非線型非平衡系でのエルゴード問題

日本電気株式会社中央研究所　松 野 孝 一 郎

非線型確率過程と仮想的統計集団：既約な非線型非平衡確率過程の時間発展を記述する時，少くとも次の二つの立場が考えられる。一つは確率過程に固有な仮想的統計集団の時間発展を追跡する統計集団理論の立場であり，他の一つは観測されるある特定の見本過程の時間発展に注目する観測者の立場である。系は既約であるから，仮想的統計集団は観測の対象となり得ない。更に，観測による同定という操作を被験する見本過程に比して，仮想的統計集団は操作としての観測を排除している。この相違にも拘らず，見本過程がエルゴード過程であるならば，ある物理量の仮想的統計集団での母集団平均が見本過程での長時間平均に等しくなる。この場合，仮想的統計集団の時間発展は観測量のエルゴード性を介する限りにおいて見本過程の時間発展に関係づけられることになる。

見本過程の時間発展：見本過程がエルゴード過程になるか否かを判定するために，与えられた非線型確率過程に関する一時間確率分布関数

$$P(i, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

を導入する。t は時刻，i は可算個の状態のうちの一つを示すものとする。時刻 t＝0 で任意の初期状態が与えられた時，次式

$$P(i, t) = P(i, t') \qquad (t, t'(\neq t) > T_{inf}) \tag{2}$$

を満足する T_{inf} が有限ならば，観測される見本過程はエルゴード過程である。[1] しかし，T_{inf} が有限となる強定常過程 (2) は見本過程がエルゴード過程になるための十分条件であって，必要条件ではない。

見本過程で観測されるある物理量 A (t) の時間平均が

$$\overline{A(t)}\ (= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(t)\, dt) = 0 \tag{3}$$

を満足する時，時間平均相関関数が

$$\overline{A(t+\tau)A(t)}\ \left(\equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}A(t+\tau)A(t)dt\right)$$

$$\geq C\,\tau^{-\alpha} \qquad (C>0,\ \tau：十分大) \tag{4}$$

なる不等式を満足し，かつ

$$0 < \alpha \leq 1 \tag{5}$$

が成立するならば，観測される $A(t)$ のスペクトル強度は周波数 0 の極限で発散する。低周波極限でスペクトル強度が発散するならば，その見本過程は決して定常ではなく，非定常である。非定常な見本過程はエルゴード過程になり得ない。（∵ エルゴード過程ならば，過去の時間平均が将来の時間平均に等しいと主張することになる）。非定常な見本過程が実現される場合には，(2) 式での記憶保持時間 T_{inf} は決して有限であり得ない。

非線型確率過程の非エルゴード性：非線型確率過程での見本過程の例題として，白色ガウス型乱雑外力 $R(t)$ によって駆動される非線型ランジュバン方程式

$$\dot{y}(t) = -a\,y^3(t) + R(t) \qquad (a>0) \tag{6}$$

を考える。粗視化された物理量

$$A(t\,|\,\tau_0) \equiv \frac{1}{\tau_0}\int_t^{t+\tau_0} y(t)\,dt \tag{7}$$

を観測量として採用するならば，それの時間平均相関関数は

$$\overline{A(t+\tau\,|\,\tau_0)A(t\,|\,\tau_0)} \propto \tau^{-0.64\pm0.02} \tag{8}$$

$$(\tau \lesssim \tau_0,\ \tau：十分大)$$

なる漸近式を満足することが見本過程での測定によって確められた。[2] (4) 式を参照す

るならば，$\alpha = 0.64 \pm 0.02$ が得られる。このことは，非線型ランジュバン方程式 (6) に従う見本過程がエルゴード過程でないことを保証している。観測される見本過程は非定常である。

非線型確率過程での見本過程がエルゴード過程でなく，非定常となることは一般的に証明される。[3] その場合，(4) 式で定義された指数 α は $\alpha = 1$，あるいは，$0<\alpha<1$ であると予測されている。一方，線型確率過程の場合は $\alpha = 2$ となり，[3] $0 < \alpha \leq 1$ を満足していないから，そこでの見本過程はエルゴード過程となり得ることがある。

非エルゴード性と観測の問題：非線型確率過程は観測量に関してエルゴード的になり得ないが，適当に選ばれた測度[4]に関してはエルゴード的であることが知られている。しかし，非線型非平衡系での考察対象が観測事実であることを鑑みれば，直接観測の対象とならない測度（例えば，確率測度）のエルゴード性を観測事実の説明のための理論的根拠として援用することは適切でない。観測事実として最も基本となる事象は長時間継続する見本過程である。従って，実時間軸上において長時間持続する見本過程は，表現され得ない見本過程に比して，一体いかなる物理的選択基準を満足しているのかとの新たな問[5]が定立されることになる。

参 考 文 献

1. 伊藤　清，確率過程 I（岩波，1957） p. 73
2. K. Matsuno, Phys. Rev. A **12**, 639 (1975)
3. K. Matsuno, Phys. Lett. **47A**, 99 (1974); J. Stat. Phys. **11**, 87 (1974); (E) **13**, 101 (1975)
4. J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, Ann. Math. **42**, 874 (1941)
5. K. Matsuno, Phys. Rev. A **11**, 1016 (1975)