講義ノート

超流動 ^{3}He の諸問題

東京教育大学理学部物理教室
宗　田　敏　雄

主に理論的観点から超流動 ^{3}He を考察して，実験的にもどの様な諸点を解決すべきかを結びに述べた。超流動 ^{3}He の理論の review として Leggett (文献15)の秀れたものがあるが，最近の進展を扱っていないので，この著述の§9以後はそれにない新らしい review である。

筆者を含む理論家によって予測された超流動 ^{3}He が実験的に発見されて，多々の新しい事実や法則が明らかにされたが，まだまだ日本の実験家に挑戦的な超流動 ^{3}He のエキゾチックな諸性質の解明が残されている。それを刺激する為にこれが多少とも役立てばと思っている。

これは，1976年3月29～31日に名古屋大学理学部で筆者が行った集中講義を訂正加筆したものである。

目　次

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜　。　〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

§1. 序

液体 ^{3}He は核スピンが½で質量が水素原子の３倍の原子からなる液体で沸点が 3.19 °K，臨界点は 3.33 °K で圧力は 875 mmHg である。^{3}He の原子間相互作用は極めて強いにも拘らず5m°K以上の低温では，その熱力学的磁気的性質がスピン $\frac{1}{2}$ を持つ理想フェルミ気体の性質に類似し，その輸送的性質は理想気体の粒子が弱く相互作用する場合と似ていることから，これをフェルミ液体という。液体 ^{3}He中の２個の原子の間に働く力は短距離で強い斥力で，遠距離で引力になっていることや，スピンが揃い易い強いパラマグネチックな相互作用による引力が存在する。極めて低温でスピン½ の電子対が金属中でイオンと電子との相互作用を媒介として引力になる場合，超伝導現象が出現するのと同様に，極低温で電荷を持たない ^{3}Heの原子対同志がある距離離れていると働く引力によって，通常のノーマルなフェルミ液体よりも低いエネルギー状態に原子対が凝縮して，超流動現象が出現してくることが予想される。この予想[1,2,2]は 1960 年になされ，実験的には 1972年に発見された[4] 超流動 ^{3}He である。具体的な理論の展開に入る前に，超流動への転移温度より高温では ^{3}He は強い相互作用をしている前述のフェルミ液体であり，そこでは分子場がかなり良い近似で成立するのでそれについて述べる。 Landau[5] によるとフェルミ粒子の集まりが相互作用をしていると，そのエネルギーは，

$$E = \sum_{p} \varepsilon(p)\,\delta n(p) + \frac{1}{2}\sum_{pp'}\{f(p,p')\,\delta n(p)\,\delta n(p') + \zeta(p,p')\,\sigma(p)\,\sigma(p')\} \tag{1.1}$$

ここに $\delta n(p)$ と $\sigma(p)$ は基底状態から励起された準粒子による密度とスピン密度のゆ

らぎを表わす。$\epsilon(p)$ はフエルミ面から測った運動エネルギーで,(1.1) を

$$E = \sum_{p} \{\tilde{\epsilon}(p)\delta n(p) + K(p)\sigma(p)\} \tag{1.2}$$

と書くと,

$$\tilde{\epsilon}(p) = \epsilon(p) + \sum_{p'} f(p,p')\delta n(p'),\ K(p) = \sum_{p'} \zeta(p,p')\sigma(p') \tag{1.3}$$

となる。ここで $f(p,p')$ と $\zeta(p,p')$ は相互作用を表わす積分核で,それを p と p′ の間の角度 θ のルジャンドル展開をして,フェルミ面での状態密度を $dn/d\epsilon = 2N(0)$ とすると,

$$2N(0)f(p,p') = F(p,p') = \Sigma_\ell F_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{1.4a}$$

$$2N(0)\zeta(p,p') = Z(p,p') = \Sigma_\ell Z_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{1.4b}$$

を得る。F_ℓ と Z_ℓ はランダウパラメーターと呼ばれるが,F_ℓ については F_0 と F_1 を,Z_ℓ については Z_0 だけをとる。$P = \sum_{p'} p'\delta n(p')$,$S = \hbar\sum_{p'} \sigma(p')$ とおくと,準粒子の真のエネルギーは,

$$\tilde{\epsilon}(p,\sigma) = \epsilon(p) + (2N(0))^{-1}(F_1/p_F^2)\,p\cdot P - \gamma\hbar\sigma\cdot\frac{(2N(0))^{-1}}{\gamma\hbar^2}Z_0\cdot S \tag{1.5}$$

と書ける。さて外から外部磁場 H_{ex} がかかると,準粒子に働く磁場は H_{ext} と,その廻りの他の準粒子が作る有効分子磁場 $H_{mol} = -\gamma^{-1}\hbar^{-2}(2N(0))^{-1}Z_0S(rt)$ なので,誘導されるスピン分極は,自由帯磁率を χ_0 と書くと,

$$S = \gamma^{-1}\chi_0(H_{ext} - \gamma^{-1}\hbar^{-2}(2N(0))^{-1}Z_0S) \tag{1.6}$$

となり,これを H_{ext} について解き,定義式 $S = \gamma^{-1}\chi H_{ex}$ によって帯磁率 χ を求めると,

$$\chi = \frac{\chi_0}{1+\gamma^{-1}\hbar^{-2}(2N(0))^{-1}Z_0\chi_0} = \chi_0/1+4^{-1}Z_0 = \frac{2^{-1}\gamma^2\hbar^2N(0)}{1+4^{-1}Z_0} \tag{1.7}$$

となる。一方準粒子の系の容器の壁が $\mathbf{v}$ で動いていると，準粒子には $-\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}$ のエネルギーのずれを受ける。従って系全体としての運動量 P は準粒子の密度を ρ^{n_0} とすると，1個の準粒子に働く他の準粒子の影響は加算することにより，(1.3)の準粒子の真のエネルギーより $\mathbf{p},\mathbf{v}_{mol}$ だけ少くなって，

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \varepsilon(p) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_{mol}\ , \qquad \mathbf{v}_{mol} = -2^{-1}N(0)^{-1}F_1/p_F^2\,\mathbf{P} \tag{1.8}$$

と書ける。つまり $\tilde{\varepsilon}(p) = \varepsilon(p) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{v}_{mol})$ と置けることより，

$$\mathbf{P} = \rho^{n_0}(\mathbf{v} - 2^{-1}N(0)^{-1}F_1/p_F^2\,\mathbf{P}) \tag{1.9}$$

となる。これを P について解いて，$\mathbf{P} = \rho^n\mathbf{v}$ と置くと，

$$\rho^n = \frac{\rho^{n_0}}{1 + F_1 p_F^2 2^{-1} N(0)^{-1}\rho^{n_0}} \tag{1.10}$$

と書くことが出来る。これが分子場の効果の入った準粒子の密度である。

密度やスピン密度のゆらぎによる分極は，前者では無衝突の零音波や通常の音波の励起を後者ではパラマグノンの励起を起す。液体 ^{3}He では強磁性に近い大きい常磁性を示すので，粒子の廻りに分子場の効果として同じ向きにスピンが揃う様にスピンの分極を誘起する。この分子場によるスピン分極密度を S(r,t) とすると，(1.6)式の上で述べた有効磁場が働く。また密度の方のゆらぎは，

$$V^{mol}_{density} = (2N(0))^{-1}F_0\ \delta\rho(r,t) \tag{1.11}$$

で与えられる。今外場 $\left\{\begin{matrix}\mathbf{H}_{ex}\\ V_{ex}\end{matrix}\right\}$ がかかって Landau 理論では表わせない様な速い変化の分極を起したとすると，それによる誘起されたスピン又は密度の変化は，

$$\delta\left\{\begin{matrix}S(r'\,t')\\ \rho(r'\,t')\end{matrix}\right\} = -\int dr\,dt\left\{\begin{matrix}\chi^0_{sp}\\ \chi^0_d\end{matrix}\right\}(r'-r, t'-t)\left\{\begin{matrix}\mathbf{H}_{ex}+\mathbf{H}_{mol}\\ V_{ex}+V_{mol}\end{matrix}\right\} \tag{1.12}$$

となる。ここに $\left\{\begin{matrix}\chi^0_d\\ \chi^0_{sp}\end{matrix}\right\}(r,t)$ は質量 m^* のフェルミ気体の自由な $\left\{\begin{matrix}\text{密度の応答率}\\ \text{帯　磁　率}\end{matrix}\right\}$ で (1.1)

を用いて計算すると次の様になる。今フェルミ面での粒子の速度を v_F とし，$s=\omega/q\,v_F$ とすると，

$$\left\{\begin{matrix}\chi_d^0\\ \chi_{sp}^0\end{matrix}\right\}(q,\omega)=\left\{\begin{matrix}1\\ \frac{1}{4}\gamma^2\hbar^2\end{matrix}\right\}\frac{N(0)}{2}f(s) \tag{1.13}$$

となる。(1.13) 式では f(s) は Lindhart 関数と呼ばれるもので，

$$f(s)=1-\frac{1}{2}s\,\ell_n\frac{1+s}{1+s}+\frac{1}{2}i\pi s\theta(1-s) \tag{1.14}$$

と表わされる。今 (1.12) を，

$$\delta\left\{\begin{matrix}S(r't')\\ \rho(r't')\end{matrix}\right\}=-\int dr\,dt\begin{matrix}\chi_{sp}\\ \chi_d\end{matrix}(r'-r,\ t'-t)\left\{\begin{matrix}H_{ex}\\ V_{ex}\end{matrix}\right\} \tag{1.15}$$

と書くと，真の $\left\{\begin{matrix}\text{帯 磁 率}\\ \text{密度応答率}\end{matrix}\right\}$ はフーリエ変換で解けて次の様になる。

$$\left\{\begin{matrix}\chi_d\\ \chi_{sp}\end{matrix}\right\}(q,\omega)=\left\{\begin{matrix}1\\ \frac{1}{4}\gamma^2\hbar^2\end{matrix}\right\}\frac{N(0)}{2}f(s)\Big/1+\left\{\begin{matrix}F_0\\ \frac{1}{4}Z_0\end{matrix}\right\}f(s) \tag{1.16}$$

液体 ^{3}He では F_0 が大きく (1.16) の pole が震音波の集団励起を与え，そこでは $\chi_d(q,\omega)$ は下の様に振舞い $c_0^2=\frac{1}{3}(1+F_0)v_F^2$ の音速を与える。

$$\chi_d(q,\omega)=\frac{N(0)}{2}\Big/[1+F_0-3s^2] \tag{1.17}$$

一方，真の帯磁率については，その real part と imaginary part の振舞いは第1図の様になる。特に，(1.16) 式を近似的に $\omega/q\,v_F$ を小さいとして求めると，

$$\chi_{sp}(q,\omega)=\frac{\frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2N(0)\left[1-\frac{1}{12}(q/k_F)^2\right]}{1+\frac{1}{4}Z_0\left[1-\frac{1}{12}(q/k_F)^2\right]} \tag{1.18}$$

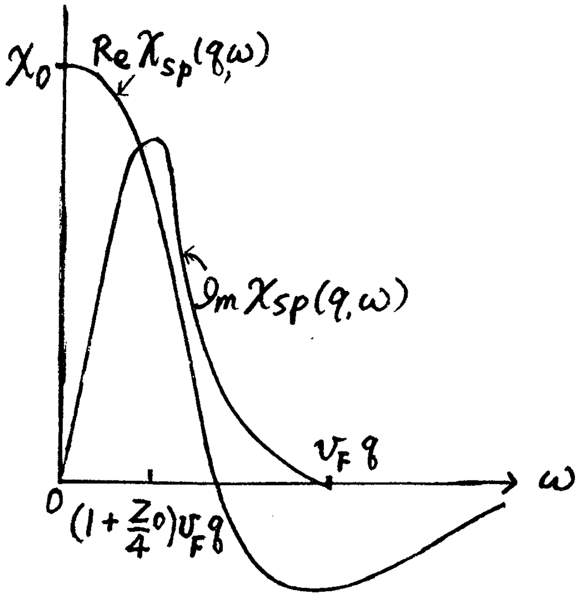
の如く振舞う。k_F はフェルミ面での波数の大きさである。

パラマグノン[6)]とは強磁性的なスピン密度のゆらぎを云い，その間に働く相互作用

として，接触型ポテンシャル $\frac{1}{2}(\bar{I}/N(0))\sigma_{\uparrow}\sigma_{\downarrow}$ がスピンの向きが反平行な，裸の質量を持つ粒子間に働くとする。ここに $\bar{I}$ はフェルミ面での相互作用の大きさを表わす。スピン密度のゆらぎによる帯磁率は $N_0(0)$ を裸の質量 m での N(0) とすると，

$$\chi = \chi_{sp}(0,0)$$

$$= \frac{1}{2}N_0(0)\ \gamma^2\hbar^2/1-\bar{I} \tag{1.19}$$



第1−1図　$\chi_{sp}(q,\omega)$ の実部と虚部の ω に対する振舞い

で (1.16) 式と類似の形で与えられる。一方 $2N(0) = 3N/p_F v_F = 3Nm^*/p_F^2$ (p_F はフェルミ運動量) と (1.7) の関係より，

$$1-\bar{I} = (m/m^*)(1+\frac{1}{4}Z_0) \tag{1.20}$$

の関係を得る。^{3}He での高圧下での帯磁率に (1.19) を合わせようとすると，$\bar{I}$ は 0.95 の大きさとなり，χ_{sp} の極大は，第1図を見ると解る様に $v_F q$ に較べてかなり小さい ω に近づく。このことにより ^{3}He の熱力学的，磁気的性質にパラマグノンが大きい寄与をすると考えられる。

§ 2.　^{3}He の分子間力

^{3}He の原子の対の間に働く相互作用は第二ビリアル係数や粘性の実験値と合う様なポテンシャルとして，

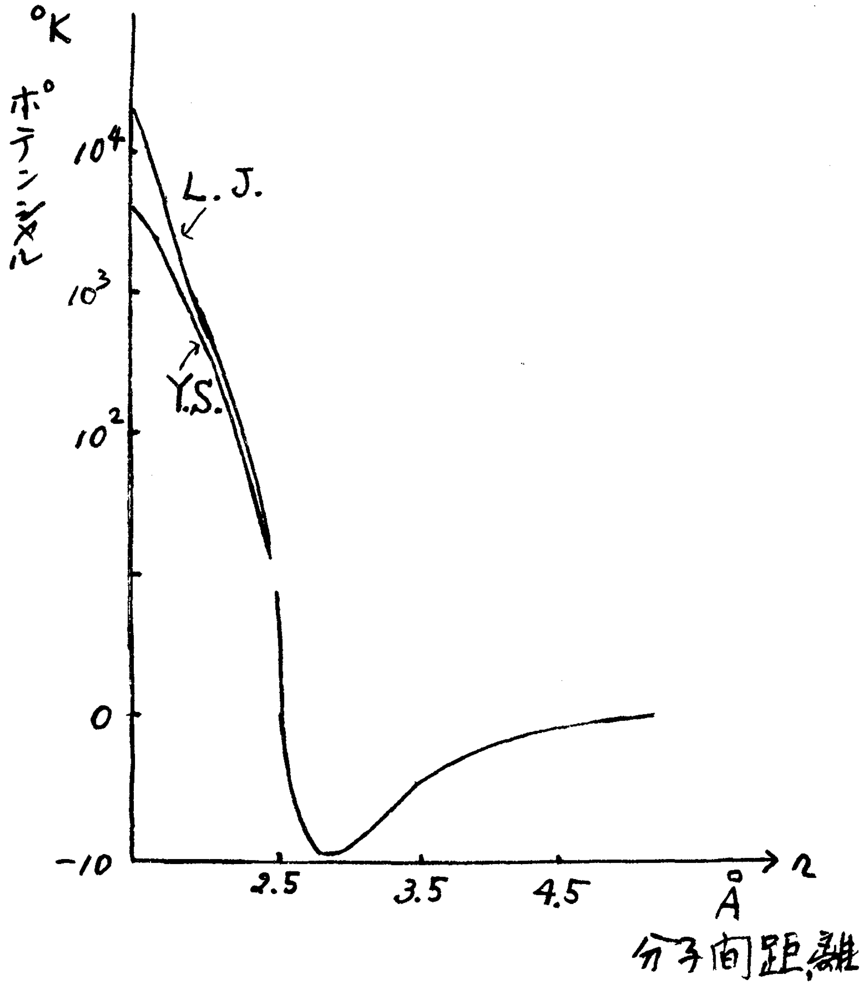
$$V(r) = V_0[(R/r)^{12} - (R/r)^6],\quad V_0 = 40.88^\circ K \quad R = 2.55A \tag{2.1}$$

$$V(r) = V_0[1200e^{-4.82r} - \frac{1.24}{r^6} - \frac{1.89}{r^8}],\quad V_0 = 7250^\circ K \quad r \text{ in } A \tag{2.2}$$

の Lenard-Jones [7] 型と Yntema-Schneider [8] 型があり，最近では Bruch-McGee [9] による Frost-Musllin 型のポテンシャル

$$V_{FM}(r)=\begin{cases}-12.54\left[1+8.01\left(1-2.98/r\right)\right]\exp\left(8.01\left(1-r/2.98\right)\right)\right]{}^{\circ}\mathrm{K}\ \ r\ \text{in}\ \mathring{\mathrm{A}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{for}\ \ r<3.5\mathring{\mathrm{A}} \\ -7250\left[1.41/r^6+3.82/r^3\right]{}^{\circ}\mathrm{K},\ \ r\ \text{in A}\ \ \text{for}\ \ r<3.5\mathring{\mathrm{A}}\end{cases}\tag{2.3}$$

があり，いづれも近距離で強い斥力で，原子間距離が 2.55 Å 位より引力に転じ 3 Å 位で約 10 °K のポテンシャル minimum を持つ箱型の長距離引力が働いている。



第 2 − 1 図　　^{3}He 粒子間に働く裸のポテンシャル

実際に液体中では，^{3}He の密度は高いので，そこで多重散乱や液体中の他の粒子の存在が相互作用を screen することと，殆ど Ferro に近い強い常磁性の液体 ^{3}He では強い斥力部分の交換相互作用によって同じ向きのスピンの粒子の間に強い引力，反対向きのスピンの粒子間には斥力が働きそれが有効相互作用となって現われる。前者[1]の多重散乱は，**i** と **j** の運動量が衝突し，**k** と **ℓ** の運動量で散乱して出てゆく ^{3}He の２原子について，次の形で有効相互作用 K が，

$$K_{ij,k\ell} = v_{ij,k\ell} + \sum_{m,n<p_F} v_{ij,mn} \frac{1}{E_k+E_\ell-E_m^*-E_n^*} K_{mn,k\ell} \qquad (2.4)$$

