

確率過程への量子力学の応用

京大・理 富田博之

(12月13日受理)

ブラウン運動と量子力学の類似性については、昔からいろんな立場から研究されているが、ここでは、簡単なフォッカー・プランク方程式をシュレーディンガー方程式に変換することにより、量子力学でよく知られた豊富な概念が、確率過程の理解に役立つことを示したい。

§ 1. ブラウン運動と量子力学

筆者はこの方面の専門ではないので正確な知識は持たないが、既に30年代には、ブラウン運動の不確定性原理が論じられている。¹⁾ その後も、いろんな立場から研究されているようであるが、少くともふたつの立場があるように思える。ひとつは、全く形式的な類似性を追ったものと、「隠れた変数」の問題と関連して量子力学そのものをブラウン運動から導こうとする立場である。Nelson²⁾の研究は、後者と考えられるが、岩波現代物理学講座「古典物理学」に詳しく紹介してあるので、ここではこれ以上立ち入らないことにする。

この論文で扱うのは、あくまでも前者、すなわち、形式的な類似性を具体的な問題に利用する立場である。

§ 2. フォッカー・プランク方程式

確率変数ひとつの簡単なフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t) \quad (1)$$

から出発しよう。これは、定常解

$$P_0(x) = \exp[-F(x)] \quad (2)$$

を持つ。この放物型偏微分方程式は x について自己随伴ではなく、次のような変換により自己随伴型にすることができる。³⁾ すなわち、

$$P(x, t) = \phi_0(x) \psi(x, t), \quad \phi_0(x) = \exp[-F(x)/2] \tag{3}$$

とおけば、方程式(1)は、

$$-\frac{2}{D} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) \tag{4}$$

$$V(x) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{5}$$

と、シュレーディンガー型に変換される。以下では簡単のため $D=2$ としよう。ポテンシャル $V(x)$ は次のような性質をもっている。

(i) $F(x)$ の極小 ($F'(x) = 0, F''(x) > 0$) では

$$V(x) < 0$$

(ii) スピノダル域 ($F''(x) \leq 0$) では $V(x) > 0$

(iii) $F(x)$ の勾配の急な所で $V(x)$ は大

また、大ていの場合

(iv) $x \rightarrow \pm\infty$ で $V(x) \rightarrow \infty$

性質 (iv) を持つ限り、方程式(4)は、束縛力の下での一次元一粒子の量子力学と全く類似しており、離散的固有値問題

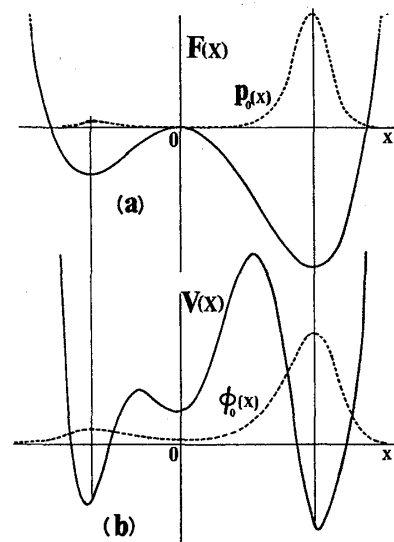
$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \tag{6}$$

を考えることができる。固有値 λ_n はここでは緩和定数である。この固有値問題は、(3)で定義された $\phi_0(x)$ が、規格化可能、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)^2 dx = \text{finite}$$

なら、基底状態として、 $\lambda_0 = 0$ 、 $\phi_0(x)$ を持ち、他の固有値はすべて正となる。そうでない例としては、

$$F(x) = -\frac{g}{2}x^2 \quad (g > 0), \quad V(x) = \frac{g^2}{4}x^2 + \frac{g}{2}$$



(図1)(a) 自由エネルギー $F(x)$ と定常分布 P_0
(b) ポテンシャル $V(x)$ と基底状態 ϕ_0

富田博之

を考えれば、 $\lambda_0 = g > 0$ となり、これは、フッカー・プランク方程式(1)が安定な定常解を持たないことに対応している。ここでは、安定な定常解、すなわち基底状態 $\{\lambda_0 = 0, \phi_0\}$ を持つ場合に話を限定し、規格化直交系 $\{\lambda_n, \phi_n\}$ で展開可能なものとする。すなわち、

