開放系におけるインポータンスの概念

茨城大学・I　安　久　正　紘

§1. 緒　　論

インポータンスの概念は原子炉の制御のために生みだされたもので，原子炉内のある中性子が増殖してゆく過程で自分自身（先祖）及びその子孫中性子を通じて中性子検出器にどの程度効果（Importance）を及ぼし得るかを定量的に表現したものである。[1] 本小論ではこのインポータンスの概念を系の時間発展がマスター方程式で記述される確率過程の場合に拡張する。この場合，前述の中性子検出器に相当するものは測定系あるいは一般に系をとりまく外界におきかえられる。分布関数とインポータンスは互いに共役な方程式に従う正準共役な量になることが示される。将来の効果を予測する時間が前向きのインポータンスのほかに，過去のある状態が持っていた効果を現在から推古（retroduction）する後ろ向きインポータンスも導入される。

§2. 前向きインポータンス

巨視的変数Xの分布関数 $P(x, t)$ の時間発展が次のマスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\gamma(x) P(x,t) + \int dx' (x'|W|x) P(x',t) \tag{2-1}$$

で記述される系を考察する。(2-1) に従う遷移確率 $P(x,t|x',t')$ を用いてインポータンス $I(x,t)$ を次式により導入する。

$$I(x,t) = \int_t^{t_f} dt' \int dx' P(x,t|x',t') S(x',t') \tag{2-2}$$

ここで $S(x', t')$ は時刻 t' に状態 x' にいる系が外界（例えば観測系）に及ぼす作用を示し，一般には分布関数に依存してもよい。外界との相互作用によって系内に引きおこされる擾乱がある場合には遷移マトリックス $(x'|W|x)$ に含めて考えることにする。初期時刻 t に状態 x にある系が時間の経過に従って遷移する際に初期時刻 t から終刻 t_f までに外界に働きかける作用の全体が $I(x, t)$ であると解釈される。いいかえると初期

状態 x が自分自身及びその子孫（状態 z′）を通じて，未来に持つ価値の可能性を表現したものと考えられる。I(x, t) の従う方程式を導くと，

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = \gamma(x) I(x,t) - \int dx' (x|W|x') I(x',t) - S(x,t) \qquad (2\text{-}3)$$

となり，分布関数の方程式（2-1）の共役方程式になっていることがわかる。（2-1）及び（2-3）は次のラグランジェアン L の停留性の条件から導くことができる。

$$L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx \Big[P(x_i, t_i|x, t) S(x, t) - I(x, t) \Big(\frac{\partial}{\partial t} P(x_i, t_i|x, t)$$
$$+ \gamma(x) P(x_i, t_i|x, t) - \int dx''(x''|W|x) P(x_i, t_i|x, t) \Big) \Big] \qquad (2\text{-}4)$$

L の停留性の条件は，初期状態 x_i が時間発展してゆく過程で初期時刻 t_i から終刻 t_f までに外界に働きかける作用の全体，すなわち

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \int dx\, P(x_i, t_i|x, t) S(x, t)$$

が補助条件（2-1）のもとで遷移確率の微少の変化に対して停留性を持つことを要請することと解釈される。ここで I(x, t) はラグランジェの未定乗数として扱われる。

このLの停留性の要請を出発点としてインポータンスの議論を再構成することもできる。

ハミルトニアンHとして，

$$H = \int dx \Big\{ \Big[-\gamma(x) P(x_i, t_i|x, t) + \int dx' (x'|W|x) P(x_i, t_i|x', t) \Big] I(x, t)$$
$$+ P(x_i, t_i|x, t) S(x, t) \Big\} \qquad (2\text{-}5)$$

を導入すれば，方程式（2-1）と（2-3）は次の正準方程式の形にかくことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} I = -\frac{\delta H}{\delta P}, \quad \frac{\partial}{\partial P} = \frac{\delta H}{\delta I} \qquad (2\text{-}6)$$