求められる。ここで E_k と E_ℓ は液体中を動く ^{3}He 原子のエネルギーで，E_m^*，E_n^* は同時に存在する他の粒子や励起の効果を取り入れた平均エネルギーで virtual な励起を表わす。これを計算機で求めて，相対運動量 $\mathbf{k} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}'=\mathbf{k}-\boldsymbol{\ell}$ の間の角運動量で分解して求めた，

$$(\mathbf{k}|K|\mathbf{k}') = \sum_\ell (2\ell+1)(k|K_\ell|k')\, P_\ell(\hat{k}k') \qquad (2.5)$$

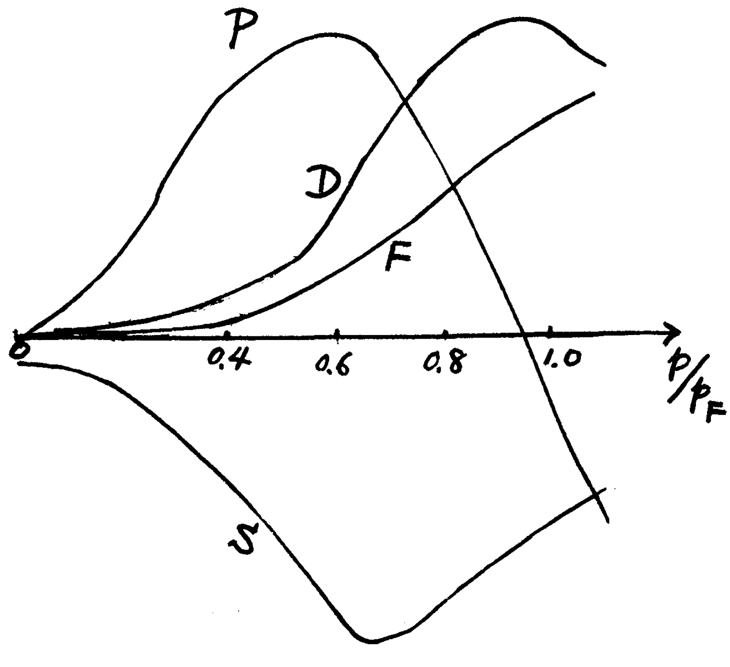
の値が 2−2 図に表わされており，$|k| = |k'|$ で $k = k_F$ での値は

$$V_S = 233\ {}^\circ K\ (A)^3$$

$$V_P = 60\ {}^\circ K\ (A)^3$$

$$V_D = -78\ {}^\circ K\ (A)^3$$

で与えられる。これによると D 波以上の時に k_F で引力になっていることが解るので，S 波は強い斥力でこれは排除する，一方常磁性的な相互作用は最近接での斥力が交換相互作用として働き，その多体的な繰返えしが，相互作用を相



第 2−2 図　有効相互作用 K の部分波の２粒子の相対運動量への依存性

対角運動量で展開した時に平行スピン対の間には引力として $\ell=1,3,5,\cdots$ に現われ，反平行スピン対間には斥力として $\ell=2,4,5,\cdots$ として表われる。前述の多重散乱による有効相互作用によると，それによる波動関数の最大値が原子間の距離 $r\sim\ell/k_F$ に現われる筈なので，排除される $\ell=0$ は最近接の強い斥力部分によることが解るので，$\ell=1,2,3,\cdots$ による有効相互作用は多重散乱と常磁性的な交換相互作用を加えることで正しいことが解る。もっと定量的には次の様に調べる。

液体 ^{3}He 中では粒子に (1.5) 式より分子場 $\mathbf{H}_{mol}=\gamma^{-1}\hbar^{-2}(2N(0))^{-1}Z_0\,\mathbf{S}(r,t)$ が働くので，相互作用エネルギーは $-\gamma\hbar\sigma'\mathbf{H}_{mol}=(\gamma\hbar)^{-1}\dfrac{Z_0}{2N(0)}\sigma'\mathbf{M}(r',t)$ と書け，(r,t) に存在する 1 粒子のスピンによる磁化は

$$\mathbf{M}=\gamma^2\hbar^2\int\chi_{sp}(r'-r,t'-t)\,H_{mol}(r,t)\,d^3r\,dt=-\chi(r'-r,t'-t)\,\gamma\hbar\frac{Z_0\sigma}{2N(0)}$$

となることより，

$$V_{eff}(r'-r,t'-t)=-\frac{Z_0^{\,2}}{(2N(0))^2}\,\sigma\cdot\sigma'\,\tilde{\chi}_{sp}(r'-r,t'-t) \qquad (2.5)$$

と書ける。ここで $t'-t<0$ に対し $\chi_{sp}(t'-t)=0$ に留意すると，

$$\tilde{\chi}(r'-r,t'-t)=\frac{1}{2}[\chi_{sp}(r'-r,t'-t)+\chi_{sp}(r-r',t-t')] \qquad (2.6)$$

で (2.6) をフーリェ変換で表わすと (1.16) より，

$$V_{eff}(q,\omega)=-\left[\frac{Z_0}{2N(0)}\right]^2\sigma\cdot\sigma'\,\mathrm{Re}\,\chi_{sp}(q,\omega)=-\frac{1}{8}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}'Z_0^2}{N(0)}\,\mathrm{Re}\,\frac{f(s)}{1+\dfrac{Z_0}{4}f(s)} \qquad (2.7)$$

で与えられる。第1—1図に見られる様に $\omega/q\to0$ で $f(s)$ は 1 になり $q/\omega\to0$ で $f(s)$ は 0 になる。一方 (1.1) にある直接相互作用の $\dfrac{1}{2N(0)}(F_0+Z_0\sigma\cdot\sigma')$ の項に較べて Z_0 が -3 なのでかなり大きく $\sigma\cdot\sigma'=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & (\text{triplet})\\ -\dfrac{3}{4} & (\text{singlet})\end{cases}$ の符号より，平行スピンの方に引力が働き反平行（シングレット）スピンの ^{3}He 間には斥力が働く。[10] 直接相互作用と間接相互作用のどちらが効いているかについては，前者で交換される粒子の エネ

ルギーは kT_c のオーダーで約 $10^{-3}\,\varepsilon_F$ で一方 cut off energy $\hbar cq$ は $c = v_F$ (密度波), $v_F(1+\frac{1}{4}Z_0)$ (パラマグノン) を代入すると $0.1\,\varepsilon_F$ の大きさなので $\omega \to 0$ の部分が効いていることがわかる。従って殆ど Veff は常数とおける。 triplet については Veff をルジャンドルで展開して $\ell = 1, 3$ が singlet の $\ell = 2, 4$ よりも引力で間接力の方が増大して効いていることが解る。現在の所 V_ℓ をきめることが難しいので, T_c より逆にきめている。

§ 3. 対 生 成

今フェルミ面の外に 2 個の粒子が励起されていて, その間に引力が働いていると, 重心系の運動量が 0 で相対運動量が 2k の 2 粒子波動関数 ψ_k の従う方程式は, 次の様になる。

$$(2\varepsilon_K - E)\psi_k = -\Sigma_{k'} V_{kk'}\psi_{k'} \tag{3.1}$$

ここで $\varepsilon_K = (\hbar^2/2m)(k^2 - k_F^2)$ である。(2.5) の様に $V_{kk'}$ を部分波に展開し,

$$V_{kk'} = \Sigma_\ell (2\ell+1) V_\ell(k,k') P_\ell(\cos\theta) \tag{3.2}$$

と分け, 波動関数も次の様に直す。

$$\psi_k = \sum_\ell \psi_\ell(k) Y_{\ell m}(\hat{k}) \tag{3.3}$$

すると (3.1) 式は 2 粒子がフェルミ面の外と云う条件より $k, k' > k_F$ の下で, 下の様にする。

$$(2\varepsilon_K - E)\psi_\ell(k) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_F}^{\infty} 4\pi k'^2 V_\ell(k,k')\psi_\ell(k')\,dk' \tag{3.4}$$

今引力をフェルミ運動量 k_F の近傍に箱型にとり, その大きさを V_ℓ とし, その領域 $k_F - \triangle k \leqq k, k' \leqq k_F + \triangle k$ のエネルギーの巾で $\triangle E = \frac{\hbar}{m} k_F \triangle k$ とすると, (3.4) は,

$$(2\varepsilon_K - E)\psi_\ell(k) = -\frac{1}{2} V_\ell\, N(0) \int_{-\triangle E}^{\triangle E} \psi_\ell(k') \tag{3.5}$$

となる。ここに N(0) はフェルミ面での状態密度である。これは $V_\ell<0$ なら，$E<0$ の解をいつでも持つ。即ち，

$$\psi_\ell(k) = A/(2\epsilon_K - E) \tag{3.6}$$

とすると，

$$1 = -N(0)V_\ell \int_{-\triangle E}^{\triangle E} \frac{d\epsilon_{K'}}{\epsilon_{K'}-E} = -\frac{1}{2}N(0)V_\ell \,\ell n\, \frac{2\triangle E - E}{-E} \tag{3.7}$$

今 $N(0)V_\ell \ll 1$ で，

$$E_\ell = -2\triangle E \exp\left(-\frac{2}{N(0)|V_\ell|}\right) \tag{3.8}$$

の束縛状態の解を持つ。即ちフェルミの海の状態よりも，フェルミ面より2粒子を 励起して運動量0の対云わゆる Cooper 対を作る方が多体の系は安定になる。これを Cooper 不安定性[11]と云う。

実際は粒子が沢山存在するので，新しい安定な基底状態は上記の様な対をフェルミ統計を満足させる様に如何に多く生成してエネルギーを低くさせるかと云うことにある。[1] 実際に基底状態 Ψ_0 としては運動量 k と $-$k の対から成る状態とそうでない状態の重ね合わせでエネルギーが最小になる状態を求める。今運動量 **k** スピン σ （これを k と書く）の ^{3}He を創ったり消したりする演算子を c_k^+, c_k とすると，この Ψ_0 は次の様に書ける。

$$\Psi_0 = \prod_k (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+)\Phi_0 \tag{3.9}$$

ここに Φ_0 は真空である。ここに u_k と v_k は夫々の状態の確率で $u_k^2 + v_k^2 = 1$ と規格化されている。今系の相互作用エネルギーが，

$$H = -\sum_\ell (2\ell+1) V_\ell c_k^+ c_{-k}^+ c_{-k'} c_{k'} P_\ell(\cos\theta_{\hat{k}\hat{k}'}) \tag{3.10}$$

で与えられるとする。V_ℓ としては最大の引力のものを選ぶ。又対のスピンとしては ℓ が奇数であると平行で ℓ が偶数だと反平行のものを選ぶのは対の波動関数の空間対称性が Pauli 原理を満す為で，一方対のフェルミ面から測った運動エネルギーの期

待値が $2\epsilon_K|v_k|^2$ となることから基底状態のエネルギーは (3.10) の (3.9) による期待値を計算して,

$$E_0 = \Sigma_k 2\epsilon_K|v_k|^2 - \sum_{kk'}(2\ell+1)V_\ell\, u_k^* v_k\, u_{k'} v_{k'}^* P_\ell(\hat{k}\hat{k}') \tag{3.11}$$

となる。今, 次の量$\triangle_k$ と E_k を

$$A_k = u_k^* v_k = \triangle_k/2E_k \tag{3.12}$$

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2}(1-\epsilon_K/E_k) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{1-4A_K^* A_K}}) \tag{3.13}$$

となる様に導入する。(3.11) から $u_k^* v_k \propto Y_{\ell m}(\hat{k}k_0)$ でないと相互作用のエネルギーは 0 になることが解かる。(3.11) は次の形になる。

$$E_0 = \Sigma_k \epsilon_K(1-\epsilon_K/E_k) - \Sigma V_\ell (\frac{\triangle_k}{2E_k})(\frac{\triangle_{k'}^*}{E_{k'}})(2\ell+1)P_\ell(\hat{k}k') \tag{3.14}$$

ここで, $E_k \equiv (\epsilon_K^2+\triangle_k^2)^{\frac{1}{2}}$ である。今 (3.11) を A_k^* について極小にすると,
$\frac{\epsilon_K A_K}{\sqrt{1-4|A_K|^2}} = \sum_{k'}(2\ell+1)A_{K'}P_\ell(\hat{k}k')$ となり, (3.12) から,

$$\triangle_k = \sum_\ell (2\ell+1)V_\ell P_\ell(\hat{k}k')$$

$$A_{k'} = \sum_\ell (2\ell+1) V_\ell P_\ell(\hat{k}k')\frac{\triangle_{k'}}{2E_{k'}} \tag{3.15}$$

のギャップの方程式と次の E_0 の式が求められる。

$$E_0 = \Sigma_k(\epsilon_k - \frac{\epsilon_k^2}{E_k} - \frac{|\triangle_k|^2}{E_k}) = N(0)(\triangle E)^2\int\frac{d\Omega}{4\pi}\{1-[1+(\frac{\triangle k}{\triangle E})^2|f(\Omega)|^2]^{\frac{1}{2}}\} \tag{3.16}$$

ここで (3.15) より A_k の存在する範囲が V_ℓ の存在する範囲と一致して$\triangle_k$ の k はその運動量の領域で大きさ k_F で代表され, k の角度依存性だけを$\triangle(k_F)f(\Omega)$の形で持つものとする。また基底状態からの一個別励起の準粒子状態への励起は$\langle\Psi_0|c_K H c_K^+|\Psi_0\rangle$ を計算しても求められるが, 簡単にその運動エネルギーから基底状態の対の

エネルギーを差引くことにより，

$$\varepsilon_k-(\varepsilon_K-\frac{\varepsilon_K^2}{E_k}-\frac{\triangle_k^2}{E_k}) = E_k = \sqrt{\varepsilon_K^2+|\triangle_k|^2} \tag{3.17}$$

と求められる。ここでエネルギーギャップがある方向依存性 $f(\Omega_n)$ を持つことである。そして $\triangle \ll \triangle E$ ならば基底状態のエネルギーが，ノーマルのフェルミ面のエネルギーより，

$$E_0 = -\frac{1}{2}N(0)\triangle^2\int\frac{d\Omega}{4\pi}|f(\Omega_n)|^2 \tag{3.18}$$

だけ低いことが解る。

$f(\Omega_n)$ は一般に最大の引力を与える ℓ を ℓ_0 とすると，次の様になり，

$$f(\Omega_n) = \Sigma\, C_{\ell_0 m}\, Y_{\ell_0 m}(\underset{\sim}{n})$$

ここに $\underset{\sim}{n}$ は運動量空間での単位ベクトル $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ で，ある基準 $\mathbf{k}_0/|\mathbf{k}|$ より測った立体角が Ω_n であり，従ってギャップは $f(\Omega_n)$ の nodeのある方向で零になることが特長的である。

§ 4. 熱力学的性質[14)]

有限温度の場合は基底状態の Cooper 対の他に，それがこわれて出来た個別励起状態と，基底状態の対と直交している励起状態の Cooper 対の状態のこれらの重なり，つまり積で表わすことが出来る。個別励起状態の持つエネルギーは基底状態のCooper対のそれから測って $E_k = [\varepsilon_K^2+|\triangle_k|^2]^{\frac{1}{2}}$ であることは § 3で述べた。励起状態の Cooper 対の状態は $\prod_k(v_k-u_k c_k^+ c_{-k}^+)\Phi_0$ で与えられるので，このエネルギー期待値は $\sum_k E_k^{(e)} = \sum_k\{2\varepsilon_K u_k^2+\frac{|\triangle_k|^2}{E_k}\} = \sum_k\{\varepsilon_K(1+\frac{\varepsilon_K}{E_k})+\frac{|\triangle_k|^2}{E_k}\}$ の関係から 基底状態の Cooper 対のエネルギーとの差は $E_k^{(e)}-E_k^{(g)} = 2(\varepsilon_K^2+|\triangle_k|^2)/E_k = 2E_k$ で与えられることが解る。これを用いて各々の状態の占有確率は基底状態のCooper対を基準に取り規格化因数をNとすると，$P_k^{(g)} = N^{-1}$，$P_k^{(s)} = N^{-1}e^{-\beta E_K}$ 及び $P_k^{(e)} = N^{-1}$

$e^{-2\beta E_K}$ となり，対がこわれた２個の個別励起になることを考え合わせると，$N = 1 + e^{-\beta E_K} + e^{-2\beta E_K}$ となる。又 $f_k = (1+e^{-\beta E_K})^{-1}$ とすると夫々は $(1-f_k)^2$，$f_k(1-f_k)$，f_k^2 で与えられるので，エントロピーは，$S = -2k\sum_k [f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k)]$ となる。

さて有限温度での任意の状態の試行関数を，

$$\Psi = \Pi\ c_{k0}^{+}\ \Pi_k^{(e)}(v_k - u_k\ c_k^{+}\ c_{-k}^{+})\ \Pi_k^{(g)}(u_k + v_k\ c_k^{+}\ c_{-k}^{+})\Phi_0 \tag{4.1}$$

と取ってフェルミ面から測った運動エネルギーと相互作用エネルギー（3.10）の期待値はポテンシャルエネルギーが Cooper 対だけに寄与することを考えると，演算子 $c_k^{+}\ c_{-k}^{+}$ に対し，基底状態 Cooper 対は $u_k^*\ v_k$，励起状態の Cooper 対は $-u_k^*\ v_k$ と行列要素がなる。従って系のエネルギー E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_k [\ \epsilon_K P^{(g)}(1-\frac{\epsilon_K}{E_K}) + 2\ \epsilon_K P_k^{(s)} + \epsilon_K P_k^{(e)}(1+\frac{\epsilon_K}{E_K})] \\ &- \sum_\ell \sum_{kk} P_\ell(\cos\theta_{\hat{k}k'})[u_k^* v_k(P_k^{(g)}-P_k^{(e)})][u_{k'}^* v_{k'}(P_{k'}^{(g)}-P_{k'}^{(e)})] \\ &= 2\sum \epsilon_K[\ f_k + (1-f_k)v_k^2] - \sum\ V_\ell\ P_\ell\ (\cos\theta_{\hat{k}\hat{k}'}) \\ &\quad u_k^*\ v_k(1-2f_k)\ u_{k'}^*\ v_{k'}\ (1-2f_{k'}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。それ故 Helmholtz の自由エネルギーは

$$\begin{aligned} F &= 2\sum_k \epsilon_K(\ f_k + (1-2f_k)|v_k|^2) - 4\pi\sum_{\ell,m} V_\ell\,|\sum_k Y_{\ell m}^*(\hat{k}k_0)u_k^* v_k(1-2f_k)|^2 \\ &- 2kT\sum_k [\ f_k\ \ln\ f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