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (7)$$

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) \phi_n(x) dx, \quad (8)$$

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_0(x) \phi_n(x) e^{-\lambda_n t}. \quad (9)$$

但し確率分布関数 $P(x, t)$ が、いつでも規格化されているものとするれば、

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$$

である。

§ 3. 準安定状態の崩壊過程

簡単な例として、図1に表わされるような2つの底をもつ自由エネルギーの下での準安定状態の崩壊過程を考えてみる。始状態として、左側の底に局在した準平衡分布

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{W(\infty)} \phi_0(x) \theta(-x) \quad (10)$$

を考える。 $\theta(x)$ は、階段函数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

であり、平衡分布の右半分を切捨てる役割を果している。また $W(\infty)$ は、規格化するために持込まれたもので、

$$W(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)^2 \theta(-x) dx$$

である。この場合の展開係数は(8), (10)を用いれば、

$$a_n = \frac{1}{W(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x) \phi_n(x) \theta(-x) dx \quad (11)$$

で与えられる。ここで、崩壊過程の進行度として、左側の底での滞在確率

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) \theta(-x) dx$$

を導入してやれば、 $W(t)$ は、(9), (11) を用いて

$$\frac{W(t)}{W(\infty)} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 e^{-\lambda_n t} \tag{12}$$

となり、励起エネルギー $\{\lambda_n\}$ を求めておけば、崩壊の様子を完全に知ることができる。

もっと簡単な場合には、次のように、第一励起状態だけで、崩壊過程を論ずることができる。すなわち、 $F(x)$ 従って $V(x)$ が対称で、 $V(x)$ の中央の障壁が十分高い場合には、基底状態 ϕ_0 と第一励起状態 ϕ_1 は、左側、右側の底に局在した基底状態 ψ_L, ψ_R を用いて、

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + \psi_R) \\ \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L - \psi_R) \end{aligned} \tag{13}$$

と近似できる。この場合、エネルギーレベルは、2 原子分子の計算でよく知られているように、

$$\lambda_1 - \lambda_0 \cong 0, \quad \lambda_2 \gg \lambda_1 - \lambda_0$$

である。この時、始状態として、

$$\psi(x, 0) = \phi_0 + \phi_1 = \sqrt{2} \psi_L$$

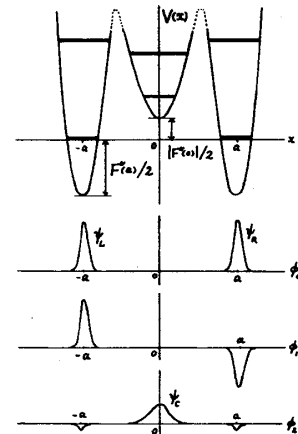
をとれば、

$$\psi(x, t) = \phi_0 + \phi_1 e^{-\lambda_1 t}$$

$$P(x, t) = \phi_0^2 + \phi_0 \phi_1 e^{-\lambda_1 t}$$

となり、第一励起状態 ϕ_1 が減衰することにより、 ϕ_0 の右側のピークが回復し、平衡分布が実現される、と考えられる。量子力学の言葉で言うなら、この過程は、一種のトンネル効果と言えよう。崩壊定数 λ_1 は、 ψ_L または ψ_R のエネルギーを例えば WKB 法で求めてやれば、

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{F''(a)|F''(0)|} e^{-\Delta F}, \quad \Delta F = F(0) - F(a) \tag{14}$$



(図2) ポテンシャル $V(x)$ と波動関数 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2
 $V(x)$ の中の太線は、局在ポテンシャルでのエネルギーレベルを示す

富田博之

と与えられる。これは Nucleation の問題で Langer が求めたもの⁴⁾と、定数因子を除いて完全に一致する。

$F(x)$ が対称でない場合、例えば、kinetic Weiss-Ising モデルで磁場が加っているような場合には

$$F(x) = F_0(x) - Hx \quad (15)$$

$$V(x) = V_0(x) - \frac{H}{2} F_0'(x) + \frac{H^2}{4} \quad (16)$$

とすれば、摂動計算が適用できる。実際 2 次までの範囲で計算すれば

$$\lambda_1(H) = \lambda_1(0) \left\{ 1 + \frac{a^2 H^2}{4} \right\} + o(H^4) \quad (17)$$

