不安定点近傍における緩和とゆらぎの一般論

東大理　鈴木増雄

Part I：スケーリング理論

不安定点からの緩和とゆらぎを一般的に取り扱う新しい方法を提案する。[1)〜4)] 事の起りは，Ω−展開[5)〜7)]では，丁度不安定点から出発すると，分散が時間と共に指数関数的に発散し，正しい平衡値に近づかないという事態を救う試みに始まる。典型的な非線型 Fokker−Planck（F−P と略す）方程式（レーザー模型）で，仮りに $\epsilon=\Omega^{-1}$（Ω は系の大きさ）で展開して，摂動的に，分散 $\epsilon\sigma(t)$ 即ち2次のモーメント $\mathscr{Y}_2(t,\epsilon)$ を調べてみると，発散の一番強い項のみを残して，

$$\mathscr{Y}_2(t,\epsilon) \cong (\epsilon\sigma e^{2\gamma t}) - 3(\epsilon\sigma e^{2\gamma t})^2 + 15(\epsilon\sigma e^{2\gamma t})^3 \qquad (1)$$

となる。[1),4)] 但し，$\sigma=\sigma_0+\sigma_1$ で σ_0 は初期分散，σ_1 は拡散項の効果を表わすパラメタ，γ はドリフト項の強さを表わす。第1項がΩ−展開に対応して，これは，$t\to\infty$ と共に $+\infty$ に発散する。ところが，第2項以下は，ϵ を固定して考えると，発散が益々激しくなる。そこで，$\epsilon\sigma e^{2\gamma t}\sim 1$ 即ち，$t\sim-(2\gamma)^{-1}\log(\epsilon\sigma)$ の時間領域を考える時には，(1) のすべての項を集めて和をとらなければならないことがわかる。この時間領域をスケーリング領域と呼ぼう。このスケーリング領域は，図1のように，ゆらぎが最も大きい領域にも対応していることが後でわかる。何らかのうまい方法（これがこの報告の主眼）で，(1) の最強発散項を集めて閉じた解が求まったとすれば，それは，次のようなスケーリング形をしていることになる：

$$\mathscr{Y}_2(t,\epsilon) \cong f_{sc}(\tau)\ ;\ \tau = \sigma\epsilon e^{2\gamma t} \qquad (2)$$

文献 1)〜4) で，すでに示されているように，実際に $f_{sc}(\tau)$ を定める一般的な方法が見つかっており，それによると，$t\to\infty$ 即ち，$\tau\to\infty$ で，$f_{sc}\to\mathscr{Y}_{eq}+O(\epsilon)$ と正しい平衡値に近づくことが示されている。(2) の τ の式は，$t\to\tau$ の一般的なスケール