で与えられる。今 $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ の規格化条件に注意して v_k^* について変分すると

$$2\epsilon_K\ u_k^*\ v_k = 4\pi\sum_{k'} V_\ell\ Y_{\ell m}^*(\hat{k}k_0)\ u_{k'}^*\ v_{k'}(1-2f_{k'}) \tag{4.4}$$

ここで右辺を $\triangle_k(\Omega)$ とおくと，$E_k = [\ \epsilon_K^2 + |\triangle_k(\Omega)|^2]^{\frac{1}{2}}$ に対し，

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_K}{E_K}\right), \quad |v_k|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_K}{E_K}\right) \tag{4.5}$$

が出る。更に (4.3) を f_k について変分を取ると $f_k = (1 + e^{\beta E_k})^{-1}$ も出る。

$\triangle_k(\Omega)$ の定義式が有限温度でのエネルギーギャップを与える式となる。

$$\triangle_k(\Omega) = 4\pi \sum_{\ell} V_{\ell} \frac{Y^{*}_{\ell m} \triangle_{k'}(\Omega)}{E_{k'}} \tanh \frac{\beta E_{k'}}{2} = \triangle f(\Omega) \tag{4.6}$$

転移温度をきめる式は (4.6) で$\triangle = 0$ とすると (分母のそれを 0 とし, 分子は両辺で約す)

$$1 = V_{\ell} \sum_{k} \frac{1}{\varepsilon_k} \tanh \frac{\beta_c \varepsilon_K}{2} \tag{4.7}$$

が出る。ここに V_{ℓ} は最大の引力を与える ℓ 番目の部分波のポテンシャルで,

$$k\, T_c = 1.14\, \triangle E\, \exp\left\{-[N(0)\, V_{\ell}]^{-1}\right\} \tag{4.8}$$

によって転移温度がきまる。$\triangle E$ は Fermi 面内の Cooper 対の存在するエネルギー領域の巾である。

有限温度でのギャップの振舞いは

$$\triangle(\Omega) \simeq \triangle(T)\, f(\Omega) \qquad f(\Omega) = \sum C_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\Omega) \tag{4.9}$$

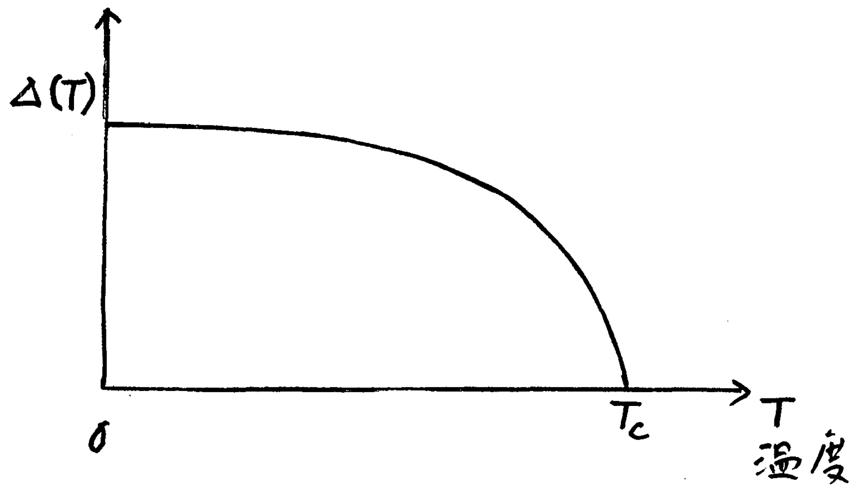
とした時に, $\triangle(T)$ は BCS の場合と同様に, 第 4 − 1 図の様な振舞いとする。

ヘルムホルツの自由エネルギーが解けると, 色々な熱力学的な量が求まるが, 特に定積比熱についてみると,

$$C_V = T(dS/dT)_V = \sum_k k_B \frac{1}{2} \beta^2 \left[E_k + \beta\left(\frac{dE_k}{d\beta}\right)\right] E_K\, \mathrm{sech}^2 \frac{\beta E_k}{2} \tag{4.10}$$

(k_B : ボルツマン常数) (4.10)

低温では (4.9) の $f(\Omega)$ がその角度 θ, φ に対して node の次数が n だと角度の積分から $T^{(\frac{2}{n})+1}$ になり BCS[13] の様に $f(\Omega) = 1$ の場合には指数関数的に 0 に近づく。



第４−１図　　エネルギー・ギャップ△(T)の
温度依存性

また，T_c での比熱の跳びは，

$$\triangle C_V = \frac{1}{2} k_B \beta_c^3 \sum_k E_k \left(\frac{dE_k}{d\beta}\right) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \beta_c E_k$$

$$= N(0)\left(-\frac{d\triangle^2(T)}{dT}\right)_{T_c} \qquad (4.11)$$

で与えられ，今ギャップが後で述べるG−L 方程式に従い，

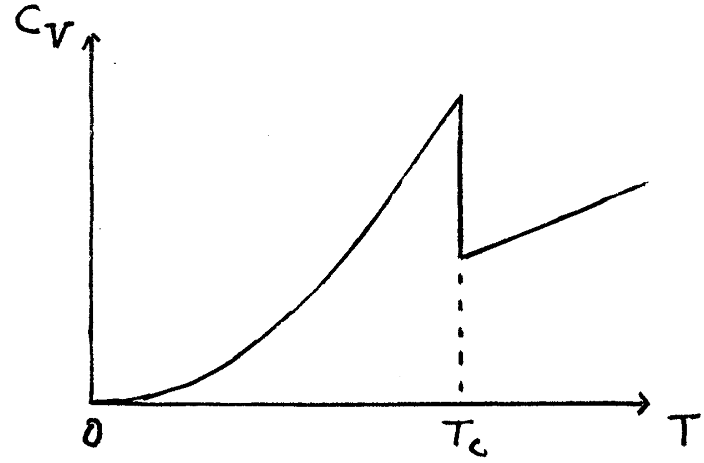
$$\triangle^2(T) = \frac{9.3}{\int |f(\Omega)|^4 \frac{d\Omega}{4\pi}} (1 - T/T_c) \qquad (4.12)$$

で与えられると，

$$(\triangle C_V/C_n)(T_c) = \frac{3\times 9.3}{2\pi^2}\left(1/\int |f(\Omega)|^4 \frac{d\Omega}{4\pi}\right) = 1.42/\int |f(\Omega)|^4 \frac{d\Omega}{4\pi} \leqq 1.42 \qquad (4.13)$$

となる。

また帯磁率[15)]については，平行スピン対からばかりなる場合は対スピンの方向に磁場がかかっていると，エネルギーを上向きと下向きのスピン対の粒子の化学ポテンシャルを夫々 $\mu_0 \pm \gamma H$ (μ_0 は磁場のない時の化学ポテンシャル，γ は ^{3}He の核のgyromagnetic ratio ）から測ると，エネルギー利得が無く，正常フェルミ液体の値と同じ $\chi=\dfrac{\gamma^2\hbar^2}{2}N(0)$ になってしまう。反平行スピンを含む場合は弱磁場 H が系に働いた時，基底対と励起対は束縛状態にいるので変化を受けないで，対のこわれた個別励起状態は $\varepsilon_{K\uparrow}=\varepsilon_K-\dfrac{1}{2}\mu H$ と $\varepsilon_{K\downarrow}=\varepsilon_K+\dfrac{1}{2}\mu H$ （$\mu=\gamma\hbar$）と変化を受けるので，その各々の状態にいる確率が $P_\uparrow=e^{-\beta(E_k-\frac{1}{2}\mu H)}/N$ と $P_\downarrow=e^{-\beta(E_k+\frac{1}{2}\mu H)}/N$ となり，規格化因子 N は H の 1 次の次数では変化を受けないことを考慮すると，磁化 M は，



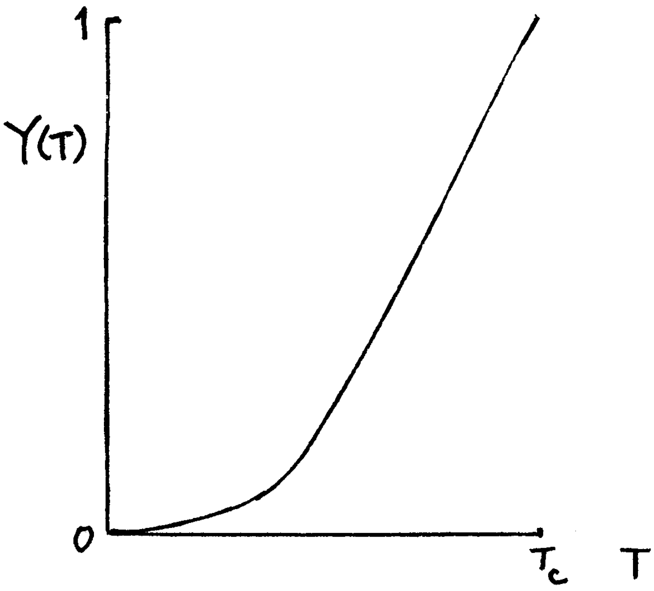
第 4 － 2 図　定積比熱 C_V の温度依存性

$$M=\frac{1}{2}\mu\Sigma\,(P_\uparrow-P_\downarrow)=\frac{1}{2}\mu^2 H\sum_k\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\beta E_K \tag{4.14}$$

となり，故に帯磁率 χ^0 は下式で与えられ，そこに表われる芳田関数 Y(T) は第 4 － 3 図の様に振舞う。

$$\chi^0=\frac{1}{2}\mu^2 N(0)\,Y(T) \tag{4.15}$$

$$Y(T)=\int\frac{d\Omega}{4\pi}Y(\mathbf{n},T)=\int\frac{d\Omega}{4\pi}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{sech}^2\frac{\beta E_K}{2} \tag{4.16}$$



第 4 － 3 図　Y(T) の温度依存性

分子場の効果を入れると帯磁率は次の様になる。

$$\chi(T) = \frac{1}{2}\mu^2 N(0)\ Y(T)/1+\frac{1}{4}Z_0\ Y(T) \tag{4.17}$$

超流動中のノーマルの準粒子の密度を求める。今壁が一様な速度 $-\mathbf{v}$ で動いていると，個別励起粒子が壁と相互作用を $-\sum_k \hbar\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ の形で行う。 対の方は静止していて壁とは相互作用しないとすると個別励起粒子による全運動量 P は各々が $E_k-\hbar\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ と $E_k+\hbar\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ になることから，

$$P = \sum_k hk(P^{(s)}(\hbar k) - P^{(s)}(-\hbar k)) = \sum_k \hbar^2 k\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\frac{1}{2}\beta\ \mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\beta E_k \tag{4.18}$$

$P_i = \sum_j \rho_{ij}^{n_0} v_j$ と書くと，

$$\rho_{ij}^{n_0} = \sum_k \hbar^2 k_i k_j \frac{1}{2}\beta\ \mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\beta E_K = \frac{1}{3}\hbar^2 k_F^2(dn/d\epsilon)Y_{ij}(T) = Nm^* Y_{ij}(T) \tag{4.19}$$

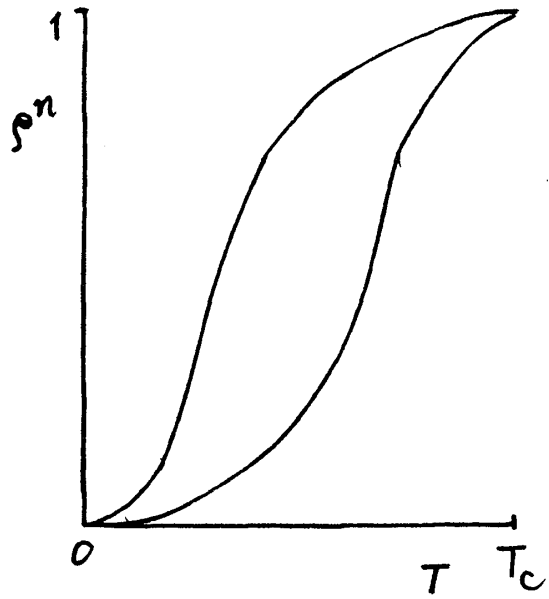
ここに，$Y_{ij}(T)$ は

$$Y_{ij}(T) = 3\int\frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j \int_0^\infty d\epsilon_K \frac{1}{2}\beta\ \mathrm{sech}^2\frac{1}{2}\beta E_K = 3\int\frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j\ Y(\mathbf{n};T) \tag{4.20}$$

となる。

そして $\rho_{ji}^{n_0}$ の i j の方向により大きさが異なり，$\rho_{xx}^{n_0}$，$\rho_{yy}^{n_0}$，$\rho_{zz}^{n_0}$ は大きかったり小さかったりする様子は右図の様である。分子場の効果を入れると，

$$\rho^n = \frac{N m^*\ \rho^{n0}}{1+2^{-1}F_1 p_F^{-2} N(0)^{-1}\rho^{n0}} \tag{4.21}$$



第4－4図 ρ^n の温度依存性

$$= N m^* \Upsilon(T)/1+\frac{1}{3} F_1 \Upsilon(T) \tag{4.22}$$

となる。ここで $2N(0) = \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_{p_F} = \frac{2}{(2\pi h)^3} \frac{4\pi\ p_F^2}{(d\varepsilon/dp)_{p_F}\ p_F} = \frac{3N}{p_F\ v_F} = \frac{3Nm^*}{p_F^2}$ を用いた。

T_c 近傍ではエネルギー・ギャップ$\triangle_k(\Omega)$ が小さいので，云わゆるG−L 展開と呼ばれる，それを自由エネルギーの展開パラメーターとした展開方法がある。 例えば (4.3) 式は下で与えられるが，

$$F = \sum_k \{ \varepsilon_K - E_k + (|\triangle_k|^2/E_k) \tanh \frac{1}{2} \beta E_k - 2\beta^{-1} \ell n\ (1+e^{-\beta E_k})\}$$
$$- \sum_{kk'} V_\ell P_\ell (\hat{k}k') [(\triangle_k/2E_k) \tanh \frac{1}{2} \beta E_k]$$
$$[\triangle^*_{k'}/2E_{k'} \tanh \frac{1}{2} \beta E_k)] \tag{4.23}$$

これを$\triangle_k$ が小さいとして展開するのだが，ポテンシャル項の違った ℓ の混合を避ける為に，オーダー・パラメーターとして，

$$\Psi(\mathbf{n};t) = N(0) \triangle f(\Omega_n) \int_{-\triangle E}^{\triangle E} \frac{\tanh \frac{1}{2} \beta E_k}{2E_k} d\varepsilon_K \tag{4.24}$$

を定義する。ここに $t = 1-T/T_c$ で $\mathbf{n}$ は $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ である。Ψ と $\triangle$ は (4.24) の展開より，

$$\Psi = A(T) \triangle(\mathbf{n}) + B(T) |\triangle(\mathbf{n})|^2 \triangle(\mathbf{n}) + O(\triangle^3) \tag{4.25}$$

により結ばれており，ここに $A(T) = N(0)\ \ell n\ (1.14\beta\triangle E)$ で $B(T) = N(0) \int_{-\triangle E}^{\triangle E} \frac{d}{d(\varepsilon^2)} \frac{\tanh \frac{1}{2} \beta_c \varepsilon}{2\varepsilon} d\varepsilon$ で与えられ，特に $B(T_c) = -\frac{7}{8} \zeta(3)\ N(0)\ (k_B T_c)^{-2}$ である。さて F をΨで表わすと，ノーマルの自由エネルギーを F_0 とすると，

$$F = F_0(T) + (A(T))^{-1} \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Psi(\mathbf{n})|^2 + \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi} V(\mathbf{n},\mathbf{n}') \Psi(\mathbf{n}) \Psi^*(\mathbf{n}')$$

$$+\frac{1}{2}\{|B(T)|/|A(T)|^4\}\int\frac{d\Omega}{4\pi}|\Psi(\mathbf{n})|^4+O(\Psi^5) \tag{4.26}$$

となる。$\int(d\Omega/4\pi)|Q(\Omega)|^2=1$ の $Q(\Omega)$ を用いて，$\Psi(\mathbf{n},t)=\Psi(t)\cdot Q(\Omega_n)$ と書くと時に，引力の最大の大きさを与える ℓ_0 について $A^{-1}(T_c)+V_{\ell_0}=0$ となる様に T_c をきめると，F は次の様になる。

$$F(t)=\alpha|\Psi(t)|^2+\frac{1}{2}\beta\kappa|\Psi(t)|^4 \tag{4.27}$$

ここに α と β はパラメーターで κ は常数で，

$$\alpha(t)=A^{-1}(T)-A^{-1}(T_c),\quad \beta=-A^{-4}(T_c)B(T_c)>0,\quad \kappa=\int\frac{d\Omega}{4\pi}|Q|^4$$

により与えられる。(4.21) を$\Psi(t)$ について極小にすると，

$$|\Psi(t)|^2=-\frac{\alpha}{\kappa\beta} \tag{4.28}$$

となる。Ψ が$\triangle$ の関数で T_c で消えることから $\alpha=a(T/T_c-1)$ と取ることが出来る。これより，

$$F(t)=F_0(t)-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\kappa\beta}t^2 \tag{4.29}$$

と書けることが解る。

一方 F はまた異方的超伝導体への G−L[16] 展開の拡張として$\triangle(n)$ で書くと

$$F=N(0)\left\{-(1-T/T_c)\int\frac{d\Omega}{4\pi}|\triangle(\mathbf{n})|^2+\frac{7}{16}\zeta(3)\frac{1}{(\pi k_BT_c)^2}\int\frac{d\Omega}{4\pi}|\triangle(\mathbf{n})|^4\right\} \tag{4.30}$$

