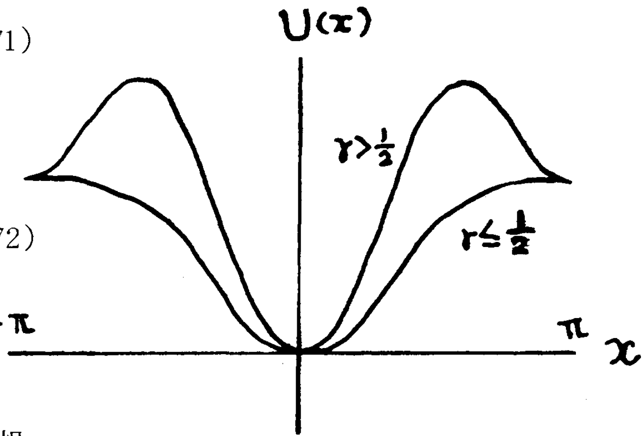

図7 〔Ⅲ〕の振動子のポテンシャル

(1) $\gamma > \frac{1}{2}$ $\frac{(2\gamma+1)^2}{4\gamma} = E$ $1 > \alpha = \beta > -1$

(2) $\gamma > \frac{1}{2}$ $\frac{(2\gamma+1)^2}{4\gamma} > E > 2$ $1 > \alpha > \beta > -1$

(3) $E = 2$ $1 > \alpha = -1 \geqq \beta$ $(\gamma \leqq \frac{1}{2})$ $1 > \alpha > \beta = -1$ $(\gamma > \frac{1}{2})$

(4) $2 > E > 0$ $1 > \alpha > -1 > \beta$

上の4つの場合の解はつぎに列挙される。

(1)
$$y = \frac{(2\gamma+1) - (2\gamma-1)\tanh^2 \omega_1 t}{(2\gamma+1) + (2\gamma-1)\tanh^2 \omega_1 t} \tag{73}$$

$$\omega_1^2 = \frac{4\gamma^2 - 1}{8\gamma}$$

(2)
$$y = \frac{1 - g_1 \,\mathrm{sn}^2\, \omega_2 t}{1 + g_1 \,\mathrm{sn}^2\, \omega_2 t} \tag{74}$$

$$g_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha+1}, \qquad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\,2\gamma+1-E+\sqrt{(2\gamma+1)^2 - 4E\gamma}\,\right]$$

$$k^2 = \frac{(1-\alpha)(\beta+1)}{(1-\beta)(\alpha+1)} \tag{75}$$

(3) $\gamma > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{(2\gamma-1) - \sin^2(\sqrt{2\gamma-1}\; t)}{(2\gamma-1) + \sin^2(\sqrt{2\gamma-1}\; t)} \tag{76}$$

$\gamma < \frac{1}{2}$

$$y = \frac{(2\gamma-1) - 2(\gamma-1)\tanh^2(\sqrt{2\gamma-1}\; t)}{(2\gamma-1) - 2\gamma\tanh^2(\sqrt{2\gamma-1}\; t)} \tag{77}$$

$\gamma = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \tag{78}$$

(4)

$$y = \frac{1+\beta g_2 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_3 t}{1+g_2 \, \mathrm{sn}^2 \, \omega_3 t} \tag{79}$$

$$g_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha-\beta}, \quad \omega_3^2 = \sqrt{(2\gamma+1)^2 - 4E\gamma} \tag{80}$$

$$k^2 = \frac{(1-\alpha)(\beta-1)}{2(\beta-\alpha)}$$

〔Ⅳ〕

$$\ddot{x} = \sin x + \gamma \sin 2x \tag{81}$$

ポテンシャルは

$$U(x) = (\cos x - 1) + \gamma(\cos^2 x - 1) \tag{82}$$

グラフは図8である。

$\dot{x}^2 = 0$ の根 $\alpha > \beta$ は sinh－振動子の〔Ⅳ〕と同じである。

積分は

$$-\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\alpha-y)(y-\beta)}} = \sqrt{2\gamma}\, t$$

である。 $y \equiv \cos x$ で， $t=0$ で $y=1\ (x=0)$ である。

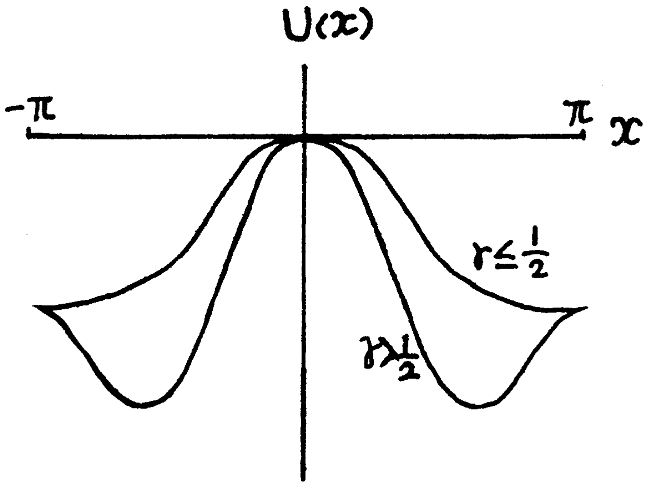

図8 〔Ⅳ〕の振動子のポテンシャル

$E<0$ の場合は〔Ⅱ〕の解に含まれているので， $E>0$ のみを考えたらよい。γ による分類も不要となる。解を書くと $\alpha > 1 > -1 > \beta$ なので

$$y = \frac{1-\alpha h \, \mathrm{sn}^2 \, \omega t}{1-h \, \mathrm{sn}^2 \, \omega t} \tag{83}$$

$$h = \frac{2}{\alpha+1}, \quad \omega^2 = \frac{1}{2}\left[2\gamma+1+E+\sqrt{(2\gamma+1)^2+4E\gamma}\right] \tag{84}$$

$$k^2 = \frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+1)(1-\beta)}$$

となる。

§4. おわりに

計算が意外に長くなり，２次の sinh－振動子の熱膨張への応用は次の機会になった。公式の羅列になってしまったが，公式は万古不易のものだから，計算しておくことも必要だろう。

おわりに図の作成について，大阪教育大の中野恵子，木村貞弓両君にお世話になった。

参考文献

1） 戸田盛和： 振動論　培風館 (1968)

2） M. Toda ： J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 431.

3） M. Toda ： Prog. Theor. Phys., Suppl. 45 (1970) 174.

楕円関数については

友近　晋： 楕円関数論　共立出版

戸田盛和： 楕円関数入門　「数学セミナー」

（連載中）