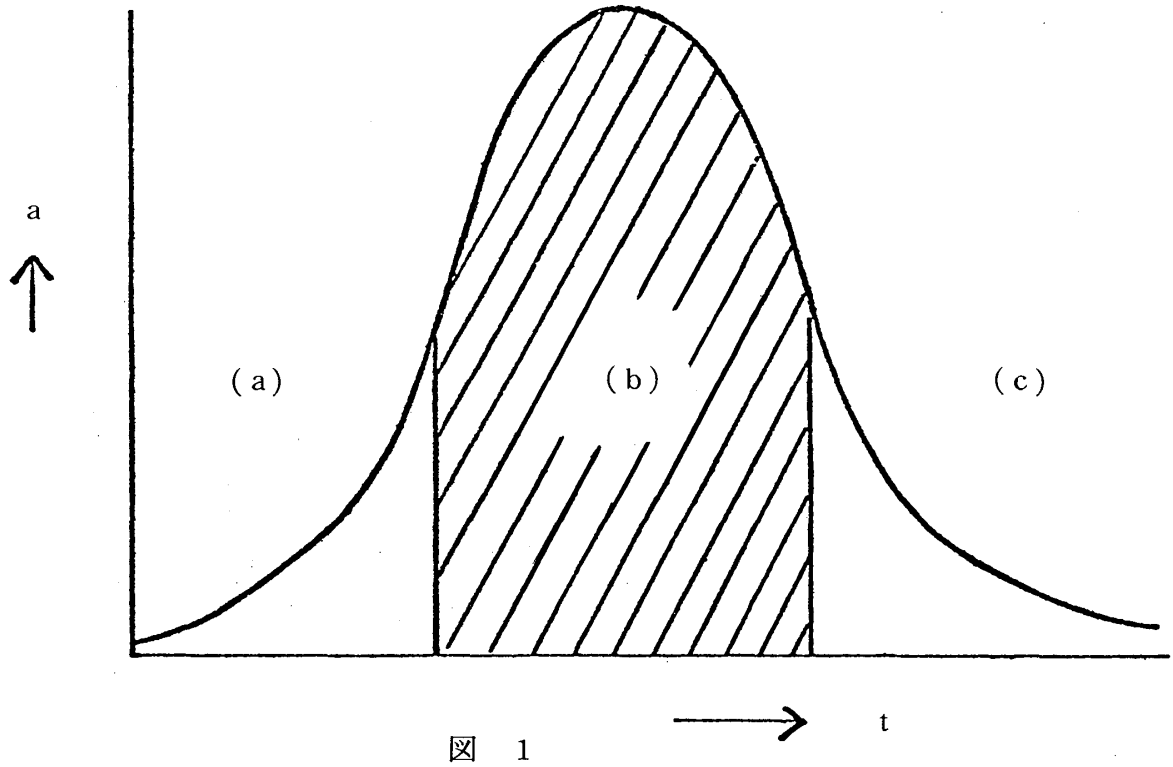

図　1

変換[1)〜4)] $\tau = S(t, \varepsilon, \cdots)$ の一例になっており，(2) 式は，二次のモーメントがスケーリング領域では，スケーリング変数 τ だけの関数になっていることを示している。この意味で，我々の方法は，スケーリング理論と呼ぶことができる。このスケーリング理論には，文献 1)〜4) にあるように，いろいろな等価な表現の仕方があるが，一口に言うと，図1のように，t が小さい初期領域では，摂動計算（又は ε ー展開）を行い，スケーリング領域では，t を τ にスケール変換をし，τ を固定して，$\varepsilon \to 0$ の極限をとることによって，$f_{sc}(\tau)$ の充す発展方程式を導き，その一般解を求め，任意関数（又は定数）を初期領域の解の最強発散項と接続することによって一意的に定める。

例えば，典型的な F−Peq. で平たく言えば，次のようになる：

$$\begin{cases} \text{初期領域} \rightarrow \text{線型化された F−Peq. を解く} \\ \text{スケーリング領域} \rightarrow \text{ドリフト方程式を解く。} \end{cases} \tag{3}$$

二つの解を境界のところで解析的に接続するということは，また別の言葉で言えば，線型 F−Peq. の解を境界の時間での初期条件として，ドリフト方程式を解き，その解の中でスケーリング形になる部分を引き出すと言っても同じである。

そこで，スケーリング理論をアブストラクトに表現しよう。[1)〜4)]今，分布関数P(n, t)モーメント，母関数$\Psi(\lambda, t)$を一まとめにして，$f(t, \varepsilon, \cdots)$と書くことにして，次のような形の方程式に従うものとする：

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \varepsilon, \cdots) = \mathscr{L}(t, \varepsilon, \cdots) f(t, \varepsilon, \cdots) \tag{4}$$

ここで，一般化されたスケール変換$\tau = S(t, \varepsilon, \cdots)$を行うと，(4)は，

$$s(\tau, \varepsilon, \cdots) \frac{\partial}{\partial \tau} f = \mathscr{L}(S^{-1}(\tau, \varepsilon, \cdots), \varepsilon, \cdots) f, \tag{5}$$

となる。但し，

$$s(\tau, \varepsilon, \cdots) = \left[\frac{\partial}{\partial t} S(t, \varepsilon, \cdots)\right]_{t=S^{-1}(\tau, \varepsilon, \cdots)} \tag{6}$$

前に述べたように，τを固定して，$\varepsilon \to 0$の極限をとる。（この操作は，時間を平行移動して，$t \to t - (2\gamma)^{-1} \log(\varepsilon\sigma)$とスケーリング領域に持ってきて，確率変数xのゆらぎがオーダー1とみなし，$f(t, \varepsilon, \cdots)$をオーダー1の関数とみて漸近評価すると言ってもよい。最初に思いついたのはこのやり方であったが，組織的に論じるには，上のようにスケール変換して議論した方がわかり易い。）こうして，次のような$f_{sc}(\tau)$に対する発展方程式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_{sc} = \mathscr{L}_{sc} f_{sc} \; ; \; \mathscr{L}_{sc} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \tau \text{ fixed}}} \{s(\tau, \varepsilon, \cdots)\}^{-1} \mathscr{L}(S^{-1}(\tau, \varepsilon, \cdots), \varepsilon, \cdots) \tag{7}$$