となる。今これを$\triangle(\mathbf{n})$ について極小にすると，$\triangle(\mathbf{n})=\triangle(T)f(\Omega_n)$ $(\int d\Omega/4\pi\ |f(\Omega)|^2=1)$ と書くと，その極小条件より，

$$\triangle(T)=3.06\ (\kappa')^{-\frac{1}{2}}(k_B T_c)^{-1}(1-T/T_c)^{\frac{1}{2}}\ \text{for}\ T<T_c \tag{4.31}$$

が求まる。ここに $\quad=\int\frac{d\Omega_n}{4\pi}|f(\Omega_n)|^4$ で $3.06=\left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\right)^{\frac{1}{2}}$ である。(4.31) 式は比熱の跳びの計算で用いた (4.12) 式である。

§ 5. Triplet pairing

今迄はCooper 対を作っているものが一種類の如く扱って来たが，引力の有効相互作用 V_ℓ の ℓ が奇数だと対のスピン関数は対称と云うことが軌道波動関数が対の構成粒子について反対称と云う要請から出て来て，$\uparrow\uparrow>$，$\downarrow\downarrow>$，$\frac{1}{\sqrt{2}}|(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)>$ の三種類のスピンの Cooper 対が出て来る。この内 $\uparrow\uparrow>$ と $\downarrow\downarrow>$ から出来ている平行スピン対のもの ESP については拡張は簡単で (3.9) や (4.1) の波動関数は上向きスピン対と下向きスピン対の積で書けるとして計算を行うと，ギャップも上向きと下向き対の二種類が独立に夫々の方程式を満して出て来るし，自由エネルギーも各々の対のギャップの寄与の $\frac{1}{2}$ の和の形で表わされ，G–L エネルギーも同様である。即ち，2行2列の diagoral な matrix と $\triangle$ や Ψ を考えると，$\frac{1}{2}T_r|\triangle|^2$，$\frac{1}{2}T_r|\Psi|^2$ や $\frac{1}{2}T_r|\Psi|^4$ の和の形で出て来るだけである。そして operator c_k も縦の2行の行列と考えれば良い。さて三種類の対が混入した時は対角でないスピン空間の 2×2 の行列を

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}\right) & \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

考えて，u_k も v_k も c_k も縦2行の行列で書かれた演算子と思って計算を行うと，$<c_{k\alpha}^+\ c_{-k\beta}^+>$ とか $<c_{-k\beta}\ c_{k\beta}>$ の様な波動関数で期待値を取ったものは行列になり，従ってギャップも 2×2 行の行列となり，ギャップの方程式も 2×2 行の行列となる。また自由エネルギーも $\mathcal{G}$ を一般の関数形とすると，1種類の対の時に $\sum_K \mathcal{G}(\triangle_k)$ だったものが $\frac{1}{2}\sum_K T_r\,\hat{\mathcal{G}}\{\hat{\triangle}_K\}$ の形になる。ここに $\wedge$ は 2×2 の行列を表わす。オーダーパラメーター Ψ も行列 $\hat{\Psi}$ になり，GL エネルギーの形も $|\Psi|^2$，$|\Psi|^4$ の代りに $\frac{1}{2}T_r\ |\Psi|^2$ や $\frac{1}{2}T_r\ |\hat{\Psi}|^4$ が入る。この様にギャップ $\triangle(\mathbf{n})$ にしてもオーダーパラメーター $\Psi(n)$ にしても 2×2 のスピン空間の行列要素として表示すると便利である。(singlet 1成分も含めて) triplet 3成分を一般的にパウリスピンマトリックス σ_x，σ_y，σ_z（と $\hat{1}$）で記述出来る。例えば $\hat{A}$ は $\hat{A}=f(\sigma_2\,\underset{\sim}{\sigma})\,\underset{\sim}{A}$ の様に

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} -A_x+i\,A_y & A_z+A_0 \\ A_z-A_0 & A_x+i\,A_y \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

の形に書ける。例えば$\Psi(n)$は次の様に書ける。

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = \Psi(T) \sum_{i=1}^{3} (\sigma_i \sigma_2)_{\alpha\beta}\, d_i(\mathbf{n}) \tag{5.2}$$

ここに$d_i(\mathbf{n})$はスピン座標空間で大きさ1のベクトルで運動量$\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$の関数である。(5.1)の1,1成分は↑↑，22成分は↓↓を1,2成分は↑↓で2,1成分は↓↑の要素を表わすのは singlet に対応するA_0を$\frac{1}{\sqrt{2}}|(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)>$に，triplet の$S_z = 0$の成分$A_z$を$\frac{1}{\sqrt{2}}|(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)>$に比例するとして代入すれば解る。

特に非対角要素のない場合を平行スピン対状態（ESPと略す，即ち equal spin pair）と云い，例えば$\ell=1$で，

$$\Psi(\mathbf{n}) = \Psi\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} n_y + i\, n_z & 0 \\ 0 & -(n_y + i\, n_z) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と置いたものを，(本当はBSAM[1]状態と云うべきものを)ABM[17]状態と云っている。(5.3)では$\mathbf{d}$はx軸にしか存在しないが，任意の平面内にある互に垂直な単位ベクトルをα_1とα_2（$\alpha_1 \perp \alpha_2$）とすると，この平行スピン対状態で$\ell = 1$のものは，

$$\mathbf{d}(\mathbf{n}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{d}\ (\alpha_1 \mathbf{n} + i\, \alpha_2 \mathbf{n}) \tag{5.4}$$

と書ける。この時$\alpha_1 \times \alpha_2$のベクトルを軌道ベクトルℓと云う。$\ell = \alpha_1 \times \alpha_2$，平行スピン対だけでなく一般な triplet 状態の内で$\ell = 1$のもので，

$$\Psi(\mathbf{n}) = \Psi\begin{pmatrix} -n_x + i\, n_y & n_z \\ n_z & n_x + i\, n_y \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

をBW[18]状態と云う。$\mathbf{d}$ベクトルで書くと，$\Psi(\mathbf{n}) = \Psi\, \mathbf{d}(\mathbf{n})$とすると，次の形に書ける。

$$\mathbf{d}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \tag{5.6}$$

そして(5.3)の状態をA相の(5.5)の状態をB相のモデルとして使う。

今迄のすべての計算に表われる$\triangle(\mathbf{n})$とか$\Psi(\mathbf{n})$とかのオーダー・パラメーターを

すべて上述の様なベクトル表示で表わし，準粒子のエネルギーは (5.1) で計算すると解る様に，

$$E_k = \{ \epsilon_K^{\ 2} + |\triangle(\mathbf{n})|^2 + i\,\sigma\cdot(\triangle(\mathbf{n}) \times \triangle^*(\mathbf{n}))\}^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

となる。ここに $|\triangle(\mathbf{n})|^2 = \frac{1}{2} T_r\ \hat{\triangle}(\mathbf{n})\,\hat{\triangle}(\mathrm{n})^+$ であり，ギャップ $\hat{\triangle}(\mathbf{n})$ が unitary であれば (5.7) の第 2 項は零となる。又，G–L 展開で表われる $|\Psi|^2$ とか $|\Psi|^4$とかの存在する自由エネルギーの表式では，これらの量の trace を取った量が表われるべきなので，これらは夫々 $\frac{1}{2}T_r\ |\hat{\Psi}(\mathrm{n})|^2 = |\Psi|^2\ |\mathbf{d}(\mathrm{n})|^2$，$\frac{1}{2}T_r\ |\hat{\Psi}(\mathrm{n})|^4 = \Psi^4 \{|\mathbf{d}(\mathrm{n})|^4 - |\mathbf{d}(\mathrm{n}) \times \mathbf{d}^*(\mathrm{n})|^2\}$ となり，また unitary 状態に対し $\kappa = \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\mathbf{d}(\mathrm{n})|^4$ となる。

ここで注意したいのは $\ell = 1$ の (5.3) と (5.4) の表示で表われた $d_i(\mathbf{n})$ の中の $\mathbf{n}$ は運動量空間での単位ベクトルで，大きさ 1 の P 波の軌道角運動量ベクトル ℓ を $\ell_x = (n_y \times n_z)$ によって表わすと考えて，特に (5.3) の ABM は 11 と 22 成分も共に x 方向を向いた大きさ 1 の軌道ベクトル ℓ を表わし，これが Cooper 対の 軌道関数を与えると考える。また (5.5) の BW は $d_i(\mathbf{n}) = n_i$，即ち $\mathbf{d}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ と書ける形をしているが，空間的に isotropic なので，この n を任意の軸 ω の廻り θ, φ 回転した $\mathbf{d}(\mathrm{n}) = R(\mathbf{n})$ もやはり BW の状態を与え，ここに自由度の縮退が見られる。

triplet になった時にちょっと複雑になる物理量への変化の表われとして帯磁率について考えてみる。フェルミ面上 $\mathbf{n}$ の方向で $\chi(\mathrm{n})$ を計算し，方向について平均するとする。今，ESP の状態について z 軸方向に磁場がかかったとすると化学ポテンシャルを $\mu_0 \pm \frac{1}{2}\gamma\hbar H$ で測っただけで ↑↑ と ↓↓ の状態の凝縮を妨げないから，帯磁率はノーマルの値と変わらない。今 x 方向にかかったとすると，この軸について ↑↑ と ↓↓ の成分は零となり，↑↓ + ↓↑ の成分だけが残るので，丁度前に計算したのと同様で

$$\chi_\perp(\mathbf{n}) = \frac{1}{4}\gamma^2\hbar^2\ Y(\mathbf{n};T) \tag{5.8}$$

となる。同様に $\chi_{yy}(\mathrm{n})$ もこれになるので，まとめて次の様になり，

$$\chi_{ij}(\mathbf{n}) = \chi_{\mathbf{n}}\{\delta_{ij} - [1 - Y(\mathbf{n};T)][d_i^*(\mathbf{n})\,d_j(\mathbf{n})/|\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2]\} \tag{5.9}$$

更に角度で平均して，

$$\chi_{ij} = \chi_n \{ \delta_{ij} - \int \frac{d\Omega}{4\pi} [1-Y(\mathbf{n};T)] \mathrm{Re}[d_i^*(\mathbf{n}) d_j(\mathbf{n}) / |d(\mathbf{n})|^2] \} = \chi_n \theta_{ij} \tag{5.10}$$

となる。フェルミ液体の分子場効果を入れると，Z_2 以上を省略して次の様になる。

$$\hat{\chi} = \chi_n (1 + \frac{1}{4} Z_0) \hat{\theta} / 1 + \frac{1}{4} Z_0 \hat{\theta} \tag{5.11}$$

一方，BW state の ↑↑> と ↓↓> は $\frac{1}{3}$ づつで |↑↓ + ↓↑> は $\frac{1}{3}$ あることと，状態が角度について等方的と云うことと，ESP 状態が χ_n を与えることとを考えると分子場の効果を入れて

$$\chi_{BW}/\chi_n = (1 + \frac{1}{4} Z_0)[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Y(T)] / \{1 + \frac{1}{4} Z_0 [\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Y(T)]\} \tag{5.12}$$

の形となる。

磁気的超流動体を特長づけるものにスピン超流動密度[15]がある。平行スピン対の状態をまづ考える。スピン非保存の項がハミルトニアンにないと，これは独立な２流体と考えられる。今これが互に反対方向に流れていて，全質量の流れは 0 とすると，上向きスピン対のオーダー・パラメーターと下向きのそれが逆方向に空間変化して，この状況を表わすと，

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(n,\mathbf{R}) = \Psi_{\uparrow\uparrow}(n,0) e^{2im\mathbf{v}_{sp}\cdot\mathbf{R}/\hbar}, \Psi_{\downarrow\downarrow}(n,R) = \Psi_{\downarrow\downarrow}(n,0) e^{-2im\mathbf{v}_{sp}\cdot\mathbf{R}/\hbar} \tag{5.13}$$

と書ける。(5.13) の２式の和と差を取って見ると解る様にベクトル $\mathbf{d}(n)$ は z 軸の廻りに一様に回転していて，位相の gradient とスピン current の速度は，

$$\mathbf{v}_{sp} = -(\hbar/2m) \varphi \qquad (\varphi = -2m\mathbf{v}_{sp} \cdot \mathbf{R}/\hbar) \tag{5.12}$$

で結ばれている。ESP でないもっと一般の状態では $\mathbf{d}$ が任意の軸の廻りに回転していて，次式で dyadic の量 $\Omega_{k\alpha}$ を小さな空間的な変動 δR に対して定義して（k： スピン指標，α：空間指標）

$$\delta d_i = (2m/h) \varepsilon_{ijk} d_j \Omega_{k\alpha} \delta R_\alpha \tag{5.13}$$

とすることが出来る。$\Omega_{k\alpha}$ は速度の次元を持ち，(5.13) の例では $\Omega_{k\alpha}=\delta_{kz}\,v_{sp\alpha}$ である。スピン流 J_{sp} は次の様に連続の方程式で定義されている。

$$\partial S_i/\partial t+(\partial/\partial x_\alpha)J_{i\alpha}^{sp}=0 \tag{5.14}$$

さて上記の (5.13) で記述されるスピンの逆流の準平衡状態では J^{sp} は Ω に比例して，

$$J_{i\alpha}^{sp}=\hbar/2m\ \rho_{ij,\alpha\beta}^{spin}\ \Omega_{j\beta} \tag{5.15}$$

の関係を期待する。ここに $\rho_{ij,\alpha\beta}^{spin}$ は 4 階のテンソルで，これをフェルミ液体の分子場効果を省略して計算してみる。まづ ESP で考え各々の超流動速度 v_s と質量流で流れているとすると，

$$v_{s\uparrow}=-v_{s\downarrow}=v_{sp},\quad J_{z\uparrow}^{sp}=J_{z\downarrow}^{sp}=(\hbar/2m)J_\uparrow,\ J_x^{sp}=J_y^{sp}=0 \tag{5.16}$$

となる。今これを一種類の超流動体が $\mathbf{J}=\rho_s\,\mathbf{v}_s$ で流れているのと較べると，

$$\rho_{zz,\alpha\beta}^{spin}=\rho_{\alpha\beta}^{s}=\rho[1-Y_{\alpha\beta}(T)],\quad \rho_{zx}^{spin}=\rho_{yz}^{spin}=0 \tag{5.17}$$

と書ける。今我々の状態が unitary で $\mathbf{d}$ は y 軸に沿って，考えている点に存在すると，上の議論を x と z 軸の任意の選択でも進めることが出来る。($\mathbf{d}$ は y 軸の上にあるから，その廻りに回転出来ない。) 従って，i,j = x 又は z に対して，

$$\rho_{ij,\alpha\beta}^{spin}=\delta_{ij}\ \rho_{\alpha\beta}^{s}\ ,\quad \rho_{yi,\alpha\beta}^{spin}=0 \tag{5.18}$$

一方，$\Omega_{k\alpha}$ を $\delta_{ky}\ v_{sp\alpha}$ とすると，$\mathbf{d}$ は y 軸の廻りの回転であるが，$\mathbf{d}$ は y 軸に沿っているから意味がない。故に $\rho_{iy\alpha\beta}^{spin}=0$ (i = x,y,z) と云うことになる。これらをまとめると，unitary な ESP 状態に対して，

$$\begin{aligned}\rho_{ij\,\alpha\beta}^{spin}&=\rho(\delta_{ij}-d_i^*d_j/|\mathbf{d}|^2)[\delta_{\alpha\beta}-Y_{\alpha\beta}(T)]\\&=\rho\int\frac{d\Omega}{4\pi}(\delta_{ij}-d_i^*(\mathbf{n})\ d_j(\mathbf{n})/|\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2)\ 3n_\alpha\ n_\beta[1-Y(\mathbf{n},T)]\end{aligned} \tag{5.19}$$

と書ける。上の関係よりESPでない一般の unitary 状態に適用出来る筈で，証明はしないが，スピンノーマル密度を定義してやってゆくと出来る筈である。

§6. Paramagnon 理論

今迄述べて来た超流動状態のフェルミ液体論でうまく説明出来ない点として T_c での比熱の跳びと，実験的にはA相はESP状態であって，B相は準等方的な triplet 状態であると云うことを説明しなければならない2点がある。

まづ前者についてはG−L展開の所で$\triangle^4$迄展開した自由エネルギーで，

$$F = -\alpha(1-T/T_c)\Psi^2 + \frac{1}{2}\kappa\beta\Psi^4$$

$$= N(0)\{-(1-T/T_c)\triangle^2 + \frac{7}{8}\zeta(3)(\pi T_c)^{-2}\kappa'\triangle^4\} \tag{6.1}$$

となることを述べたが，FはP波ではもっと一般に$\triangle_i(\mathbf{n}) = \sqrt{3}\,\triangle\, d_{\alpha i}\, n_\alpha$ の $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ の作る不変量で書ける筈で，それらの空間平均値$<\ >$を

$$I_0 = \langle d^*_{\alpha i}\, d_{\alpha i}\rangle = 1, \quad I_1 = |\langle \mathbf{d}^2\rangle|^2, \quad I_2 = \langle d^*_i\, d^*_j\rangle\langle d_j\, d_i\rangle$$

$$I_3 = \langle d^*_i\, d_j\rangle\langle d^*_i\, d_j\rangle, \quad I_4 = (\langle|\mathbf{d}|^2\rangle)^2 = 1,$$

$$I_5 = \langle d^*_i\, d_j\rangle\langle d^*_j\, d_i\rangle \tag{6.2}$$

とすると，Fは

$$F = N(0)\{-(1-T/T_c)\triangle^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} a_i\, I_i\, \frac{7}{8}\zeta(3)(\pi T_c)^{-2}\} \tag{6.3}$$

と書けるので $\kappa'' = \Sigma\, a_i(P,T)\, I_i$ と云う量が比熱の跳びの表式

$$\triangle C_v/C_n = 1.42(\kappa'')^{-1} \tag{6.4}$$

に現われる。これがBCSの場合の $\kappa > 1$ に較べて $\kappa'' < 1$ になる可能性があるので，実験的な$\triangle C_v/C_n \simeq 2.00$ を説明出来ることになる。そこで a_i の計算にスピンのゆらぎによる間接力の paramagnon [19] 理論が登場する訳であるが a_i の計算はすごく面倒で，まだ定量的な一致を見ていない。

