Title	Acoustoelectric Instabilityとフォノン乱流(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)
Author(s)	中村, 紀一
Citation	物性研究 (1976), 26(1): A61-A65
Issue Date	1976-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89126
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Acoustoelectric Instability とフォノン乱流

日電中研　中　村　紀　一

§ 1. 序　論

圧電性半導体で伝導電子のドリフト速度が音速を越えるとき起るフォノンの増幅現象はAcoustoelectric instability と呼ばれる。実験[1)]によると，増幅の臨界点以上で電流雑音が異常に増加し，CdS では熱雑音の 10^6 倍（第1図），スペクトルは低い遮断周波数（～20MH_z）を持つローレンツ型になる（第2図）。類似の現象が観測されているが，それらはガン効果による電流雑音[2)]，液体ヘリウムのヌッセルト数の揺らぎ,[3)] 半導体レーザの出力強度の雑音,[4)] Taylor instability での速度の揺らぎ[5)]，液晶による中性子[6)]や光散乱[7)]の強度の揺らぎである。第3図は送水管を流れる水の速度の揺らぎの

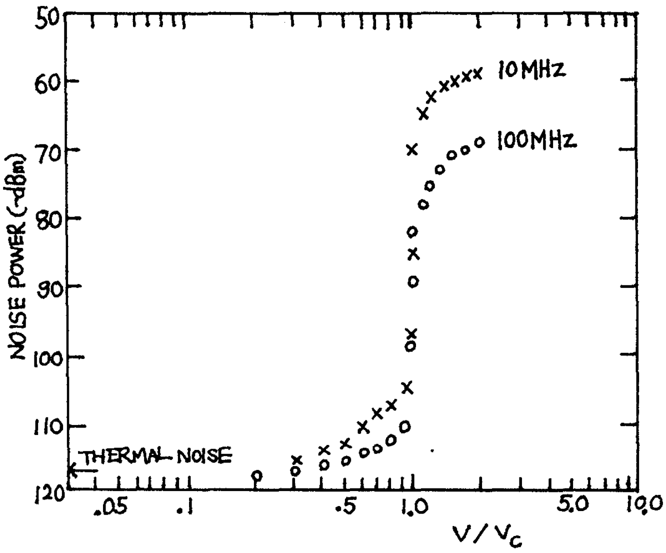

図1.　CdS の電流雑音[1)]

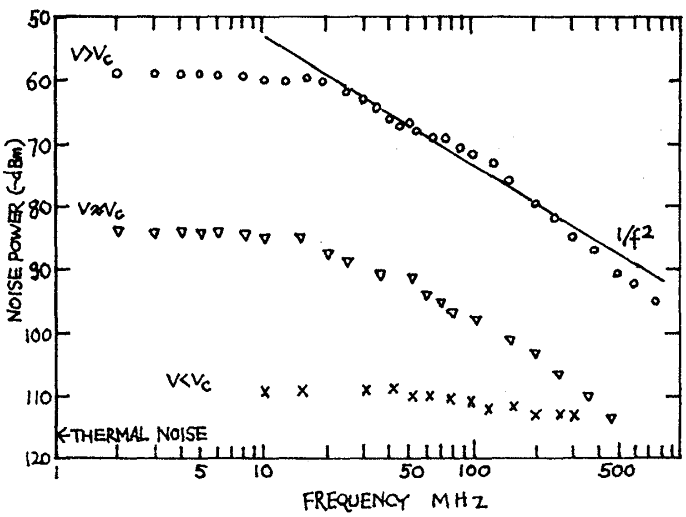

図2.　雑音スペクトル[1)]

測定結果[8)]で，乱流になると揺らぎが急激に増加する。これらの実験結果から，臨界点以上での揺らぎの増大は不安定現象の特徴で，乱流と同じ物理的内容を持っていることが示唆される。

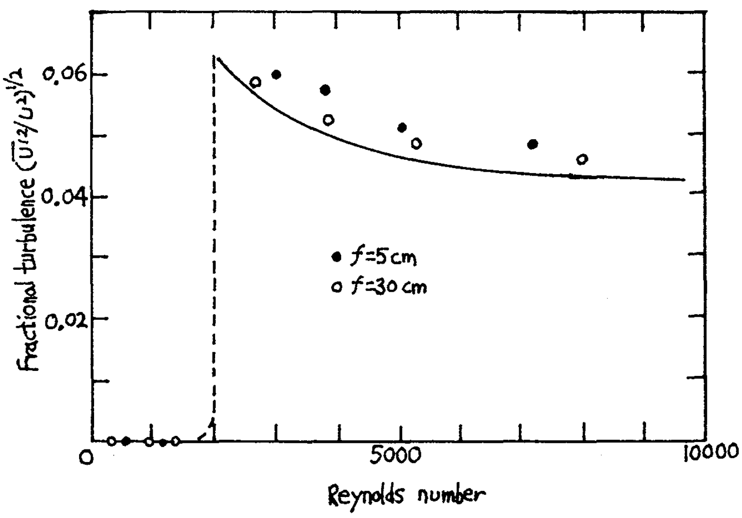

図 3.　乱流の揺らぎ[8)]