この方法を普通のKramers−Moyal eq.[6)7)]（その特別な場合としてのF−P eq.）に適用すると，(3)に示したようにドリフト方程式（τの入り方は別として）になる：[1),3),4)]

$$2\gamma\tau \frac{\partial}{\partial \tau} P_{sc} + \frac{\partial}{\partial x} c_1(x) P_{sc} = 0 \; ; \quad \tau = \sigma\varepsilon e^{2\gamma t} \tag{8}$$

但し，$c_1(x)$はK−M eq.の第1次モーメントである。[6),7)] (8)の一般解は，

$$P_{sc} = \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}} f'(x) \psi(f^2(x) \tau^{-1}) \; ; \; f(x) = \exp \int^x \frac{\gamma d\xi}{c_1(\xi)} = x + \cdots\cdots \tag{9}$$

のように与えられる。[3),4)] ここに，$\psi(y)$はyの任意関数である。これは，初期条件即ち初期領域での解との接続の手続きによって決められる。

例えば，初期分布がガウス型$P_0(x) \propto \exp(-x^2(2\varepsilon\sigma_0)^{-1})$とすると，(3)の線型

F−P eq. の解が $P_{ini} = (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2(2\tau)^{-1})$ と求まり，これに (9) を接続して，ψ を決めると，結局，スケーリング形は

$$P_{sc}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} f'(x) \exp(-f^2(x)/(2\tau)) \tag{10}$$

特に，レーザー模型 $c_1(x) = \gamma x(1-x^2)$，$c_2 = 2$ の場合には，

$$P_{sc}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\phi(x,\tau)};\ \phi(x,\tau) = -\frac{x^2}{2\tau(1-x^2)} - \frac{3}{2}\log(1-x^2) \tag{11}$$

これを図示すると，図2のようになる。即ち，不安定な single peak の分布から出発して，$\tau = \tau_0 = \frac{1}{3}$ (i.e., $t = t_0 = -(2\gamma)^{-1}\log(3\sigma\varepsilon)$) で double peak に転移し，そのピークの位置は，$t \to \infty$ と共に正しい平衡値に近づく様子がよくわかる。二重ガウス近似に基く Saito[8] の数値的な結果は，我々のスケーリング解と定性的には一致している。

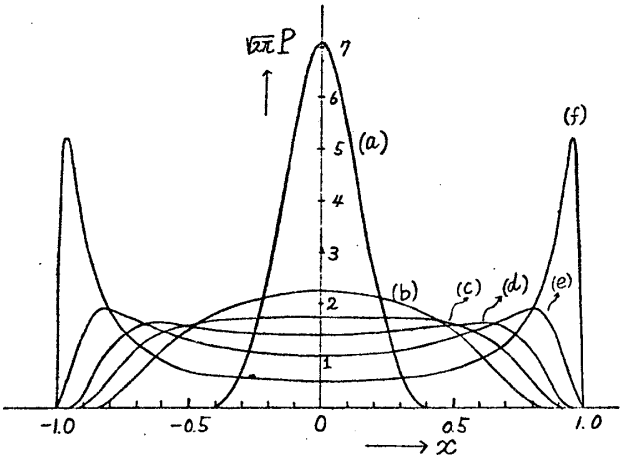

図 2

尚，スケーリング解を第零次として組織的に展開するには，次のような triangular double asymptotic sequence $\delta_{n,m}(\varepsilon)$ を導入するとよい[4]：$\delta_{n,m}(\varepsilon)(0 \leq m \leq n)$；$\delta_{n,m}(\varepsilon) = o(\delta_{n,m}(\varepsilon))$ for $1 \leq m \leq n$；$\delta_{n+1,0}(\varepsilon) = o(\delta_{n,n}(\varepsilon))$ for $\varepsilon \to 0$；

$$\delta_{p,q}(\varepsilon)\,\delta_{n,m}(\varepsilon) = \delta_{p+n,\,q+m}(\varepsilon) \tag{12}$$

例えば，$\delta_{n,m}(\varepsilon) = \varepsilon^n(\log\varepsilon)^m$ は，上のすべての性質を充している。この $\delta_{n,m}(\varepsilon)$ をベースにして，$f(t,\varepsilon,\cdots)$ を次のように展開できることが示せる[4]：

$$f(t,\varepsilon,\cdots) = f_{sc}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{n,m}(\tau)\,\delta_{n,m}(\varepsilon) \tag{13}$$

注目すべきことは，展開係数 $f_{n,m}(\tau)$ がすべてスケーリング形をなしていることである。この意味で，(13) は，scaling expansion と呼べる。$f_{n,m}(\tau)$ に対する発展方程式が前と同様導けて，それを初期領域の対応する解と接続して決めることができる。詳しくは，文献 4) を参照して下さい。