後者については通常のBCS理論ではtripletの状態とESPの状態ではtripletの方が3種類の自由度があって，それだけギャップをまるくするので自由エネルギーが低くなってA相のESP状態が起らない訳だが，そこにparamagnon理論[20]が説明に入って来る。つまり超流動状態になると帯磁率自身が $\delta\chi(P,T)=\chi_S-\chi_N$ で変化することにより，まづESP状態ついで準等方的な状態が現われる。Leggett[15]に従い定性的に説明すると，ポテンシャルエネルギーVの変化は V_{ij} をVの変分導関数とすると，

$$\delta\langle V\rangle=\int V_{ij}(r'-r,\ t'-t)\ \delta\langle\sigma_i(rt)\,\sigma_j(r't')\rangle\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, dt \tag{6.5}$$

で表わされる。ついで (2.7) より $V_{ij}(q\omega)$ が $-\zeta_0^2\,\mathrm{Re}\ \chi_{ij}(q\omega)$ で表わされることとゆらぎと散いつの定理

$$\langle\sigma_i\,\sigma_j\rangle(-q,-\omega)=\mathscr{I}_m\ \chi_{ij}(q\omega)\left[\exp(\beta\hbar\omega)-1\right]^{-1} \tag{6.6}$$

の関係を用いると $\delta\langle V\rangle$ の変化即ち自由エネルギーの変化は

$$\delta F=\delta\langle V\rangle=-\zeta_0^2\sum_q\int_0^\infty\frac{d\omega}{2\pi}\ \mathrm{Re}\ \chi_{ij}(q\omega)\,\delta\mathscr{I}_m\ \chi_{ji}(q\omega)\coth\frac{1}{2}\beta\hbar\omega \tag{6.7}$$

となる。所で $\chi_{ij}(q,\omega)=\chi_N(q,\omega)+\delta\ \chi_{ij}(q\omega)$ とするとRe $\chi_n(q,\omega)\,\mathscr{I}_m\ \delta\ \chi_{ji}(q,\omega)$ の積の1次の項は既に $\langle\sigma_i(r,t)\,\sigma_j(r't')\rangle$ をBCS decouplingすることによりBCSの2次の自由エネルギー，即ち $\triangle^2$ に比例する項に含まれている。従って次の項は $\int\mathrm{Re}\,\delta\chi\, d(\mathscr{I}_m\ \delta_\chi)=\frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\,\delta\chi\ \mathscr{I}_m\ \delta\chi$ の項で，それによる $\triangle F$ は

$$\triangle F=-\frac{1}{2}\zeta_0^2\,\Sigma_q\int_0^\infty\frac{d\omega}{2\pi}\ \mathrm{Re}\,\delta\,\chi_{ij}(q,\omega)\,\mathscr{I}_m\ \chi_{ji}(q,\omega)\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{6.8}$$

となる。(6.8) の $\delta\chi_{ij}$ の計算に $\chi_{ij}=\chi_{ij}^0/1+\frac{Z_0}{4}\chi_{ij}^0$ を用い，分子場の効果のない χ_{ij}^0 にノーマルの値 (1.18) を用いると，

$$\triangle F=-\frac{1}{2}\zeta_0^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{d\omega}{2\pi}\ \frac{\mathrm{Re}\,\delta\,\chi_{ij}^0(q,\omega)\,\mathscr{I}_m\,\delta\ \chi_{ji}^0(q,\omega)}{\left[1+\frac{1}{4}Z_0\ \chi^N\right]^4} \tag{6.9}$$

を得る。問題は $\delta\chi_{ij}^0(q,\omega)$ の計算であるが，パラマグノン理論を用いてBrinkman-

Serene-Anderson [21] と黒田[20] の計算があって$\triangle F$ の計算は比熱の跳びの場合の計算と同様 a_i の計算に帰着する。即ち (6.9) は$\triangle F = \frac{1}{2} N(0) \sum_i a_i \ I_i \frac{7}{8} \zeta(3)(\pi k_B T_c)^2$ の形となる。この a_i の比，$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5$ は前の著者達の計算では $-1 : -0.5 : -7.0 : -2.0 : -5.5$ で (BCS は $(-0.6 ; 1.2 : -1.2 : 1.2 : 1.2)$，後の黒田の値はまたこれらと異なる。

BW の状態は χ の値が ESP に較べて小さくなっているので，$\triangle F_{sf}^{BW}$ を BCS の 4 次の自由エネルギーの項の BW と ESP の差を較べてみると次の様になる。

$$\delta = \frac{\triangle F_{sf}(BW)}{\triangle F_{BCS}(BW) - \triangle F_{BCS}(ABW)} = 140 \left(\frac{k_B T_c}{\epsilon_F}\right) \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{Z_0}{4} \Big/ 1 + \frac{Z_0}{4}\right)^{3/2} \tag{6.10}$$

ここで α は χ_{sp}^N の (1.18) 式に於ける q の展開で現われた係数で $1/3$ である。

$\triangle F_{BCS}(ABM) - \triangle F_{BCS}(BW) = -\frac{7}{80}\zeta(3)\frac{\triangle^4}{(\pi T_c)^3}$ の関係があり，$\triangle F_{sf}(BW)$ と $\triangle F_{sf}(ABM)$ との比は粗い計算で[17] -3 で，更に精密な計算で[21] $(-10/3)/(-21/2)$ 又は[20] $0/(-1.05)$ となっている。これらを考慮して ABM と BW の各この状態の 自由エネルギー差に打ち克つと，ABM から BW 状態への転移が起る訳である。その温度を T_{AB} とする。従って A 相と B 相との境界曲線 T_{AB} と T_c との比 T_{AB}/T_c を $\delta(P)$ の関数として求めることが出来る。しかし厳密に定量的に出すのは仲々困難の様に見える。

§7. オーダーパラメーターの方向性，境界効果及び織目

超流動 ^3He は異方的超流動性を持つので液晶の様に色々な条件で特長づけられる方向性を持って来る。[22),23),15] A 相ではまづ帯磁率がある為に磁場によってABM 状態では自由エネルギーに次の項が加わるので，**d** は **H** に垂直になろうとする。

$$F = -\frac{1}{2}\mathbf{H}\,\hat{\chi}\,\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\chi_n H^2 + \triangle F_{mag}$$
$$= \frac{1}{2}\chi_N(1-Y(T))/(1+\frac{1}{4} Z_0 Y(T))(\mathbf{d},\mathbf{H})^2 - \frac{1}{2}\chi_n H^2 \tag{7.1}$$

$$\triangle F_{mag} \simeq 5\times10^{-7}(1-T/T_c)\ \mathrm{erg/cm^3\ gaus^2}$$

また後述の §8での磁気双極子相互作用の為ABM状態では，

$$\triangle F_{dip}^{ABM} = -\frac{3}{5}\, g_D(T)(\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\ell})^2 \tag{7.2}$$

の為 $\mathbf{d}$ は ℓ に平行になろうとする。

BWの状態では $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ はある軸 $\hat{\omega}$ の廻りの回転に対して縮退していて磁場をかけると，$S_z=\pm1$ の対に較べて $S_z=0$ の対の数を減らそうとするので，即ち，d_x, d_y の方を大きくし d_z の方を小さくする為に $\hat{\omega}$ を z 軸方向に取ると，z 軸方向に超伝導の時と同様な depairing 効果 $(\mu H/\triangle(T))^2$ が期待されるので，磁場エネルギーとしては次のものが余分に加わる。

$$\triangle F_{mag}^{BW} = -\ g_D(T)[\mu/\triangle(T)]^2(\hat{\omega}.\mathbf{H})^2 \tag{7.3}$$

それから dipole energy の方は後出の (8.3) 式に $\hat{\omega}$ 軸の廻りの回転行列 R を $\mathbf{n}$ に施したものを代入する。即ち，

$$\begin{aligned}\triangle F_{dip} &= \frac{1}{2}\, g_D(T)\{R_{\alpha\alpha}R_{\beta\beta} + R_{\alpha\beta}\ R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\ R_{\beta\alpha} = \mathrm{Const.}\\ &\quad + \frac{1}{2}\, g_D(T)\{(T_rR)^2 + T_r(R^2)\}\end{aligned} \tag{7.4}$$

となり，$\hat{\omega}$ 軸の回りの回転角を θ とすると，$T_rR=(1+2\cos\theta)$，$T_rR^2=(1+2\cos^2\theta)$ となることから，〔それは $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ より〕

$$\triangle F_{dip}^{BW} = \frac{4}{5}\, g_D(T)\{\cos\theta + 2\cos^2\theta\} \tag{7.5}$$

となって θ は $\cos^{-1}(-\frac{1}{4}) = 104^\circ$ の時に極小になり，$\hat{\omega}$ の軸方向は前述の $\triangle F_{mag}^{WB}$ によってきめられる。

また，超流動の流れがあると，それによる自由エネルギーは，

$$\triangle F_{flow} = \frac{1}{2}\,\rho\,(\hat{\rho}_s/\hat{\rho}_n)_{\alpha\beta}\, v_{s\alpha}\, v_{s\beta} \tag{7.6}$$

となり，ABM状態では，T_c 近くで，

$$\triangle F_{flow}^{ABM} = -\mathrm{Const}\,(\ell\cdot\mathbf{v}_s) \simeq -10^{-2}\,v_s^2\,(1-T/T_c)\,(\ell\cdot\mathbf{v}_s)^2 \mathrm{erg\ sec^2/cm} \tag{7.7}$$

となる為に，ℓ は超流動の流れの方向に平行になろうとする。BW 状態では上述の $\triangle F_{mag}^{BW}$ に類似で $L_z = 0$ の成分を flow の方向に減らそうとするので，

$$\triangle F_{flow}^{BW} \simeq -\, g_D(T)\,[\,p_F\, v_s/\triangle(T)]^2\,(\omega\cdot v_s)^2 \tag{7.8}$$

となる。

電場があると，磁気双極子の $\mu\sigma$ に代って $\mathbf{p} = \alpha E$ の電気双極子が入るので，自由エネルギーは

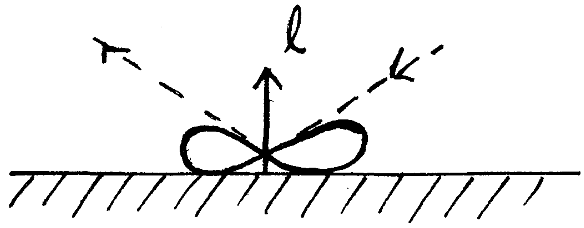
$$\triangle F_{e\ell} = -\left(\frac{4\alpha^2}{\mu^2}\right) E^2\, g_D(T) \int \frac{d\Omega}{4\pi}\,[\,3(\mathbf{n}.\hat{\mathbf{E}}) - |\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2] \tag{7.9}$$

となり，ABM 状態では，

$$\triangle F_{e\ell} = (4\alpha^2 E^2/\mu^2)\, g_D(T)\,\frac{1}{5}\,(\ell.\mathbf{E})^2 \tag{7.10}$$

となり，ℓ は E に平行になろうとする。一方 BW では $\triangle F_{e\ell}$ はきわめて小さく，しかも回転軸の方向も角度もきめない。$\triangle F_{e\ell}$ はとても小さく 40000V/cm の電圧が 50G にしか匹敵しない。

ついで壁の影響であるが対の波動関数を P 波について書くと，ℓ に垂直面内にあって壁などの境界では波動関数が壁の面に平行な方が depair を起さないので自由エネルギーを損をしないと云うのが ABM 状態での状況である。[22] BW 相ではやや複雑で $\hat{\omega}$ 軸は壁に垂直になろうとするが，磁場が壁の面に平行であると，$\hat{\omega}$ は壁の法線と H の両方に $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ の角度を取ろうとする。これは Osheroff-Engelsberg [24] らが $d_{\alpha i}(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{3}$



第7－1図　境界面近くでの ℓ の振舞い

$[\delta_{\alpha\beta} - f(r_\perp)\hat{s}_\alpha \hat{s}_\beta] R_{\beta i}(\mathbf{r})$ の試行波動関数（$\hat{s}$ は壁に垂直な単位ベクトルで，壁に平行な角運動成分は suppress される形になっている）を用いて調べた。

さて液晶での様に空間的なねじれやゆがみがある時，即ち織目の自由エネルギー について考察してみよう。即ち，不変性の議論より，

$$\triangle F_{grad} = \gamma_1(\partial_\alpha \triangle_{\alpha i}\, \partial_\beta \triangle^*_{\beta i}) + \gamma_2(\partial_\alpha \triangle_{\beta i}\, \partial_\alpha \triangle^*_{\beta i}) + \gamma_3(\partial_\alpha \triangle_{\beta i}\, \partial_\beta \triangle^*_{\alpha i}) \qquad (7.11)$$

がこの第 3 項は第 1 項と表面エネルギーになる div の形の項の和で書けるので，或いは，

$$\triangle F_{grad} = \sum_p \left\{\frac{1}{2} K_L |\mathrm{div}\, \mathbf{A}_p|^2 + \frac{1}{2} K_T |\mathrm{curl}\, \mathbf{A}_p|^2\right\} \qquad (7.12)$$

と書ける。ここに $A_{pi} = \triangle_{pi}$ 。今 div の形の項を除いて前掲の自由エネルギーと等しいと置くと，

$$K_T = 2\gamma_2, \quad K_L = 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \qquad (7.13)$$

の関係がある。この γ_i は超流動密度と関係があり，今 $\triangle_{\alpha i}$ のすべての成分の位相が一様に変化をするとすると，一様な速度 v_s の超流動流に対応して

$$\triangle_{\alpha i}(R) = \triangle d_{\alpha i} \exp i(2m\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{R}/\hbar) \qquad (7.14)$$

と置ける。すると空間変化による自由エネルギーは，

$$\triangle F_{grad} = \frac{1}{2} \rho^s_{\alpha s} v_{s\alpha} v_{s\beta} \qquad (7.15)$$

となるので，$d^*_{\beta i} d_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}$ の規格化を用いて，

$$\rho^s_{\alpha\beta} = (8m^2/h^2)(\gamma_1 d_{\alpha i} d^*_{\beta i} + \gamma_2 \delta_{\alpha\beta} + \gamma_3 d_{\beta i} d^*_{\alpha i})\triangle^2 \qquad (7.16)$$

となる。一方前出の超流動密度の具体的計算で，

$$\rho^{s}_{\alpha\beta}=\frac{3}{5}(1-Y(T))\,\delta_{\alpha\beta}+d_{\alpha i}\ d^{*}_{\beta i}+d_{\beta i}\ d^{*}_{\alpha i})(1+\frac{1}{3}F_1)^{-1}\rho \tag{7.17}$$

となることから,

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\frac{3}{5}\gamma_0=\frac{3}{5}N/(k_BT_c)^2(7\zeta(3)/4\pi^2),\quad K_T=\frac{1}{3}K_L \tag{7.18}$$

となる。従ってベクトル $\mathbf{A}_p$ の方向と垂直と横方向では曲げのエネルギーが異なる。

今G—L 自由エネルギーを,

$$F_{GL}=\int d^3r\,N(0)\{-(1-T/T_c)|\triangle(r)|^2+\frac{1}{2}\beta\ |\triangle(r)|^4\}+\gamma|(\nabla\triangle(r))^2| \tag{7.19}$$

の形に書くと相関距離は $\xi=[\gamma/N(0)(1-\frac{T}{T_c})]^{\frac{1}{2}}$ と書けるが，これより異方的超流動では次の

$$\xi_T=[K_T/2N(0)(1-T/T_c)]^{\frac{1}{2}},\quad \xi_L=[K_L/2N(0)(1-\frac{T}{T_c})]^{\frac{1}{2}} \tag{7.20}$$

二種類の相関距離が定義されて，大きさは，$\xi_T=\xi_L/\sqrt{3}=\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{7\zeta(3)}{48}}\ \frac{\hbar v_F}{\pi k_B T_c}$ $(1-\frac{T}{T_c})^{-\frac{1}{2}}\simeq 200(1-\frac{T}{T_c})^{-\frac{1}{2}}$ Å となる。

一般的に云ってオーダーパラメーターの方向依存性は上述の方向の空間変化によるエネルギーと bulk の方向エネルギーと，他の方向づけを与える影響の外場の自由エネルギーとを壁などの境界条件の下で最小にすれば良い。しかし壁の影響はそれからある回復距離 R_c 離れればオーダーパラメーターの方で忘れてしまう。今そのオーダーを評価してみる。空間変化の自由エネルギーは大体 $\gamma_0R^3(\triangle/R)^2$ で bulk のそれは $\triangle F_b$ を bulk の単位体積当りの自由エネルギーとすると $R^3\triangle F_b$ となる。ここで Rは壁の影響である。従って壁に向っての単位表面積当りの自由エネルギーは次の通りである。

$$\triangle F^1\sim\gamma_0\triangle^2/R+R\triangle F_b \tag{7.21}$$

これを極小にすると $\gamma_0\triangle^2\sim(N\hbar^2/m)\,\rho_s/\rho$ なので,

$$R_c \sim (\gamma_0 \triangle^2 / \triangle F_b)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{N\hbar^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho_s/\rho}{\triangle F_b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim\ 10^{-4} \left(\frac{\rho_s/\rho}{\triangle F_b}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{erg}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}} \qquad (7.22)$$

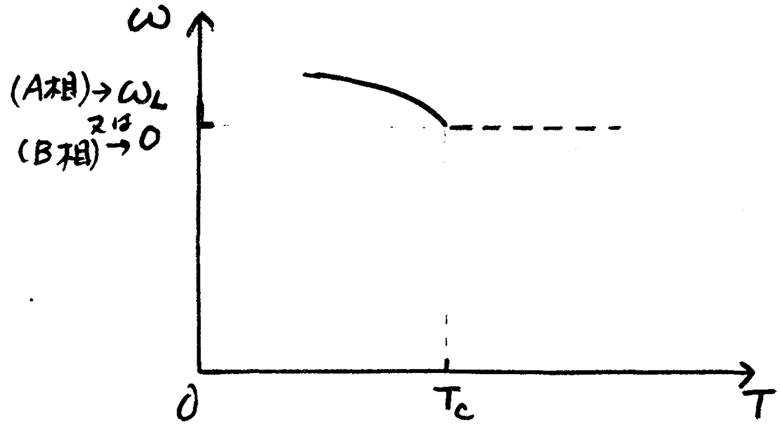
となる。ABM 相では$\triangle F_b \sim 10^{-3}(1-\frac{T}{T_c})$ erg／cm³ とすると R〜10^{-3}〜10^{-2} cm となる。BW 相では軸 $\hat{\omega}$ の方向をきめる磁場エネルギー $\triangle F^{BW}_{mag} \simeq - g_D(T)(\mu/\triangle(T))^2 (\hat{\omega}H)^2 \sim 4\times 10^{-12} H^2$ erg／cm³G² より，

$$R_c\ \sim\ 100\ (1\sim T/T_c)^{\frac{1}{2}}\ H^{-1}\ \mathrm{cm}\ \mathrm{G} \qquad (7.20)$$