ここで P は P(x, t) あるいは $P(x_i, t_i|x, t)$ のいずれでもよい。

（2-1）と（2-3）より次の保存則も導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx\, I(x,t)P(x,t) = -\int dx\, S(x,t)P(x,t) \tag{2-7}$$

上式は，インポータンスの総和は外界に働きかけた作用だけ常に減少することを示している。（但し，$S(x,t) \geqq 0$ と仮定）。

§3. 後ろ向きインポータンス

時刻 t' に系の状態が x' であることがわかっている時に，それよりも前の時刻 t に状態が x であった確率 $P(x,t)P(x,t|x',t')/P(x',t')$ を用いて後ろ向きインポータンス $\widetilde{I}(x,t)$ を次式により導入する。

$$\widetilde{I}(x,t) = \int_{t}^{t_f} dt' \int dx' \frac{P(x,t)P(x,t|x',t')}{P(x',t')} S(x',t') \tag{3-1}$$

$\widetilde{I}(x,t)$ は過去の時刻 t に状態 x が持っていた価値（Importance）を現在（時刻 t_f ）から推古（retroduction）して表わわしたものである。§2. における前向きインポータンスの議論と同様にして，$\widetilde{I}(x,t)$ の従う方程式を導くと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{I}(x,t) = \widetilde{\gamma}(x)\widetilde{I}(x,t) - \int dx'(x|\widetilde{W}|x'')\widetilde{I}(x',t) - S(x,t) \tag{3-2}$$

となり，$\widetilde{I}(x,t)$ に正準共役の量は推古の確率 $P(x_i,t_i)P(x_i,t_i|x,t)/P(x,t)$ になることがわかる。ここで

$$\widetilde{\gamma}(x) = \int dx'' \frac{P(x'',t)}{P(x,t)}(x''|W|x) \tag{3-3}$$

$$(x|\widetilde{W}|x'') = \frac{P(x,t)(x|W|x'')}{P(x'',t)} \tag{3-4}$$

特に (3-1) において相互作用の形として，$S(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ を仮定し，さらに初期状態として分布関数が $P_S(x)$ で表わされる定常状態を考えると $\widetilde{I}(x,t)$ は推古の確率 $P_S(x)P(x,t|\xi,\tau)/P_S(\xi)$ そのものに等しくなる。これを用いて，状態 ξ

の時間発展に関する後ろ向き運動方程式を求めると,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\xi = \gamma(\xi)\xi - \int dx\, X \frac{P_S(x)}{P_S(\xi)}\,(x|W|\xi) \tag{3-5}$$

となり,前向き運動方程式は遷移確率 $P(\xi,\tau|x,t)$ により決定され,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\zeta = -\gamma(\xi)\xi + \int dx\, X\,(\xi|W|x) \tag{3-6}$$

となることがわかる。(3-5),(3−6) の右辺第2項は時間反転について非対称になっているが,これは推古する場合には初期状態に関する確率分布 $P_S(\xi)$ の知識がどうしても必要になることに由来する。[2] 実際簡単な拡散過程の場合,この非対称性はドリフト速度の差 $-D\partial \ell n\, P_S(\xi)/\partial\xi$ (D は拡散定数) となってあらわれる。

参 考 文 献

1) 大塚益比古　原子炉物理　共立

2) S. Watanabe, Knowing and Guessing (John Wiley & Sons)

「非線型ランジュバン方程式の方法による ONSAGER–MACHLUP 理論の拡張」

阪大・教養　植　山　　宏

§ 1. 非線型ランジュバン方程式[1]

$$\frac{d}{dt}a_j = \alpha_j(a) + R_j(t) \tag{1}$$

を拡散近似

$$\frac{d}{dt}a_j = \alpha_j(a) + \Sigma g_{j\ell}(a)\,\eta_\ell(t) \tag{2}$$

で考察する。但し, $\eta_\ell(t)$ はホワイト・ノイズを表す。この方程式を $\mathrm{It\hat{o}}$ 型確率微分