Part Ⅱ : Anomalous Fluctuation Theorems in the Extensive region

Part Ⅰ で論じたスケーリングのアイデアは，示量性の使える領域でも役に立つ。[2] 初期分布が，不安定点 x_0 から δ だけ離れているとして，図3のように，(ε,δ) 領域を不安定点領域と示量性領域の二つに分ける。ここでは，示量性領域即ち，$\varepsilon \ll \delta$ 或いは，δ を有限に固定して $\varepsilon \to 0$ の極限[5)〜7)] で考える。そこで，スケーリング変数 τ としては，今度は

$$\tau = \delta e^{\gamma t} \tag{14}$$

を用いる。[2] 文献 2) で次の結果が証明されている：

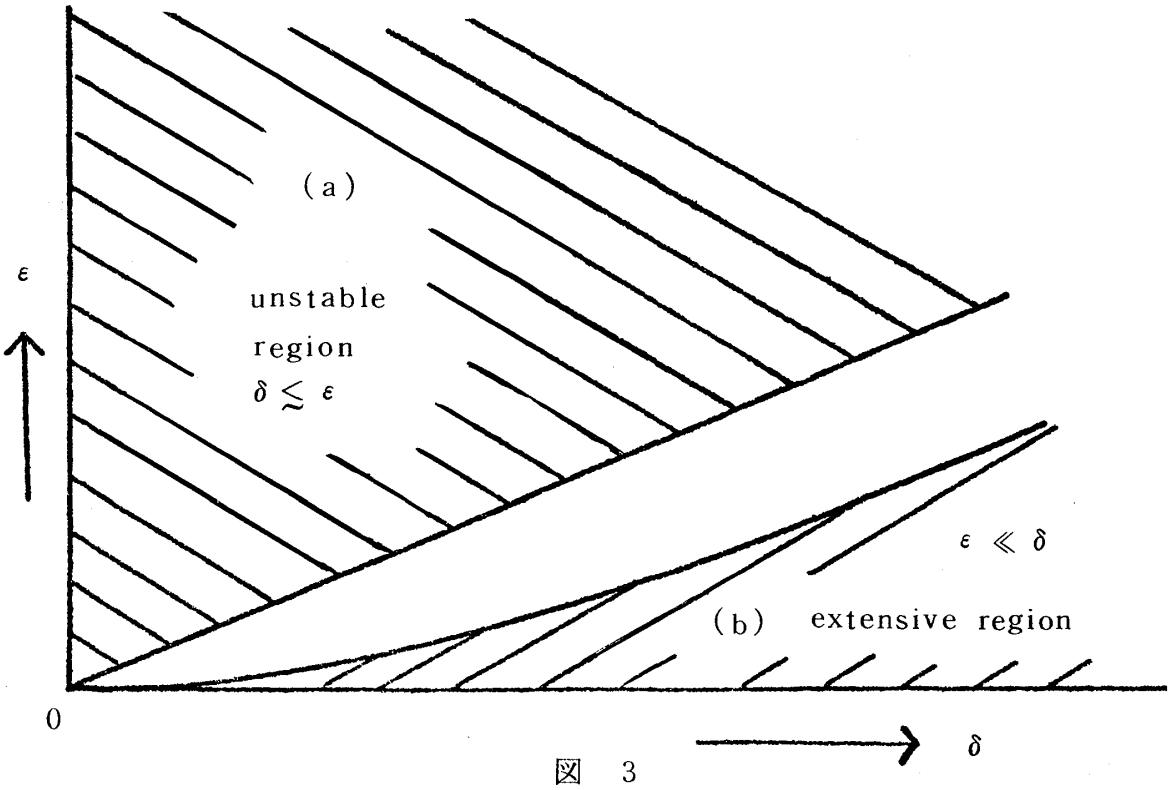

図 3

Scaling law for the most probable path : For a small δ (i.e., $|\delta| \ll |\tau|$), we have

$$y(t,\delta) \simeq y_{sc}(\tau) \equiv f^{-1}(\tau) \ ; \ \tau = \delta e^{\gamma t} \tag{15}$$

Anomalous fluctuation theorem : The variance $\sigma(t)$ shows the following anomalous enhancement of fluctuation

$$\sigma(t,\delta) \simeq \sigma_{sc}(\tau,\delta) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{\delta^2} \left\{ \frac{c_1(y_{sc}(\tau))^2}{\gamma} \right\} \ ; \ \sigma_1 = \frac{c_2(x_0)}{2\gamma} \ , \tag{16}$$

for a small δ in the scaling regime $\tau \sim 1$, with (15). The maximum value of $\sigma(t)$ is given by

$$\sigma_m = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{\delta^2 \gamma^2} c_1^2(y_m) \ ; \ c_1'(y_m) = 0 \tag{17}$$