となる。（$\triangle F^{BW}_{mag}$ が T_c 附近で温度依存性のないことを用いた。）

§8. NMR

実験的に ^{3}He に z 軸の方向の磁場 H_0 を静的に掛けておいて，その方向に平行又は垂直に Pulse 的なラジオ周波数の交流磁場 $H_{rf}(t)$ をかけると T_c より下で縦波又は横波の NMR の吸収が起こる。[25)] それは約 100 kHz の周波数で起こるので，それはノーマルのスピン緩和時間 τ^{-1} の 100 MHz，ギャップの振動数の $\hbar/\triangle$〜 100 MHz に較べて小さい。従って系のスピン S の絶対値だとか系のエネルギー状態の方は早めに平衡状態に到達し，Cooper 対のスピンに対応する位相



第 8 − 1 図　　NMR の起る振動数

が ^{3}He の対のスピンの間に働く磁気的二重極相互作用を復元力として磁場による振動の共鳴を起すのが NMRの吸収の実態を表わすと考えられる。[26),15)]

^{3}He に働く dipole 相互作用はそのスピンのある座標を r_i と r_k すると，

$$H_D = \frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2\sum_{ik}\left[\frac{\sigma_i\cdot\sigma_k}{|r_i-r_k|^3}-\frac{3\sigma_i\cdot(r_i-r_k)\sigma_k\cdot(r_i-r_k)}{|r_i-r_k|^5}\right] \tag{8.1}$$

と書ける。これの Copper 対に効くのは $\frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2$ のオーダーであるのに 個別励起に効くのは行列として (8.1) の2次の摂動で効くので $\frac{1}{4}\gamma^4 h^4$ のオーダーになるので，$\langle\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(2)}+\sigma_j^{(2)}\sigma_i^{(1)}\rangle_{pair}=\frac{1}{2}|\Psi|^2(\delta_{ij}|\mathbf{d}|^2-2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{d}_i^*\mathbf{d}_j^*)$に留意すると*) Cooper 対への寄与は，

$$H_D = \left(\frac{2\pi\gamma^2h^2}{3}\right)\Psi^2\int\frac{d\Omega}{4\pi}\int\frac{d\Omega'}{4\pi}\left\{\mathbf{d}^*(\mathbf{n})\cdot\mathbf{d}(\mathbf{n}')-3\,\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{d}^*(\mathbf{n})\,\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{d}(\mathbf{n}')\right\} \tag{8.2}$$

と書ける。ここで $\mathbf{q}=\mathbf{n}-\mathbf{n}'/|\mathbf{n}-\mathbf{n}'|$ である。特に P 波の時は $g_D=\frac{\pi}{2}\gamma^2h^2\Psi^2(T)=10^{-3}(1-T/T_c)\ \mathrm{erg/cm^3}$ とすると，次の様に書ける。（文献 26 の Appendix 参照）

$$H_D = g_D(T)\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left\{3|\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2-|\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2\right\}\cong 3g_D(T)\int\frac{d\Omega}{4\pi}|\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2 \tag{8.3}$$

さて上の様な状況，即ち $\mathbf{S}$ の大きさやオーダーパラメーターの大きさΨについては，平衡状態にあると云う準静的な状況，つまりこの準静的な近似の下で ^{3}He の有効ハミルトニアンは磁場を$\mathbf{H}(t)=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_{rf}(t)$ と置くと，

$$H\{\mathbf{S},\mathbf{d}(\mathbf{n})\}=\frac{1}{2}\gamma^2\chi^{-1}S^2-\gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}(t)+g_D(T)\int 3|\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}(\mathbf{n})|^2\frac{d\Omega}{4\pi} \tag{8.4}$$

となる。χ は平衡状態の帯磁率である。

---

*) $\hat{\Psi}_{\alpha\beta}(\mathbf{n})=\Psi\, i\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i\sigma_2)_{\alpha\beta}\,d_i(\mathbf{n})$ で計算する。
但し，$\hat{\Psi}=\sum_{|k|}\langle a_{-k\alpha}\,a_{k\beta}\rangle$。

$S_i = \frac{1}{2} \sum_{k\alpha\beta} a^+_{k\alpha}\, \sigma_{i\alpha\beta}\, a_{k\beta}$ の交換関係と $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ を演算子の様に扱い $[S_i, d_j(\mathbf{n})] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, d_k(\mathbf{n})$ より，

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma \mathbf{S} \times \mathbf{H}(t) + \mathbf{R}_D \tag{8.5}$$

$$\frac{d\,\mathbf{d}(\mathbf{n})}{dt} = \mathbf{d}(\mathbf{n}) \times \gamma \{\mathbf{H}(t) - (\gamma \mathbf{S}/\chi)\} \tag{8.6}$$

の Leggett の運動方程式[26] が得られる。この後 $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ を古典的な変数として扱う。R_D は，

$$R_D = -\int \frac{d\Omega}{4\pi} \{\mathbf{d}(\mathbf{n}) \times [\frac{\delta H_D}{\delta \mathbf{d}(\mathbf{n})}] + c \cdot c\} \tag{8.7}$$

で与えられ，dipole 偶力である。今 z 軸方向に H_{rf} があると，次の様になる。

$$\ddot{S}_z = \dot{R}_{Dz} = (i\hbar)^{-1} [R_{Dz}, \frac{1}{2} \gamma^2 \chi^{-1} S_z^2] = (i\hbar)^{-1} [R_{Dz}, S_z] \gamma^2 \chi^{-1} S_z$$
$$= \Omega^2_{zz}(t)\, S_z \tag{8.8}$$

ここで c 数の $\omega^2 = \Omega^2_{zz}(t) = ih^{-1} [R_{D_z}, S_z] \gamma^2 \chi^{-1}$ の縦波の NMR の吸収が起ることが解る。$H_{rf}(t)$ が x−y 面に働くと S の z 軸の廻りの歳差運動が起り，

$$\ddot{S}' + \omega_L \times \dot{S}' = -\Omega^2 S' \tag{8.9}$$

ここに S' は平衡値 S からのずれで $\omega_L = \gamma H_0$ で $\Omega^2_{ij} = \gamma^2 \chi^{-1} \hbar^2 [[S_i, H_D], S_j]_{平衡}$ である。これを解くと横波の方の吸収は Ω_x と Ω_y を Ω_{ij} の x−y 面内の固有値とすると，

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \{(\omega_L^2 + \Omega_x^2 + \Omega_y^2) \pm [(\omega_L^2 + \Omega_x^2 + \Omega_y^2)^2 - 4\Omega_x^2 \Omega_y^2]^{\frac{1}{2}}\} \tag{8.10}$$

で、特に Ω_x^2 又は Ω_y^2 の一つが零だと，

$$\omega^2 = \gamma^2 H_0^2 + \Omega^2_{\substack{y\\x}}(T) = \omega_L^2 + \Omega^2_{\substack{y\\x}}(T) \tag{8.11}$$

となる。Ω_{ij}^2 のＴ依存性は $g_D(T)$ に含まれる Ψ^2 より（$1-T/T_c$）で入る。尚 Ω_{ij} の物理的意味は H_D の表式でスピン座標を $\delta\omega$ だけ回転させると，

$$\delta H_D = H_D' - H_D = e^{i\delta\omega S/\hbar} H_D e^{-i\delta\omega S/\hbar} - H_D = \hbar^{-2}\{\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S} H_D \delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S})^2 H_D - \frac{1}{2} H_D(\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S})^2) = \frac{1}{2}\hbar^{-2}[[S_i, H_D], S_j]_{\text{平衡}} - \delta\omega_i\ \delta\omega_j \tag{8.12}$$

を得るので，下記の様に H_D の微小回転 $\delta\omega$ の２次の導関数になっている。

$$\Omega_{ij}^2 = \gamma^2\chi^{-1}(\partial^2 H_D/\partial\omega_i\partial\omega_j) \tag{8.13}$$

具体的に H_D はＡ相に適用されるABMモデルでは下の通りである。

$$H_D = -\frac{3}{5} g_D(T)(\mathbf{d},\boldsymbol{\ell})^2 = -\frac{1}{2}\lambda\cos^2\theta\ ,\quad \lambda = \frac{6}{5} g_D(T) \tag{8.14}$$

Ｂ相のBWモデルでは $\mathbf{d}$ の任意の軸 $\hat{\omega}$ の廻りの $\mathbf{n}$ よりの回転角を θ とすると，

$$H_D = \frac{4}{5} g_D(T)[\cos\theta + 2\cos^2\theta] \tag{8.15}$$

で与えられる。但し，（8.15）は $\theta = \cos^{-1}(\frac{-1}{4}) = 104^\circ$ の時に極小を与える。

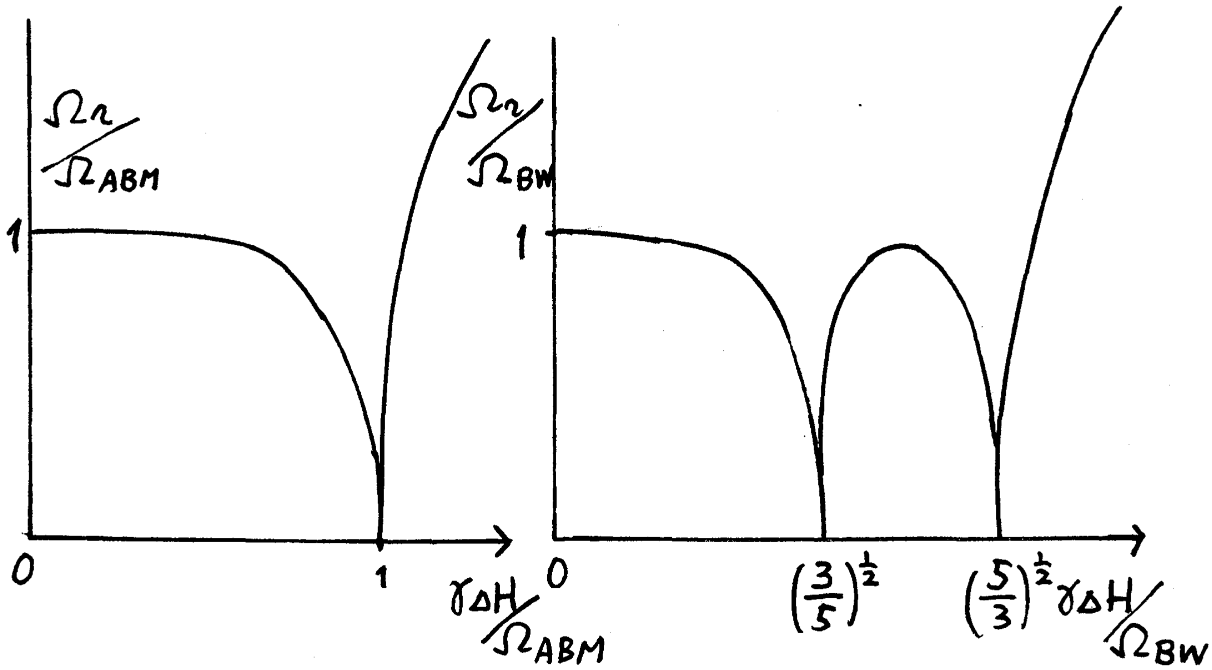
このNMRの他に極めて興味深いのは磁化の残響効果[27),28)]と呼ばれる現象でHelmholz coil でサンプル ^{3}He 中の静磁場を $\triangle H$ だけ変化させると，NMR と同様に磁化 $\mathbf{M} = \gamma\mathbf{S}$ が Leggett 方程式に従い振動するのは，丁度振子の重力下での振動の様になる。しかも振子に与える最初のエネルギーを H_D の極大と極小の差に等しくしておくと，振子の回転が真上の頂点で止って永久にそこに止っている様に見える。 これは非線型な共鳴現象で，この臨界値は，

$$\frac{1}{2}\chi(\triangle H)^2 = H_{D\text{極大}} - H_{D\text{極小}} \tag{8.16}$$

となり，共鳴振動数が０になって止って見える $\triangle H$ の値は、

$$(\gamma\triangle H/\Omega_{ABM})=1, \qquad \gamma\triangle H/\Omega_{BW}=\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{3}} \tag{8.17}$$

で起り，全体の様子を図示すると下の様になる。Ω_r は共鳴振動数である。



第８－２図　Ａ相（左図）とＢ相（右図）での残響共鳴振動数 Ω_r と input のエネルギー $\gamma\triangle H$ との非線型な関係図

§9. 輸送理論

液体 ^{3}He の超流動状態の輸送係数の内，粘性係数，熱伝導率及びスピン拡散係数についての計算が行われている。等方的なギャップの場合については Shazmanian [29] と Seiden [30] の仕事があるが，それを異方的ギャップで triplet の場合に拡張したのに，宗田－藤木 [31] 及び Shumeiko [32] Pethick, [33] 小野－原－永井－川村の [34] 仕事がある。考え方としては超流動状態での準粒子の分布関数 $n(p\sigma;r)$ の従う運動方程式に衝突積分の項を含めて，特にノーマルでの散乱確率 w に超流動状態に入ったことによる Coherence 因子 C を含めたものを解くと云う方法で，分布関数のずれを求め，運動量 flux やエネルギー flux 及びスピンの流れを計算して求める。即ち，

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r}\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p}\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial r} = I(n) \tag{9.1}$$

ここで $n(p\sigma;r)$ は半古典的な準粒子の分布関数で

$$n(p\sigma;r) = n_0(p,\sigma) + \delta_n(p\sigma;r) \tag{9.2}$$

熱平衡での $n_0(p,\sigma)$ は、

$$n_0(p,\sigma) = \left[\exp\left(\frac{E^0_{p\sigma}}{T}\right) + 1\right]^{-1} \tag{9.3}$$

で与えられ，準粒子のエネルギー $E_{p\sigma}$ は、

$$E_{p\sigma} = E^0_{p\sigma} + \delta E_{p\sigma}(\delta n) \tag{9.4}$$

で与えられる。ここに $E^0_{p\sigma}$ は熱平衡でのエネルギーで、

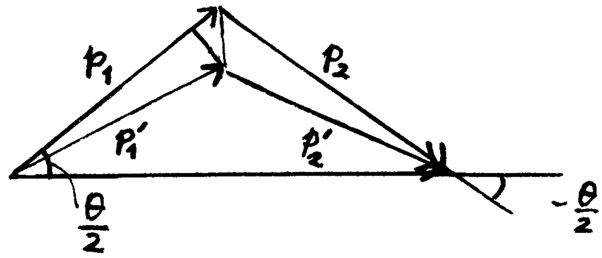
$$E^0_{p\sigma} = \left[\varepsilon_p^{\,2} + \triangle^2 \,|\, f_\ell(\Omega_n)|^2 (d^* d - \sigma_z(\mathbf{d}^* \times \mathbf{d}))\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9.5}$$

で与えられる。衝突積分は W_{22} と $W_{\substack{13,\\31}}$ C_2 と $C_{\substack{13\\31}}$ を２体－２体と１体－３体散乱の散乱確率と干渉因子とすると，

$$\begin{aligned} I(n_1) = -\int d^3p_2\, d\tau_{1'}\, d\tau_{2'} \{ & C_2(p_1 p_2 p_{1'} p_{2'}) W_{22}[n_1 n_2 (1-n_{1'})(1-n_{2'}) \\ & - (1-n_1)(1-n_2) n_{1'} n_{2'}] \,\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\, \delta(E_1+E_2-E_{1'}-E_{2'}) \\ & + C_{13}(p_1 p_2 p_{1'} p_{2'}) W_{13}[n_1(1-n_2)(1-n_{1'})(1-n_{2'}) \\ & - (1-n_1) n_2 n_{1'} n_{2'}] \,\delta(p_1-p_2-p_{1'}-p_{2'})(\delta(E_1-E_2-E_{1'}-E_{2'}) \\ & + C_{31}(p_1 p_2 p_{1'} p_{2'}) W_{31}[n_1 n_2 n_{2'}(1-n_{1'}) \\ & - (1-n_1)(1-n_2)(1-n_{2'}) n_{1'}] \,\delta(p_1 \cdots)\, \delta(E_1 \cdots)\} \end{aligned} \tag{9.6}$$

（但し $d\tau = 2\,d^3p/(2\pi h)^3$）

で与えられる。運動量 p_1, p_2, p_3, p_4 は共に p_F の大きさの近くで，図示すると p_1 と p_2 の作る面と $p_{1'}$ と $p_{2'}$ の作る面とのなす角 ϕ を回転して $\phi=0$ にして重ねると右図の様になっており，p_1 と p_2 のなす角が θ となっている。



第9－1図　散乱粒子の運動量関係図

さて粘性について計算すると空間的に（例えば y 方向に）わずかに不均一速度 u を（x 方向に）持つ定常運動を考える。局所平衡の n^0 は次の通りである。

$$n^0 = \left[\exp\frac{E^0_{p\sigma} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{u}}{T} + 1\right]^{-1} \tag{9.7}$$

運動方程式は div $\mathbf{u}=0$ と，T と化学ポテンシャル μ に空間変化が無いとして，

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n^0}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial E^0_{p\sigma}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n^0}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial n^0}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial E^0_{p\sigma}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{2}\sum_{ik\ell}\frac{\partial n^0}{\partial E_{p\sigma}}\left(p_i\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial p_k} - \frac{1}{3}p_\ell\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial p_k}\delta_{ik}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = I(n) \tag{9.8}$$

