Title	Oscillatory modeをもつ系のDynamic Scaling Law
Author(s)	池田, 博
Citation	物性研究 (1976), 26(1): 15-17
Issue Date	1976-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89144
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Oscillatory mode をもつ系の Dynamic Scaling Law

（2月16日受理）

金沢大・理 M.C. 池 田 博

Dynamic scaling law の定式化（または導出）にはいろいろな方法があるが,[1] その中で最も intuitive で単純なのは Kadanoff によって用いられた cell analysis[2] の方法である。これは多体系を，相関距離 ξ よりはずっと小さいが microscopic には大きい cell に分割し，自由エネルギーの性質などを使って critical exponent 間の関係を求めるものである。Kadanoff の仕事は static な場合だが，これを dynamic case に拡張し，さらに時間についての分割（すなわち，いわゆる粗視化）を行なえば dynamic scaling law が得られる[3]。それによると，なぜ critical slowing down[4] の exponent Δ が γ からずれているかが判明する（γ は磁化率の exponent，古典論[5] からはこの値が critical slowing down の exponent となる）。

ここでは cell analysis の dynamical な例として oscillatory mode をもつ系[6] における exponent 間の関係を求めてみる。考察する系は mode 間の coupling がない単純な系で，方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Omega^2 \frac{\delta H}{\delta \psi} + \eta \tag{1}$$

によって記述される。（これが有効である model については Ref. 6 を参照。）ここで ψ は order parameter であり，H はハミルトニアン，Ω はある定数，そして η は平均値ゼロのランダムな力を表わす。 exponent 間の関係式は緩和時間についての“scaling analysis”からも求めることができ,[7] その結果は，Δ を緩和時間の exponent として，

$$\Delta = \omega + \frac{1}{2}\gamma \tag{2}$$

である。ここで ω は scaling relation

$$\Omega \sim \varepsilon^{\omega} W(\varepsilon/\psi^{1/\beta}) \qquad \varepsilon = (T-T_c)/T_c \tag{3}$$

に現われる exponent である。（β は order parameter の exponent。）次に示す cell analysis によれば ω が何に由来するかが直観的にわかる。そのためには，系を一辺 L の cell に分割し，また，時間 t もある長さ L^z に分ける。すなわち方程式 (1) に現われる変数に対しては次のような変換を施す。[2),3)]

$$\psi \to \psi' = L^{d-x}\psi, \quad t \to t' = L^{-z} t, \quad H \to H' = L^d H \tag{4}$$

（d は系の次元。）さらに Ω も変換されると想像できる。なぜなら，cell 分割による短波長のゆらぎのくりこみの効果が Ω のような定数に現われてくると十分考えられるからである。[8)] よって，

$$\Omega \to \Omega' = L^{\omega/\nu}\,\Omega \tag{5}$$

として ω を定義しよう。（ν は相関距離 ξ の exponent）さて，式 (4), (5) によって方程式 (1) はダッシュの付いた変数（と定数）に変換され，cell を単位にして成立する運動方程式が得られるが，その新しい運動方程式が (1) と同じ形を持つことを要請する。[3)] するとランダムな力 η は，

$$\eta \to \eta' = L^{2\omega/\nu + x}\,\eta \tag{6}$$

と変換されなければならない。また，

$$z = \omega/\nu + (2x-d)/2 = \omega/\nu + \gamma/2\nu \tag{7}$$

である。ここで，$x = (\gamma/\nu - d)/2$ を用いた（この関係式は static な場合の自由エネルギーの考察により導出される[9)]）。z と $\triangle$ の関係は，式 (4) やさらに温度，磁場に対する変換則より導かれた動的な磁化率 $\chi(k, \omega')$ の考察により $\triangle = z\nu$ とわかる[10)]（簡単に言えば，z は特性振動数[1)] $\omega^c \sim \xi^{-z}$ の exponent にあたり，$\xi \sim \varepsilon^{-\nu}$ で ω^c

は緩和時間に反比例する量だからである)。したがって，式(7)は式(2) と同等である。ω という exponent は減衰系におけるのと同様に[3] 式(3)より Ω (または η)の scale 変換に対する性質から出てくる。

このように非常に intuitive で仮定の多い議論(例えば，式(4)のように変換がL の巾で行なわれること)から， scaling analysis による exponent 関係式(2)と同じものが導出できる。

参考文献

1) R. A. Ferrell, N. Menyhárd, H. Schmidt, F. Schwabl, and P. Szépfalusy, Ann. Phys. **47** (1968) 565.
   B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **177** (1969) 952.
   L. P. Kadanoff, Physics **2** (1966) 263.
2) L. P. Kadanoff et al., Rev. Mod. Phys. **39** (1967) 395.
3) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1257.
4) H. Yahata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **27** (1969) 1421.
   M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **43** (1970) 882.
5) L. Van Hove, Phys. Rev. **93** (1954) 1374.
6) Z. Ràcz and P. Rujàn, Amer. J. Phys. **43** (1975) 105.
7) M. E. Fisher and Z. Ràcz, preprint.
8) Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1712.
9) H. E. Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, (Oxford, England 1971)
10) M. Suzuki and G. Igarashi, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 1070.