That is, the enhancement factor R (or peak) is proportional to δ^{-2}, The time t_m corresponding to the peak is given by

$$t_m = \gamma^{-1} \log(\tau_m / \delta) \ ; \ y(\tau_m) = y_m \ . \tag{18}$$

即ち，初期分布が不安定点に近い程，途中，(18) の大きさの時間で異常に大きなゆらぎが現れる。[2),6)] そのゆらぎの profile が $c_1(y_{sc}(\tau))$ の 2乗で表わされることは注目すべきことである。文献 2) には，上のようにスケーリング解が導かれる時間領域（スケーリング領域）のあらわな条件や高次のゆらぎに対する定理（$\sigma_n \propto \delta^{-n}$）も導かれている。尚，上の結果は，次のような簡単な物理的な関係として表現することもできる：

Fluctuation－intensity relation : The fluctuation $\sigma_I(t)$ of an intensity $I(t)$ proportional to the square of the change velocity $\dot{I}(t)$ normalized by the initial value $\dot{I}(0)$:

$$\sigma_I(t) \propto (\dot{I}(t)/\dot{I}(0))^2 \tag{19}$$

in the scaling regime .

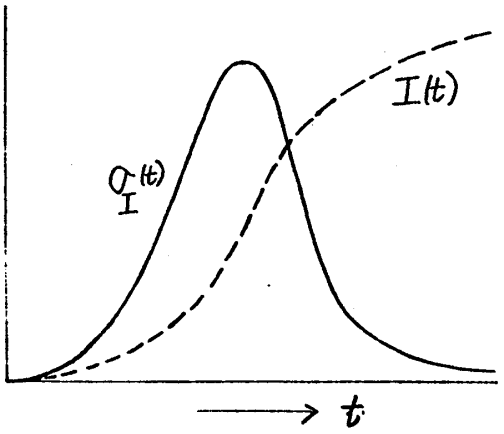

図　4　(a)

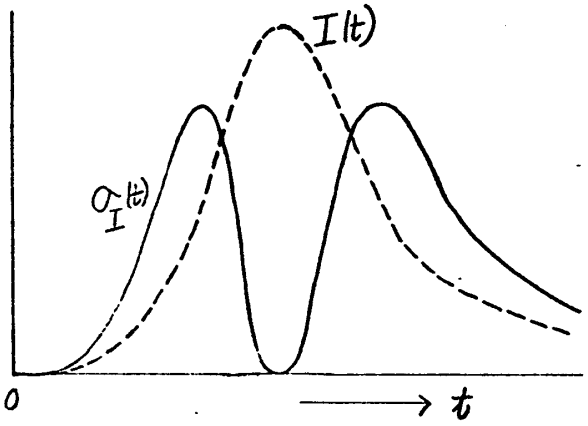

図　4　(b)

具体的な例が図4a，4b に示されている。図4a が最も典型的な，強度 I(t) とゆらぎの例である。図4b は超放射の強度とそのゆらぎの関係を与えている。[2),9)] 以上の結果は，実際に，あるモデルに基づいて実験結果を説明する際，大変役に立つものと期待される。

以上，Part Ⅰ と Ⅱ で，scaling theory の考え方と使い方の例を簡単に説明したがまだ研究途上のものもあって，説明が不充分なところが多かったと思う。詳しくは，文献 1)～4) を参照して下さい。

参 考 文 献

1) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. (submitted). See also Phys. Letters A (in press).

2) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. (submitted).

3) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. (Letters, submitted).

4) M. Suzuki, J. Stat. Phys. (submitted).

5) N. G. van Kampen, Can. J. Phys. **39** (1961), 551.

6) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51.

7) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **53** (1975), 1657; ibid **55** (1976) No.2 and No.3; J. Stat. Phys. **14** (1976) N0.2.

8) Y. Saito, thesis (University of Tokyo).

9) M. Suzuki, Physica.

Figure Captions

Fig. 1. σ: fluctuation, (a) initial regime, (b) scaling regime, (c) final regime

Fig. 2. Distribution function (11) : (a) $\tau = 0.02$, (b) $\tau = 0.2$, (c) $\tau = \tau_0 = \frac{1}{3}$, (d) $\tau = 0.5$, (e) $\tau = 1$, and (f) $\tau = 4$.

Fig. 3. $\epsilon - \delta$ plane.

Fig. 4. Typical intensities and fluctuations: dotted lines denote intensities and solid lines fluctuations.