となる。この方程式の左辺を局所平衡の状態に置き，右辺に次の平衡のずれを代入する。

$$\delta n = n - n^0 = \frac{\partial n^0}{\partial E}\psi \tag{9.9}$$

(9.8) 式は次の通りになる。

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial n^0}{\partial E_{p\sigma}}p_i\frac{\partial E_p}{\partial p_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{m^{*3}}{2(2\pi h)^6}\frac{1}{T}\int d\theta\, d\varphi\, d\varphi_2\frac{\sin\theta}{\cos\theta/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_{2'}\, C_{2'}(21'2')\, W_{22}\, n_1^0\, n_2^0\, (1-n_{1'}^0)(1-n_{2'}^0)\,(\psi_1+\psi_2-\psi_{1'}-\psi_2)$$

$$\delta(E_1+E_2-E_{1'}-E_{2'})+C_{13}(121'2')W_{13}\,n_1^0(1-n_2^0)(1-n_{1'}^0)(1-n_{2'}^0)$$

$$(\psi_1-\psi_2-\psi_{1'}-\psi_{2'})\,\delta(E_1-E_2-E_{1'}-E_{2'})+C_{31}(121'2')W_{31}\,n_1^0\,n_2^0$$

$$n_{2'}^0(1-n_{1'}^0)(\psi_1+\psi_2-\psi_{1'}+\psi_{2'})\,\delta(E_1+E_2-E_{1'}-E_{2'}))\tag{9.10}$$

ここで ϕ_2 は $\mathbf{p}_2$ の azimuthal angle である。この形を見ると対称性より ψ が次の形をとることが解る。

$$\psi(p)=p_i\frac{\partial E_{p\sigma}}{\partial p_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)Q(E_{p\sigma})\tag{9.11}$$

これを (9.10) に代入すると，有効緩和時間 Q が求まる。これを用いて準粒子の運ぶ運動量の流れを計算すると，

$$\Pi_{\ell m}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int p_\ell\frac{\partial E_p}{\partial p_m}\delta n_p\,d\tau\tag{9.12}$$

の様になり，粘性係数テンソルは $\Pi_{\ell m}$ と $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ との比例係数として，

$$\eta_{\ell mik}=-\sum_{ik}\int\frac{d\tau}{(2\pi h)^3}Q_{p\ell}\frac{\partial E_p}{\partial p_m}\left(p_i\frac{\partial E_p}{\partial p_k}-\frac{1}{3}p_\ell\frac{\partial E_p}{\partial p_\ell}\delta_{ik}\right)\frac{\partial n}{\partial E_p}\tag{9.13}$$

の形に求まる。$T=0$ の近くでは C_{13} と C_{31} は $(T/\triangle)^2$ になるので省略出来る。T_c 近くでは，

$$\eta_{\ell mik}=\eta_n(T_c)\left[\delta_{\ell i}\,\delta_{mk}+\delta_{\ell k}\,\delta_{mi}-C(1-T/T_c)^{\frac{1}{2}}\right]\tag{9.14}$$

となり，C は ABM モデルで約 3.88 で BW モデルでは 3.06 の値になっている。A_1 相では C = 5.48 位の大きさで，流れとギャップの軌道ベクトル ℓ が垂直だと A と A_1 相で C は 0 となっている。また T = 0 近くで BW モデルでは η は常数で弱結合で，0.434 $\eta_n(T_c)$ になる。実験[35),36)] と粘性係数は比較的良く合うと云って良い。

拡散熱伝導率 κ_D については同様に小さな温度勾配があるとすると，運動方程式の右辺は，

$$-\frac{\partial n}{\partial E_p}\left(\frac{E_p}{T}-\frac{1}{E_p}\frac{\partial \triangle^2}{\partial T}-S\frac{\partial E_p}{\partial \epsilon_p}\right)\frac{\partial E_p}{\partial p}\cdot\nabla T \tag{9.15}$$

となり，これより ψ として，

$$\psi = Q(T)\frac{\partial E_p}{\partial p}\nabla T \tag{9.16}$$

の形を仮定すると $t=\dfrac{E}{T}$ と云う変数を導入して，それについて Q を対称と反対称部分に分け，それらの間の関係を質量の流れの保存則 $\int\dfrac{\partial E_p}{\partial p}\delta n\ d\tau=0$ を充す様にきめる。その様にきめた Q を用い，I(n) より Q を計算して求める。この求めた Q を用い，熱の流れ，

$$H = \int E_p\left(\frac{\partial E_p}{\partial p}\right)\frac{\partial E^0}{\partial E_p}\psi\, d\tau = -\kappa_D\cdot\nabla T \tag{9.17}$$

を計算すると，κ_D が，

$$\chi_D = -\frac{1}{3}\int E_p\left(\frac{\partial E_p}{\partial p}\right)^2\frac{\partial n^0}{\partial E_p}Q\ d\tau \tag{9.18}$$

より求まり，T_c 附近では次の振舞いをする。

$$\kappa_D = \frac{\chi(T_c)}{T}\left[1-c'(1-T/T_c)\right] \tag{9.19}$$

c' の項は $(\triangle/T)^2$ のオーダーなので，そこ迄の計算はまだされていない。$T=0$ の附近では BW モデルで $\chi_D T$ が常数となり正常液体の場合との比は 1 のオーダーである。実験的[37]に T_c 以下で χ_D は極めて小さくなり，殆ど無い位なのでその理由が十分に説明されていない。

スピン拡散係数についてはスピンの流れを磁場のある所で考える。そうすると E_p に化学ポテンシャルの $\mu_\uparrow-\mu_\downarrow=-\gamma\hbar(H_0+\mathbf{r}\cdot\nabla H)$ の形を通しての空間的変化を作って磁場の勾配による上と下向きスピンの数に差が出来ることを考えると運動方程式は

$$-\nabla_p n^0(p,\sigma)\nabla_r E_p=\frac{m^{*3}T^2(2\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6}\int d\Omega W(\theta,\varphi)\int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_2'\ n_1^0 n_2^0(1-n_{1'}^0)$$

$$(1-n_{2'}^0)(\psi_1+\psi_2-\psi_{1'}-\psi_{2'}) \tag{9.20}$$

の形となり，これを眺めて ψ を

$$\psi = -Q \nabla_r E_p \nabla_p E_p^0 \tag{9.21}$$

の形にすると，スピンの流れはスピン拡散係数 D と次の様に結びついている。

$$J_{S_z} = \frac{1}{2}(J_\uparrow - J_\downarrow) = \frac{1}{2}\int Q(\nabla_r E_p \cdot \nabla_p E_p^0)\nabla_p E_p^0 d\tau = -\frac{\hbar}{2} D\nabla(\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow) \tag{9.22}$$

少し面倒な計算を行い Q を求めて，ランダウパラメーター Z_0 に角度依存性がないとすると T_c 近くで，$\tau(T_c)=\tau_c$ と書くと

$$D = \frac{1}{3} v_F^2 (1+\frac{1}{4}Z_0)\ \tau_c \left[1-C(1-T/T_c)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{9.23}$$

と求まる。$\tau(T)$ は正常フェルミ液体でのスピン緩和時間で T^{-2} に比例する。C は状態の角度依存性できまる常数である。T＝0 で BW モデルで $D \propto T^{\frac{1}{2}}$ の形となる。実験的には[38] T_A の近くで D の変化はあまり顕著に見えず，これは実験の精度も十分でない為もある。

§10. 音波伝播

音波には 0，1，2，3，4 の 5 種類があり，この内 0，1，4 が ^{3}He の超流動で観測にかかっている。[39),40),41)] 零音波は §2 で述べた様に外から加えた圧力などの急激な変化に媒体が局所平衡を保ちながら変化を伝え得ないで，フェルミ面自身の変形が共鳴振動の形で集団励起を起して密度のゆらぎの形で伝播さ させてゆく高振動の云わば超音波の励起である。密度の応答関数が次の様に書かれ，

$$\chi_d(q,\omega) = F_0\ \chi_d^0(q,\omega)/1+F_0\ \chi_d^0(q,\omega) \tag{10.1}$$

こゝに

$$\chi_d^0(q,\omega) = 2N(0)\left[1-\frac{1}{2}s\ \ell n\frac{1+s}{1+s}+\frac{1}{2}i\pi s\,\theta(1-s)\right],\quad (s=\omega/q\,p_F)$$

で与えられ，(10.1) の極が零音波励起を与える。F_0 が大きいと (10.1) は，

$$\chi_d(q,\omega) = \frac{2N(0)}{1+F_0-3S^2} \tag{10.2}$$

と書け，$\omega = c_0 q$ の形にすると零音速は $c_0 = \frac{v_F}{\sqrt{3}}(1+F_0)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}F_1)$ となる。^{3}He では後述の第1音波の音速 c_1 と1％位しか異らない。尚 F_0 が小さいと，零音速は $c_0 = v_F(1+\frac{1}{3}F_1)(1+2e^{-\frac{1}{2N(0)F_0}-2})$ の形となる。密度変化を伝えてゆく準粒子の寿命を τ とすると零音波は周波数を ω とすると $\omega\tau \gg 1$ の領域で，一方 $\omega\tau \ll 1$ では準粒子同志の衝突によって熱平衡を保ちながら密度変化を伝播させてゆく。$\omega\tau \simeq 1$ の領域では音波の吸収が極めて大きい。第1音波は云わゆる圧力波と云われるもので圧力Pの密度 ρ に対する変化によって表わせる，即ち音速 c_1 は密度の連続の方程式と Euler の運動方程式より $c_1^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ の形で書ける。一方フェルミ液体では化学ポテンシャル μ_0 が数密度 N/V（N は粒子数，V は体積）だけに依存することにより，$\partial\mu_0/\partial N = -\frac{V}{N}\frac{\partial\mu_0}{\partial V} = -\frac{V^2}{N}\frac{\partial P}{\partial V}$ の関係より，

$$c_1^2 = \partial P/\partial(\frac{mN}{V}) = \frac{1}{m}N(\frac{\partial\mu_0}{\partial N}) = \frac{1}{3}v_F^2(1+F_0)(1+\frac{1}{3}F_1) + O((\frac{\triangle}{\varepsilon_F})^2) \tag{10.3}$$

ここで超流動である効果は $(\triangle/\varepsilon_F)^2$ であまり効かない。ここに $1+F_0$ は分子場効果で c_1 も c_0 も形は殆ど同じである。

次にまだ観測されていない第二音波はエントロピー S を伝播する温度波で，流れ $\mathbf{j}_s = TS\mathbf{v}_n$ によって運ばれる。^{3}He では異方性より密度もテンソル，エントロピーSも伝播ベクトル q の方向によるが，大体のオーダーとして音速 c_2 は ^{4}He の場合と同形の $c_2^2 = (\rho_s/\rho_n)TS^2/(\rho C_V)$（$C_V$ は定積比熱）で与えられ，約 $10^{-2}\,v_F$ のオーダーで減衰は高木[15]の2流体モデルによる計算だと ^{4}He のそれの 10^8 倍大きいので中々観測され難い。

第3音波は超流動の表面波の振動の伝播でこれも測定にかかっていない。これは Capilary wave と古典液体で云われるもので表面張力を γ とすると ^{4}He では，$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho}\frac{\gamma}{\rho}k^3$ で与えられる。これは ^{3}He ではまだ観測されていない。この分散式の導出

は Khalatnikov[42] を参照せよ。

第 4 音波は ^{3}He を細管に宝石磨き用のルージュとか CMN の微粒子の粉末をつめたものに通すと，それにノーマル成分がひっかかって動かなくなり，超流動成分だけが密度変化を伝播する。連続の方程式は $\mathbf{v}^{(n)} = 0$ より次の様になる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^{(s)}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^{(s)}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \tag{10.4}$$

一方，$\mathbf{v}^{(s)}$ の運動方程式が必要で，それは ^{4}He や超伝導でのと同様に $v^{(s)}$ は化学ポテンシャル μ_0 の勾配に比例すると仮定する。

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(s)}}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla \mu_0 \tag{10.5}$$

一方 $\nabla \mu_0 = \dfrac{\partial \mu_0}{\partial \rho} \nabla \rho = \dfrac{m\, c_1^2}{\rho} \nabla \rho$ に注意すると，

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 - c_1^2 (\rho^{(s)}_{\alpha\beta} / \rho)\, \partial^2 \rho / \partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} = 0 \tag{10.6}$$

となり，これより第 4 音波の音速は，

$$c_4^2(q) = c_1^2 (\rho^{(s)}_{\alpha\beta} / \rho)\, q_{\alpha}\, q_{\beta} \tag{10.7}$$

の形となり，今 ABM model では T_c の近くで $\bar{\rho}_s = \frac{1}{3}\, \mathrm{Tr}\, \rho_s$ と書くと，

$$c_4^2(q) = c_1^2 (\bar{\rho}_s / \rho) \frac{3}{5} (2 - \cos^2 \theta) \tag{10.8}$$

と書けて，ここに θ は伝播ベクトル $\mathbf{q}$ と粒子対の軌道ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ との間になす角である。実際は $\boldsymbol{\ell}$ は細管の壁に垂直になろうとし，$\mathbf{q}$ は細管の方向を向いているので，$\theta = \frac{\pi}{2}$ がいつも観測にかかり易い。これは Wheatley ら[41] によって実験によって観測された。

さて零音波と第一音波の吸収と分散については，真木 — 海老沢[43]，Wölfle[44] Serene,[45] 永井[46] らの理論的仕事がされている。密度変化についての 2×2 の行列 δn の従う次の運動方程式を解くことにより精度に計算される。即ち

$$\omega\delta n - \delta n\ \varepsilon^0_{k+} + \varepsilon^0_{k-}\delta n - (n^0_{k-}\delta\varepsilon - \delta\varepsilon n^0_{k+}) = -i I(\delta n - \delta n^{\ell}) \tag{10.9}$$

ここで $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2$ で $\delta\varepsilon$ は Landau の準粒子エネルギーの一般化であり，n^0_k と ε^0_k は平衡状態での密度と準粒子のエネルギーで、$I(\delta n')$ は衝突積分で $\delta n' = \delta n - \delta n^{\ell}$ は局所平衡からのずれを表わし，δn^{ℓ} は衝突の無い場合の方程式 $\Omega\{\delta n^{\ell}\} = (n^0_{k-}\delta\varepsilon - \delta\varepsilon n^0_{k,+}) + \omega\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon$ に従う。($f(E)$ はフェルミ関数）。これらの人々の計算によると ABM モデルでは T_c のすぐ下の低温で集団励起 mode による δ 関数型の peak が $\omega = 2\left[\frac{1}{5}(2\sqrt{6}-3)\right]^{\frac{1}{2}}\triangle(T)$ と $\sqrt{\frac{4}{5}}\triangle(T)$ に出来，BW モデルでは $\sqrt{\frac{12}{15}}\triangle(T)$ に出来るが，前者の peak は対のこわれる機構により damp して巾が出来るが，後者の場合には衝突の効果を取り入れないと巾が出て来ない。その場合衝突積分を s ,p と d 迄取った緩和時間近似を取ることにより実験にかかる振動数に依存する減衰を大体説明することが出来る。[44)]

^{3}He にはスピンがあるので ^{4}He には見られない super spin current, J^{sp} , が，オーダーパラメーターが空間的に変化している場合は流れることになる。 スピンの連続の方程式は，

$$\partial S_i/\partial t + \partial/\partial x_\alpha J^{sp}_{i\alpha} = 0 \tag{10.10}$$

今 ^{4}He の場合の超流動速度 $\mathbf{v}^{(s)} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla\varphi$ の位相による表式の一般化

$$J^{sp}_{i\alpha} = \frac{\hbar}{2m}\rho^{spin}_{ij\alpha\beta}\ \Omega_{j\beta} \tag{10.11}$$

でここに Ω はスピンベクトル $\mathbf{d}$ の空間的な微小増加 δR により $\delta d_i = \frac{2m}{\hbar}\varepsilon_{ijk} d_j \Omega_k \delta R_\alpha$ と書いた時の dyadics で速度の次元を示す。例えば $\mathbf{d}$ が y 軸方向にある時は $\rho^{spin}_{ij\alpha\beta} = \delta_{ij}\ \rho^s_{\alpha\beta}$ (i , j は z か x で $\rho^s_{\alpha\beta}$ は超流動密度), $\rho^{spin}_{yi\alpha\beta} = 0$ となる。 (10.11) を (10.10) に代入して，

$$\partial S_i/\partial t + \hbar/2m\ \rho^{spin}_{ij\alpha\beta}(\partial\Omega_{j\beta}/\partial x_\alpha) = 0 \tag{10.12}$$

となる。一方 Ω の運動方程式は NMR の $\mathbf{d}$ の運動方程式で外場 H_e を 0 とした

$\partial \mathbf{d}/\partial t = -(\gamma^2/\chi)\mathbf{d}\times\mathbf{S}$ の空間微分を取ると，次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial d_i}{\partial x_\alpha}\right) = -(\gamma^2/\chi)\epsilon_{ijk}\, d_j\,(\partial S_k/\partial x_\alpha) \qquad (10.13)$$

これと (10.11) の下に書いた関係式 $\partial d_i(n)/\partial x_\alpha = (2m/\hbar)\epsilon_{ijk}\, d_j\, \Omega_{k\alpha}$ と較べて

$$\partial \Omega_{k\alpha}/\partial t = -(\gamma^2\hbar/2m\chi)(\partial S_k/\partial x_\alpha) \qquad (10.14)$$

の形となる。これを用いると，

$$\partial^2 S_i/\partial t^2 - [\gamma^2\hbar^2/\chi(2m)^2]\,\rho^{\mathrm{spin}}_{ij,\alpha\beta}(\partial^2 S_j/\partial x_\alpha\,\partial x_\beta) = 0 \qquad (10.15)$$

となり spin current の伝播速度，云わゆるスピン波の速度 c_s は

$\chi = \frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2 N(0)/1+\frac{1}{4}Z_0$ と $N(0) = \frac{3Nm^*}{2p_F^2}$ より，

$$c_s^2 = \frac{1}{3}v_F^2\,(m^*/m)\,(1+\frac{1}{4}Z_0)(\chi_n/\chi)\,\rho^{s}_{ij}/\rho \qquad (10.16)$$

の形で第 4 音波の音速 c_4 とは，

$$c_s^2 = [1+\frac{1}{4}Z_0/(1+F_0)]c_4^2 \qquad (10.17)$$

の関係で結ばれていて大変小さい。スピン波はまだ実験的に観測されていない。この方面は真木ー恒藤[47]，Combescot[48] の仕事があり，こゝでは Leggett[15] の整理された形で述べたが，筆者[49] による Josephscon 効果の類比への応用もある。

§ 11. イオン易動度

ここでは筆者の理論[50] を述べてみよう。イオンの反跳効果は入っていないが，これ以外に仕事がまだされていないからである。

質量の大きいイオンがゆっくりと電場 $\mathbf{E}$ によって超流動 ^{3}He 中を動いている場合を考える。このイオンに準粒子が次々と弾性散乱をして運動量を与えてゆくのであるが，まづある 1 個の準粒子が散乱によって波数が $\mathbf{k}$ から $\mathbf{k}'$ に変ったとする。今準粒子の分布関数を $n_k = [\exp(\beta E_k)+1]^{-1}$ とすると，衝突によるイオンの運動量変化は 次