となり、磁場が小さい限り本質的な変化は起らない。

次に、 $F(x)$ の中央の山から分布が出発した場合を考えてみよう。簡単のため、これをスピノダル分解と呼ぼう。一般には、中央に局在した波動函数には、あらゆる励起状態が必要であるが、

$$|F'(0)| \ll F''(a) \quad (18)$$

の場合、すなわち、 $F(x)$ の中央の山が比較的緩やかな場合には、次のように、第 2 励起状態を用いて論ずることができる。(18) の条件があれば、 ψ_L, ψ_R に加えて、中央に局在した基底状態 ψ_c を用いて、

$$\phi_0 = \alpha \psi_c + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\psi_L + \psi_R)$$

$$\phi_2 = \beta \psi_c - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\psi_L + \psi_R)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \beta \gg \alpha$$

と近似することができ、

$$\lambda_2 \cong |F''(0)|$$

と考えられる。この時、始状態として

$$\psi(x, 0) = \phi_0 + \frac{\beta}{\alpha} \phi_2 = \frac{1}{\alpha^2} \psi_c$$

をとれば、スピノダル分解過程は、

$$\psi(x, t) = \phi_0 + \frac{\beta}{\alpha} \phi_2 e^{-\lambda_2 t}$$

と表わされる。

§ 4. System-Size の導入

久保・松尾・北原⁵⁾により導入された System-Size 展開の理論を今回の簡単な場合に持込むことを考えよう。これは(1)において、

$$x \rightarrow \Omega x, \quad F \rightarrow \Omega F, \quad D \rightarrow \Omega D \quad (19)$$

と置くことに対応し、シュレーディンガー方程式(4)は、 $\varepsilon = \Omega^{-1}$ を用いて

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_\varepsilon(x) \right] \psi(x, t) \quad (20)$$

となる。ここではポテンシャル自体が

$$V_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (21)$$

と、 ε 依存性を持っていることを除けば、 ε は、量子力学でのプランク定数と同じ役割を果たしている。

先程、Nucleation とスピノダル分解に現われたふたつのレベルについては、この場合

$$\lambda_1 \cong \sqrt{F''(a) |F''(0)|} e^{-\Delta F/\varepsilon} \rightarrow 0$$

$$\lambda_2 \cong |F''(0)| \sim o(1)$$

となり、 $\Omega \rightarrow \infty$ の極限では、準安定状態は安定になるが、スピノダル分解は先程の始状態から出発する限り有限時間内で起ることになる。(本稿末尾の註参照)

ここではこれ以上立入ることはやめて、久保達によるハミルトン・ヤコビの方法を、今回の立場で論じておこう。シュレーディンガー方程式が与えられた以上、量子力学と古典力学の対応関係を忠実にまねることもひとつの試みであろう。ただし、今の場合、波動関数は実数であるから、(20)の随伴式を求めておく必要がある。これは、フォッカー・プランク方程式(1)の随伴方程式、すなわち、コルモゴロフの後退方程式 (Appendix 参照)

$$-\frac{\partial}{\partial t} P^+(x, t) = \frac{D}{2} \left(-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} P^+(x, t) \quad (1)'$$

から出発し、

富田博之

$$P^+(x, t) = \psi^+(x, t) \exp [F(x)/2] \quad (3)$$

とおくことにより求められる。ε を含めて書けば、

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi^+(x, t) = -H_\varepsilon(x, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}) \psi^+(x, t) \quad (20')$$

となる。但し、

$$H_\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_\varepsilon(x)$$

とおいてある。随伴式(20)' は、(20)において、

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \quad F \rightarrow -F$$

とおくことに対応している。

さて、ここで、(20)の解として

$$\psi \propto \exp [\Phi(x, t) / \varepsilon]$$

を仮定し、Φ(x, t) を、V_ε(x) の中のε 以外のε について展開して、

$$\Phi = J_0 + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \dots \quad (22)$$

と仮定する。この時、随伴方程式のひとつの解として、ε → -ε とすることにより、

$$\Phi^+ = J_0 - \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 - \dots \quad (22')$$

$$\psi^+ \propto \exp [-\Phi^+(x, t) / \varepsilon]$$

が得られる。ここで、

$$J = J_0 + \varepsilon^2 J_2 + \varepsilon^4 J_4 + \dots$$

$$R = \exp [J_1 + \varepsilon^2 J_3 + \varepsilon^4 J_5 + \dots]$$

とおけば、

$$\left. \begin{array}{l} \psi \\ \psi^+ \end{array} \right\} = R(x, t) \exp [\pm J(x, t) / \varepsilon]$$