乱流は Leynolds (1883) の発見以来，未解決の問題であるが，Lorenz[9)] と Ruelle−Takens[10)]は乱流への遷移に対して Landau と異なるモデルを提出した。運動方程式 $dc/dt = F_\mu(c)$ で記述される自律系を考える，μ は外力を表わすパラメータ。(1) 層流は $F_\mu(c_0)=0$ を満足する安定平衡点 (attracting fixed point) $c=c_0$ で記述される，(2) $\mu > \mu_c$ で系は別の安定平衡点へ移るか，周期運動をする，(3) $\mu > \mu_T$ で乱流になると，運動方程式は安定平衡点や周期軌道 (closed orbit) の解を持たず，自分自身と交わらない非常に複雑で chaotic と見做される非周期軌道 (strange attractor) を描く。Ruelle−Takens は位相解析により strange attractorの存在を証明した。Benard instability の計算機実験[11)] や Taylor instability の雑音スペクトルの測定[5)]から LRT モデルの正しさが確かめられる。又，population biology でも非周期的振舞のあることが認められる。[12)] 我々の目的は LRT モデルの枠内で増幅フォノンの乱流の可能性を調べることである。

§ 2.　モデル方程式

フォノン増幅は波数 (q)− 空間の狭いコーンで起るから，振幅 c_qに対する運動方程式を次のように書くことができる,[13)]

$$\frac{\partial c_q}{\partial t} = \alpha_q c_q + \frac{1}{2} \sum_{(q'+q''=q)} V_{q,q',q''} c_{q'} c_{q''} , \tag{1}$$

α_q は増幅率, $c_q^* = c_{-q}$ である。増幅フォノンの強度スペクトルの時間発展はブリルアン散乱で測定される[14)]（第4図）。先ず伝導電子との相互作用により臨界波数 q_c のまわりの基本波モード $\psi_k = c_{q_c+k}$ が増幅され，自分自身との相互作用により2倍高調波モード $\xi_k = c_{2q_c+k}$ が励起される。次にパラメトリック効果により2分周波モード $\phi_k = c_{\frac{1}{2}q_c+k}$ が増幅される。第4図に似たスペクトルは，境界層乱流でも観測される。[15)] さて，連続モードの問題を解くことは困難であるから，これを3つの個別モード $\psi = c_{q_c}$，$\phi = c_{\frac{1}{2}q_c}$，$\xi = c_{2q_c}$ の問題に置き換える。増幅の初期では2倍高調波 ξ が断熱近似に従うと仮定することができるから，ψ と ϕ に対し，(1) から次の運動方程式が得られる。[16)]

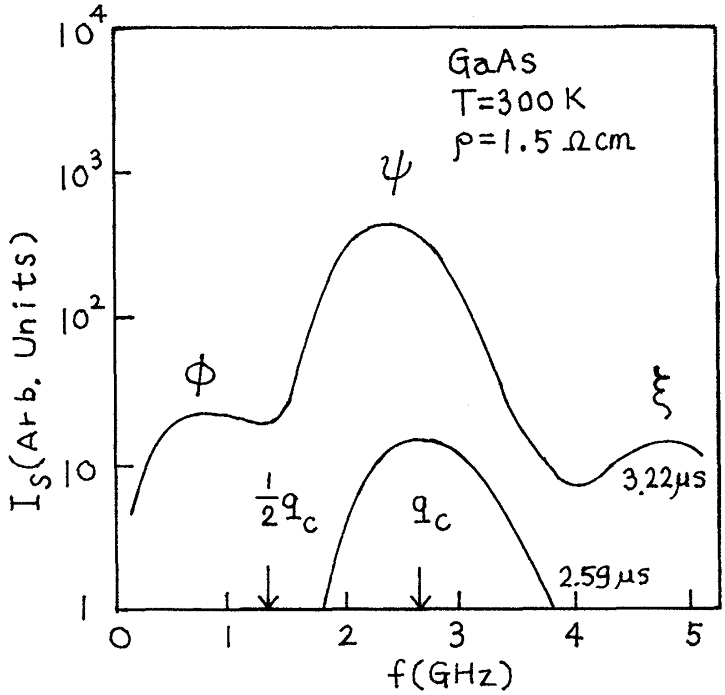

図 4. 増幅フォノンのスペクトルの時間発展[14)]

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (\alpha - g|\psi|^2)\psi + iA\phi^2 \qquad (2a) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \beta\phi + iB\psi\phi^* \qquad (2b) \end{aligned}}$$

ここで，$\alpha = \alpha_{q_c}$，$\beta = \alpha_{\frac{1}{2}q_c}$ (2b) は ϕ のパラメトリック増幅を記述する。ϕ が励起しない臨界点近傍（$\phi = 0$）では，(2a) は Landau 方程式になる。$V_{q,q',q''} = iV_0 / q\epsilon_q\epsilon_{q'}\epsilon_{q''}$ であるから，（$\epsilon_q = 1 + (q_D/q)^2$，ここで q_D はデバイ波数），g, A, B は正の実数である。

(2) がモデル方程式として認められる為には総ての解がboundedでなければならないが，これはJackson[17]の方法で証明される。[16] 次に (2) の定常解の安定性を調べる。これはBenard instability の Lorenz モデルと同様に解析的に可能である(第1表)。

表 1. 定常解の安定性

	$\alpha<0$ $\beta<0$	$0<\alpha<\alpha_T$ $\beta<0$		$\alpha>\alpha_T$ $\beta=-b<0$			$\alpha>\alpha_T$ $\beta>0$	
ψ_0	0	0	$\sqrt{\alpha/g}$	0	$\sqrt{\alpha/g}$	b/iB	0	$\sqrt{\alpha/g}$
ϕ_0	0	0	0	0	0	$\sqrt{(\alpha-\alpha_T)(b/AB)}$	0	0
安定性	yes	no	yes	no	no	no	no	no

$\alpha_T = g\,\beta^2/B^2$ は ϕ のパラメトリック増幅が起る α のしきい値である。

第1表から，$\alpha > \alpha_T$ で系 (2) は安定平衡点を持たない。解は bounded であるから，このとき，系は位相空間を永久に彷徨う。常微分方程式の定性的理論[18] から，この運動は周期軌道(closed orbit)か非周期軌道(strange attractor)のいずれかである。同様の結果は2倍高調波 ξ に対する断熱近似が破れても起る。 残念ながら，運動がどちらのタイプであるかを決める解析的方法がないので，現状では計算機に頼らざるを得ない。しかし，フォノン系は安定平衡点から time-dependent state へ遷移するから，乱流が発生する可能性がある。

§3. 結 論

Ruelle-Takens 理論は常微分方程式の解の性質を述べた純粋に数学的なものであるから，乱流は不安定な散逸系での極めて一般的な現象と云える。熱統計力学との対比に於いて乱流統計力学が存在してもよい。次の目標は strange attractor の物理的内容を明らかにすることである。いま，非線形ランジュバン方程式 $dc/dt = F_\mu(c) + R(t)$ を考える，(R はランダムな力)。これに同等な Fokker-Planck 方程式から乱流理論を作ろうとするのが Edwards[19] や Nelkin[20] の理論であるが，乱流が $F_\mu(c)$ の

strange attractor の乱雑運動であるなら Fokker−Planck方程式はこの運動の統計的性質を記述できない。strange attractor の運動それ自体の統計力学を作ることが要求される。

参 考 文 献

1) A. R. Moore: J. appl. Phys. **38** (1967) 2327.
2) K. Matsuno: Phys. Letters **31A** (1970) 335.
3) G. Ahlers: Phys. Rev. Letters **33** (1974) 1185.
4) T. L. Paoli: IEEE J. Quantum Electron. **QE−11** (1975) 276.
5) J. P. Gollub and H. L. Swinney: Phys. Rev. Letters **35** (1975) 927.
6) H. B. Moller and T. Riste: Phys. Rev. Letters **34** (1975) 996.
7) S. Kai et al: J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) 305.
8) E. R. Pike et al: J. Phys. E **1** (1968) 727.
9) E. N. Lorenz: J. Atmos. Sci. **20** (1963) 130.
10) D. Ruelle and F. Takens: Commun. math. Phys. **20** (1971) 167.
11) J. B. McLaughlin and P. C. Martin: Phys. Rev. A **12** (1975) 186.
12) R. M. May: Science **186** (1974) 645.
13) K. Nakamura: J. Phys. Soc. Japan **39** (1975) 860.
14) T. E. Parker and R. Bray: Phys. Letters **45A** (1973) 347.
15) H. Sato: J. Phys. Soc. Japan **14** (1959) 1797.
16) K. Nakamura: J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) February.
17) E. A. Jackson: J. math. Phys. **13** (1972) 1189.
18) 白岩謙一：数理科学 No. 138 (1974) 17.
19) S. F. Edwards and W. D. McComb: J. Phys. A **2** (1969) 157.
20) M. Nelkin: Phys. Rev. Letters **30** (1973) 1029.