となり、これを対として採用することにする。この形にしておけば、(20), (20)' は、量子力学の場合と全く同様にして、2つの方程式

$$-\frac{\partial}{\partial t} J = H_0(x, \frac{\partial J}{\partial x}) + V_D(x) + V_Q(R) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R^2 = \frac{\partial}{\partial x} [2 \frac{\partial J}{\partial x} R^2] \quad (24)$$

と同等になる。(24)は、 $\frac{\partial J}{\partial x}$ に運動量を対応させれば、一種の保存則で、本質的には、チャップマン・コルモゴロフの方程式の内容を表わす。(23)の V_D, V_Q は、 ϵ に陽に依存する項をとり出したもので、

$$V_D = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad V_Q = -\frac{\epsilon^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \quad (25)$$

である。ここで古典的極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとれば、久保達に対応するハミルトン・ヤコビの方程式

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -H_0(x, \frac{\partial J}{\partial x}) \quad (26)$$

が得られ、その特性方程式は、運動量

$$p = \partial J / \partial x$$

を定義することにより

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial p} = -2p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (27)$$

で与えられる。但し、

$$V_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2$$

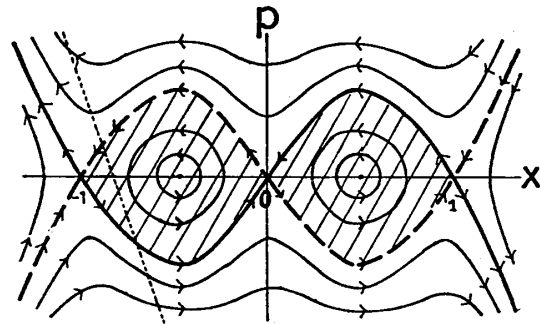
である。(27)は、質量 $m = -\frac{1}{2}$ の粒子のポテンシャル $V_0(x)$ (あるいは $m = \frac{1}{2}$, ポテンシャル $-V_0(x)$)中でのハミルトンの運動方程式である。この場合にも特性曲線の図を描くことができる。

例として、

$$F(x) = \frac{\gamma}{4} (x^2 - 1)^2$$

の場合を描いたのが図3である。斜線を引いた部分は、軌道がすべて閉じており、その結果として、ハミルトンの主函数、

従って分布函数そのものが、多価函数となる非物理的領域である。北原⁶⁾は、この困難を避けるのに苦労しておられるが、実は、この領域は、本質的に“量子力学的”であり、量子論的ポテンシャル V_Q が無視できなくて、トンネル効果が現われるような所である、すなわち古典力学的近似そのものが使えない領域である、と考える方が妥当であろう。



(図3) 特性曲線 ($F(x) = \gamma(x^2 - 1)^2 / 4$), 分布函数は $p = \partial J / \partial x$ と x の関係式として、ガウス分布なら図中の点線(直線)のように表わされる。

富田博之

§ 5. 定常状態アンサンブル理論の試み

「物性研究」の特徴を生かし、少々冒険を試みたい。今まで簡単なフォッカー・プランク方程式を扱ってきたが、一般のマスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -L \left[x, \frac{\partial}{\partial x} \right] P(x, t) \quad (28)$$

についても (x は多変数でよい)

(i) 唯一の定常解として平衡分布 $P_0(x)$ をもつ

(ii) 平衡状態で詳細つりあいが成立つ

ことを仮定しておけば、§ 2. と同様の変換を行うことにより、相互随伴方程式

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \psi^+(x, t) = -H(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi^+(x, t) \end{cases} \quad (29)$$

を導くことができる。ただし、

$$H = P_0(x)^{-1/2} L P_0(x)^{1/2}$$

であり、詳細つりあいの条件

$$L^* = P_0 L^+ P_0^{-1} = L$$

により

$$H^+ = H$$

を用いている。(参考文献 7 及び Appendix 参照) ここでは、 ψ, ψ^+ は各々

$$\begin{aligned} \psi &= P_0^{-1/2}(x) P(xt | x_0 t_0) \\ \psi^+ &= \frac{1}{P(x_1 t_1)} P(x_1 t_1 | xt) P_0(x)^{1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

とする。この時

$$\psi^+ \psi = \frac{1}{P(x_1 t_1)} P(x_1 t_1 | xt) P(xt | x_0 t_0) \equiv Q(xt) \quad (31)$$

は、2点 $(x_0 t_0), (x_1 t_1)$ を条件づけた時の、 $t_0 < t < t_1$ での確率分布である。実際には $t_1 - t_0$ を十分大きくとっておけば、系の発展は $Q(x, t)$ で表わされていると考えてよいであろう。

さて、ここで(29)の状態方程式に対応して、ハイゼンベルグ表示による力学系⁸⁾

$$\begin{aligned} [p, x] &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial t} A &= [H(x, p), A] \end{aligned} \tag{32}$$

及び、密度行列

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi^+| \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho &= -[H, \rho] \end{aligned} \tag{33}$$

を導入すると、分布函数 $Q(x, t)$ による物理量 $f(x)$ の平均値は

$$\langle f(x) \rangle = \text{Tr} f(x) \rho / \text{Tr} \rho \tag{34}$$

と表わされる。ハミルトニアン H 自体はこの力学系での保存量であるが、ここでは、その固有値は、状態の緩和定数である。

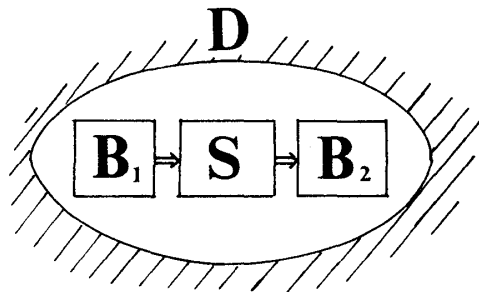
こう考える限り、ひとつの分布函数で表わされた状態は(それ自体、アンサンブルであるが)(33)から明らかなように純粋状態である。マスター方程式が(i)の性質を持つ限り、非平衡定常状態を純粋状態として表現することはできない。そこで、非平衡定常状態に対しては、混合状態として分布函数のアンサンブルを導入することが考えられる。

保存量 $H(x, p)$ が、緩和定数に関係していることを思い起せば、非平衡定常状態は、緩和定数の平均値 $\langle H \rangle$ が一定のアンサンブル、例えば、

$$\rho = \exp[-r^{-1}H]$$

で表現されるのではないだろうか？ r は $\langle H \rangle$ で与えられ、熱平衡状態は、“絶対零度”に対応し、 r が、熱平衡からのズレを表わす量となる。

熱力学的には、次のように“散逸的熱浴”を導入すればよいであろう。すなわち系 S の定常状態を実現するのに、ふたつの、普通の熱浴 B_1, B_2 を結合させ、 (S, B_1, B_2) を閉じた系として、マスター方程式(28)を与える。この時、マスター方程式は(i)(ii)の性質を持つとしておく。この閉じた系は、放っておけば、平衡状態に落ち着いてしまう。そこで、非平衡定常状態を維持するために、平衡状態すなわち、基底状態に落ち込むのを妨げるような“励起的熱浴”で、この系をとり囲み、絶えず系を励起し、 $\langle H \rangle$ が一定となるようにするの



(図4) 2つの熱浴 B_1, B_2 と散逸的熱浴 D

富田博之

である。つまり、この熱浴は、温度、すなわち散逸度 r が一定であるような熱浴である。

§ 6. おわりに

§ 1 ~ § 3 は、伊藤昭、木立英行両氏との共同研究であり、既にプロGRESSにレターとして投稿したもの⁹⁾で詳細は準備中である。また § 4 のハミルトン・ヤコビの方法に対するコメントも、投稿ずみのものである。¹⁰⁾ § 5 は以前から考えていたことを、今回の方法と関連して冒険的に試みたものであり、まだ確定するには至っていない。

(Appendix) マスター方程式の随伴型と時間反転型について

このことについては最近、長谷川⁷⁾によって論じられているが、なかなか難しい議論が使われており、また、これまでに論じられたことがなかったのかどうか筆者は知らない。ここでは、もう少し簡単な形で導き、詳細つりあいとの関係も明らかにしておきたい。

マスター方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} P(xt) = -L[x] P(xt) \quad (A1)$$

とする。 $L[x]$ は x についての微分演算まで含んだ演算子であり、 x は、多変数であってもよい。条件付確率 $P(xt|x_0t_0)$ ($t \geq t_0$) も (A1) に従う。この $P(xt|x_0t_0)$ の、 t_0 に関する方程式は、チャップマン・コルモゴロフの方程式

$$P(xt|x_1t_1) = \int dx_0 P(xt|x_0t_0) P(x_0t_0|x_1t_1) \quad (A2)$$

$$(t \geq t_0 \geq t_1)$$

の両辺を t_0 について微分し、随伴演算子 L^+ を

$$\int f(Lg) dx = \int g(L^+f) dx \quad (A3)$$

で定義することにより、

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} P(xt|x_0t_0) = -L^+[x_0] P(xt|x_0t_0) \quad (A4)$$

で与えられる。これがコルモゴロフの後退方程式と呼ばれるものである。これに対し、

$P(xt|x_0t_0)$ ($t \geq t_0$) を, (A1) の遅延グリーン函数と見た時, 先行グリーン函数 $P^*(xt|x_0t_0)$ ($t \leq t_0$) に対する方程式はどうなるであろうか。これは, ベイズの関係式

$$P^*(xt|x_0t_0) = P(x_0t_0|xt) P_0(x) / P_0(x_0) \quad (\text{A5})$$

を t で微分すれば

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} P^*(xt|x_0t_0) &= -\frac{P_0(x)}{P_0(x_0)} L^+[x] P(x_0t_0|xt) \\ &= -\{P_0(x) L^+[x] P_0(x)^{-1}\} P^*(xt|x_0t_0) \end{aligned}$$

となり,

$$L^*[x] = P_0(x) L^+[x] P_0(x)^{-1} \quad (\text{A6})$$

と置いて,

$$-\frac{\partial}{\partial t} P^*(xt|x_0t_0) = -L^*[x] P^*(xt|x_0t_0), \quad (t \leq t_0) \quad (\text{A7})$$

で与えられる。これを用いれば, 2時点分布函数 ($t \geq t_0$)

$$\begin{aligned} P_2(x_0t_0; xt) &= P(xt|x_0t_0) P_0(x_0) \\ &= P^*(x_0t_0|xt) P_0(x) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

の従う方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_2(x_0t_0; xt) &= -L[x] P_2(x_0t_0; xt) \\ \frac{\partial}{\partial t_0} P_2(x_0t_0; xt) &= L^*[x_0] P_2(x_0t_0; xt) \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

となり, $L^*[x]$ は, $L[x]$ の時間反転形と考えられる。詳細つりあいの条件は, $\{x\}$ をすべて α -変数に限っておけば,

$$P_2(x_0t_0; xt) = P_2(xt_0; x_0t)$$

と表現されるが, これは, (A9) を用いれば,

$$L^*[x] = L[x] \quad (\text{A10})$$

となる。

(参考文献)

- 1) R. Fürth, Z. Phys. **81** (1933), 143.
- 2) E. Nelson, Phys. Rev. **150** (1966), 1079.

富田博之

- 3) 犬井「応用偏微分方程式論」(岩波)
- 4) J. S. Langer, Ann. Phys. (N. Y.) **54** (1969), 258.
- 5) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51.
- 6) K. Kitahara, Advances in Chemical Physics, Vol. XXIX. p.85.
- 7) H. Hasegawa, Prog. Theor. Phys. **56** (1976). No. 2.
- 8) N. Saitō and M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **16** (1956), 71.
- 9) H. Tomita, A. Itō and H. Kidachi, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), No. 3.
- 10) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), No. 3.

註) § 4 に関する補足

スピノダル分解過程に対し採用した始状態 ψ_0 は、実は分布函数では、中央部分が平坦になった状態である。従って、 δ -函数から出発する場合には、この始状態に到達するのに既に、 $t \sim \frac{1}{2r} \log \epsilon$ の時間を要することが、次のようにして示される。すなわち、 $x \sim 0$ 付近を

$$F(x) \cong F(0) - \frac{r}{2} x^2, \quad r \equiv |F''(0)|$$
$$P(x, t) \cong \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma(t)} \right\},$$

と近似すると、

$$\frac{d}{dt} \sigma = 2r\sigma + \epsilon, \quad \sigma(0) = 0$$

より、

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon}{2r} (e^{2rt} - 1)$$

となり、 $\sigma(t) \sim o(1)$ となるまでの時間は

$$t \sim -\frac{1}{2r} \log \epsilon$$

と考えられる。