の様に与えられる。

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} h(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\, n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'})\, W_{V_D}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') \tag{11.1}$$

ここに V_D はイオンの速度で $W_{V_D}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}')$ は準粒子の選移確率である。イオンと準粒子が平衡状態にある時の準粒子の分布関数を $\bar{n}_k = [\exp(E_k - \mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_D)/T + 1]^{-1}$ とすると，その時には $dP/dt = 0$ となることから，

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} h(\mathbf{k}' - \mathbf{k})[n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'}) - \bar{n}_k(1 - \bar{n}_{k'})]\, W_{V_D}(k \to k') \tag{11.2}$$

と置くことが出来る。(11.2) 式の $\mathbf{V}_D$ の次数が 1 次の所に興味があるので，$n_k - \bar{n}_k$ を展開して $\mathbf{V}_D\cdot\mathbf{k}\ \partial n_k/\partial E_k$ とすると，W_{V_D} 中の Doppler 効果が省略出来るので，$W_{V_D} \simeq W_0$ と置ける。今イオンの易動度を μ とすると次式が成立する。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{e}{\mu}\mathbf{V}_D = -e\mathbf{E} = -\hbar\, V_D \sum_k k^2 \cos\theta_{k,V_D} \frac{\partial n}{\partial E_k}\sigma(k) + O(V_D^2) \tag{11.3}$$

ここで θ_{k,V_D} は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{V}_D$ のなす角度で，$\sigma(k)$ は θ を $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ とのなす角度とすると，

$$\sigma(k) = \int d\Omega(1 - \cos\theta)\,\sigma(k,\theta) = \int d\Omega(1 - \cos\theta) \sum_{k'} W_0(\mathbf{k} \to \mathbf{k}')\,\delta(\cos\theta - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}') \tag{11.4}$$

である。ここで W_0 としては，ノーマルでの選移確率と超流動中の準粒子になった為の干渉因子 $I(k,k') = \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k}\frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} - \frac{\triangle^*\triangle}{E_k E_{k'}}\right)$ との積を用いる。$\sigma(k,\theta)$ を $(\sigma_0 + \sigma_1\cos\theta + \sigma_2\cos^2\theta)\, I(k,k')$ と書けるとして計算して，A 相では ABM 状態で，イオンと一緒に動く系に移ると，軌道ベクトル ℓ は $\mathbf{V}_D$ に平行になろうとし，核磁気相互作用で ℓ は $\mathbf{d}$ に平行になろうとする。一方ベクトル $\mathbf{d}$ は磁場があるとそれに垂直になろうとする。典型的な場合として $\mathbf{V}_D /\!/ \ell$ と $\mathbf{V}_D \perp \ell$ の場合を ABM 状態で考え，B 相では等方的な BW 状態で μ を計算すると T_c 附近では，ノーマルでの易動度を μ_n とすると，

$$\mu^{-1} = \mu_n^{-1}[1 - c(1 - T/T_c)^{\frac{1}{2}}] \tag{11.5}$$

となる。ここで c は常数で，

$$
\begin{aligned}
c &= 2.56\left[\sigma_0 - 0.25(\sigma_1-\sigma_2)/\sigma_0 - 0.2\sigma_1 + 0.3\sigma_2\right], && \text{for } \mathbf{V}_D /\!/ \boldsymbol{\ell} \\
&= 2.56\left[\sigma_0 + 0.25\sigma_1 - 0.75\sigma_2/\sigma_0 - 0.2\sigma_1 + 0.55\sigma_2\right], && \text{for } \mathbf{V}_D \perp \boldsymbol{\ell} \qquad (11.6) \\
&= 1.683 && \text{for isotropic gap.}
\end{aligned}
$$

で与えられる。一方 T＝0 の近くでは，n をエネルギーキャップ$\triangle(\theta,\phi)$の node の次数とし，m を $\sigma(k,\theta)(1-\cos\theta)$ のそれとすると，

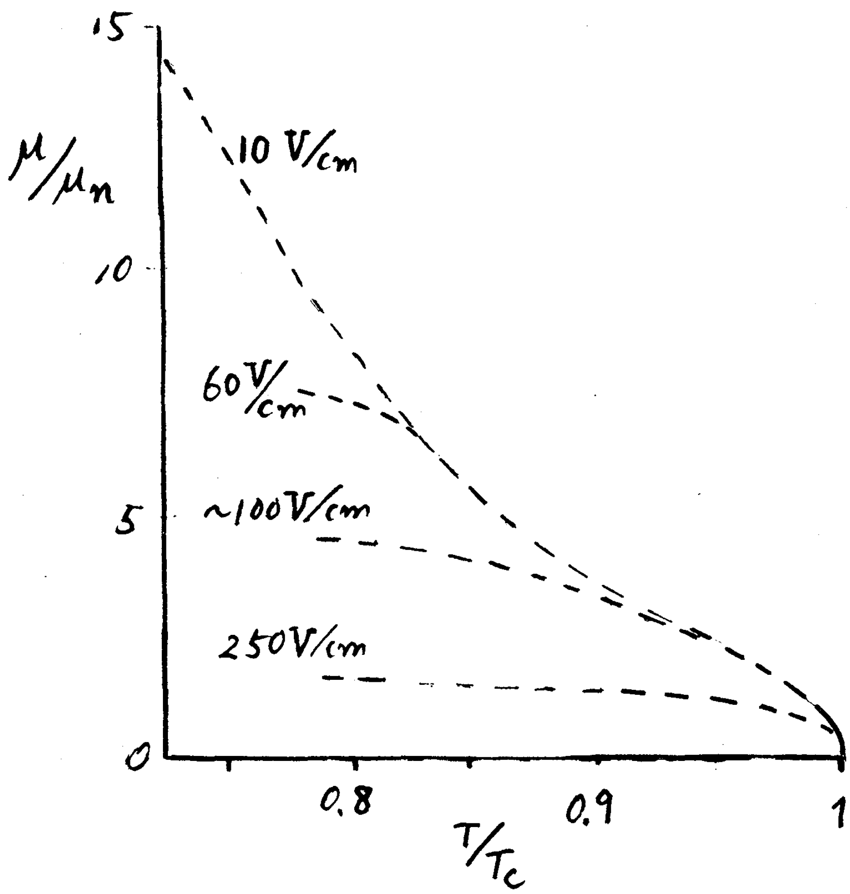
$$
\begin{aligned}
\mu^{-1} &\propto (T/\triangle)^{m+2/n} && \text{for } \mathbf{V}_D /\!/ \boldsymbol{\ell} \\
&\propto (T/\triangle)^{m+4/n} && \text{for } \mathbf{V}_D \perp \boldsymbol{\ell} \qquad (11.7) \\
&\propto (T/\triangle)\,e^{-\triangle/T} && \text{for isotropic gap.}
\end{aligned}
$$

となる。$\triangle$ は$\triangle(\theta,\phi)=\triangle f(\theta,\varphi)$ とした時のギャップの大きさである。一方 ^{4}He 中のロトンによるイオンの易動度 μ はロトン極小のエネルギーを $\triangle$ とすると，

$$\mu^{-1} \propto T e^{-\triangle/T} \qquad (11.8)$$

と求められている。(11.7) の isotropic gap の μ^{-1} はこれと類似でそこの$\triangle$ がロトン極小のエネルギーに対応している。

最近ヘルシンキで高野安正[51]氏の所で B 相での実験が行われ，第 11−1 図に示された結果が出ているが，定



第 11 − 1 図　イオン易動度（B相）

性的に筆者の理論の (11.5) 式と合うが，定量的には実験値の c が約 2 倍の大きさとのことで，パラマグノン効果や反跳効果を取り入れないと定量的に合うかも知れない。

§ 12. スピン緩和効果

スピン振動を表わす (8.5) と (8.6) の式に緩和効果が入っていないのでそれを拡張する。[52] スピン $\mathbf{S}$ を平衡状態の値と考えると，それは対による部分 S_p と正常な準粒子から部分 S_q とから成り，$\mathbf{S}=\mathbf{S}_p+\mathbf{S}_q$，その各々が夫々の平衡値 $\mathbf{S}_p^e$ と $\mathbf{S}_q^e$ に緩和してゆくと考える。^{3}He のスピンに働く有効磁場を考える時に流体力学的極限 $\omega\tau$ (τ はスピンの緩和時間) $\to 0$ ではその中の分子場は，$-\gamma^2\chi^{-1}\mathbf{S}$ (χ は平衡状態の帯磁率) と書けるが、一方無衝突極限 $\omega\tau\to\infty$ では $\mathbf{S}_p$ だけが残り，その異った成分の間に Josephson 型のトンネル効果を起すから $-\gamma^2\chi_c^{-1}S$ (χ_c は対の帯磁率) で置き換えられる。両極限の間では両方の分子場の間の値へ緩和する。フェルミ液体の分子場効果の入っていない帯磁率に 0 をつけると，$S_p^e=(\chi_{c0}/\chi_0)\mathbf{S}=\lambda(T)\mathbf{S}$ の関係を充すが $\mathbf{S}_p^e=\dfrac{\chi_{co}H}{\gamma^2}=\langle c_\uparrow^+c_\uparrow\rangle_{pair}-\langle c_\downarrow^+c_\downarrow\rangle_{pair}$ の関係で分布数は不変で u_k と v_k に惹き起された変化を chemical potential にだけ $\pm\dfrac{\gamma}{2}\hbar H$ の変化が加わったとして計算すると，ABM で $S_p^e=\dfrac{\gamma^2\hbar}{2}N(0)(1-f(T))H$ となり，$\dfrac{\lambda_{ABM}}{\lambda_{BW}}(T)=(1-f(T))\left\{\begin{array}{c}1\\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}Y(T)}\end{array}\right.$ で $f(T)=\int\dfrac{d\Omega}{4\pi}\int d\varepsilon\,\dfrac{\varepsilon^2}{E^2}\,\dfrac{1}{2}\,\beta\,\mathrm{sech}^2\dfrac{\beta E}{2}$ となる。

対スピンのゆらぎ $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{S}_p-\mathbf{S}_p^e=-(\mathbf{S}_q-\mathbf{S}_q^e)$ を考えるとこの両極限の間の有効磁場の分子場は $\mathbf{S}$ と $\boldsymbol{\eta}$ の線型結合で書ける筈で，完全な緩和の時は $\eta=0$ の場合と全然緩和が起らない。即ち $S=S_p$ の場合にそれが移行することを考えると，$H_{eff}=\gamma\mathbf{H}_e-\dfrac{\gamma^2}{\chi}\mathbf{S}-\gamma^2(\chi_c^{-1}-\chi^{-1})\dfrac{S_p-S_p^e}{(1-\lambda)}$ と書ける。$(1-\lambda)$ の因子は完全緩和の時に必要なものである。上記の最後の項は帯磁率の逆数の分子場の関係式

$\chi_c^{-1}=\chi_{co}^{-1}+\dfrac{1}{4}Z_0\,\chi_{no}^{-1}\,(\chi_{no}=\dfrac{\gamma^2h^2}{2}N(0))$ と $\chi^{-1}=\chi_0^{-1}+\dfrac{1}{4}\chi_{no}^{-1}$ を考慮すると $-\dfrac{\gamma^2}{\chi_{co}}\eta$ と書ける。

一方 dipole 相互作用による偶力 $\mathbf{R}_D$ は $\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{R}_D = \frac{\partial E_D}{\partial \theta}$ を充すが $\mathbf{S}$ の内で Cooper 対だけに働くので $\frac{d(\mathbf{S}_p - \mathbf{S}_p^e)}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} - \frac{d\,S_p^e}{dt} = (1-\lambda)\frac{d\mathrm{S}}{dt} = (1-\lambda)\frac{\partial E_D}{\partial \theta}$ となる。今 η は τ で緩和することも考慮に入れると次の方程式に従う。

$$\frac{d\eta}{dt} = (1-\lambda)\frac{\partial E_D}{\partial \theta} - \frac{\eta}{\tau} \tag{12.1}$$

今，d(n) が x−y 面内回転角 θ で表わせる，即ち上向きスピンの対と下向きスピン対の位相差の半分で表わせるとすると $\mathbf{d}$ の時間変化は有効磁場で、

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma\left[\mathbf{H}_e - \frac{\gamma}{\chi}\mathbf{S} - \frac{\gamma}{\chi_{co}}\eta\right] \tag{12.2}$$

と表わせる。これに偶力

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{R}_D = \frac{\partial E_D}{\partial \theta} \tag{12.3}$$

の式を加えて (12.1)，(12.2) と (12.3) が緩和を表わす基本方程式である。 さて，(12.2) から η を求めて時間微分を行うと (12.1) の関係も見て

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\chi_{co}}{\gamma}\ddot{\theta} - \frac{\chi_{co}}{\chi}\frac{\partial E_D}{\partial \theta} = (1-\lambda)\frac{\partial E_D}{\partial \theta} - \frac{\eta}{\tau} \tag{12.4}$$

となる。この2番目の式と3番目の式を $\chi_{co}^{-1} - \chi_0^{-1} + \chi^{-1} = \chi_c^{-1}$ を用いてまとめて，もう一度時間微分して (12.2) を用いると Leggett-Takagi[52] の導いた

$$\frac{d}{dt}\left(\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi_c}\frac{\partial E_D}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\tau}\left(\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi}\frac{\partial E_D}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{12.5}$$

と云う重要な方程式が導かれる。ここでスピン緩和時間の τ はノーマル状態の 準粒子のフェルミエネルギーでの緩和時間に等しく 7×10^{-8} sec である。

NMR の線巾や残響効果の緩和を求める為に筆者の仕事に[53]沿って説明する。(12.5) 式を次の様に書き直す。

$$\frac{d}{dt}\left(\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi_c}\frac{\partial E_D}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\tau}\left(\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi_c}\frac{\partial E_D}{\partial \theta}\right) = \frac{\gamma^2}{\tau}\left(\frac{1}{\chi_c} - \frac{1}{\chi}\right)\frac{\partial E_D}{\partial \theta} \tag{12.6}$$

今次のエネルギー表式を考える。下式で Ω は緩和の無い時の振動数で約 1.5×10^{5}Hz である。

$$2\,\Omega^2\,\frac{\chi}{\chi_c}\,k^2(t) = \frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma^2}{\chi_c}\,E_D(\theta) \tag{12.7}$$

すると (12.6) 式は次の関数 $y = 2\dot{\theta}^{-1}\Omega^2\,\frac{\chi}{\chi_c}\,\frac{d}{dt}k^2(t)$ を考えることにより,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}\,y = \frac{\gamma^2}{\tau}\left(\frac{1}{\chi_c} - \frac{1}{\chi}\right)\frac{\partial E_D}{\partial\theta} \tag{12.8}$$

と書けて、この線型微分方程式はすぐ積分出来て

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi_c}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta} = \frac{\gamma^2}{\tau}\left(\frac{1}{\chi_c} - \frac{1}{\chi}\right)\int_0^t e^{(t'-t)/\tau}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta}\,dt \tag{12.9}$$

と書ける。この右辺を次々に部分積分して第一番目の項を左辺に移すと,

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta} = -\gamma^2\tau\left(\frac{1}{\chi_c} - \frac{1}{\chi}\right)\left[\frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta}(t) - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta}(0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right](1 + 0(\tau\Omega)) \tag{12.10}$$

を得るが今 t の時間として Ω^{-1} のオーダーのものを考えると $\tau\Omega$ は 100^{-1} で 1 % の誤差でまた共鳴振動数 Ω_r が零に近づけもっと良い近似で,

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma^2}{\chi}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta} = -\frac{\Gamma\gamma^2}{\chi\,\Omega^2}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta} \tag{12.10}$$

の形に書ける。ここで $\Gamma = \tau\,\Omega^2\,(\chi_c/\chi - 1)$ である。さて (12.10) に $\dot{\theta}$ をかけて時間で積分すると、

$$2\Omega^2 k^2(t) = \frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma^2}{\chi}\,E_D(\theta) = 2\Omega^2 k(0)^2 - \frac{\Gamma\gamma^2}{\chi\Omega^2}\int_0^t \dot{\theta}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial E_D}{\partial\theta}\,dt \tag{12.11}$$

を得る。ここに $2\Omega^2\,k^2(0)$ は散逸の無い時のエネルギーで初期条件であたえられた input である。この右辺の第 2 項を部分積分して (12.10) を用いると，第 2 項は

$$-\frac{\Gamma\gamma^2}{\chi\Omega^2}\left\{\left[\dot{\theta}\frac{\partial E_D}{\partial\theta}\right]_0^t+\frac{1}{2}\frac{\Gamma\gamma^2}{\chi\Omega^2}\left[\left(\frac{\partial E_D}{\partial\theta}\right)^2\right]_0^t+\frac{\gamma^2}{\chi}\int_0^t\left(\frac{\partial E_D}{\partial\theta}\right)^2 dt\right\} \tag{12.12}$$

となる。今週期を T として，振動の一週期後 $t=T$ でのエネルギー $2\Omega^2k^2(t)$ を求めると，(12.12) の中で境界値を代入した項は消えて，

$$2\Omega^2k^2(t) = 2\Omega^2k^2(0) - \frac{\Gamma}{\Omega^2}\left(\frac{\gamma^2}{\chi^2}\right)^2\int_0^t\left[\frac{\partial E_D}{\partial\theta}(t',\ k^2(t'))\right]^2 dt' \tag{12.13}$$

と書ける。ここで留意するのは (12.13) の右辺は減衰するエネルギーで振動している場合の $\frac{\partial E_D}{\partial\theta}$ を用いてエネルギーの散逸の計算を行っていて，散逸の無い時のエネルギーで計算する摂動的な方法[54), 55)]ではなく，self-consistent な方程式となっていることである。

A 相については Ω_A を縦波のスピン振動数とすると，ポテンシャルと Γ は

$$E_D(\theta) = g_D(T)(1-\cos2\theta) = \frac{\chi\Omega_A^2}{\gamma^2}(1-\cos2\theta) \tag{12.14}$$

$$\Gamma_A = \tau\,\Omega_A^2\left(\frac{\chi}{\chi_c}-1\right) \tag{12.15}$$

となり (12.10) は

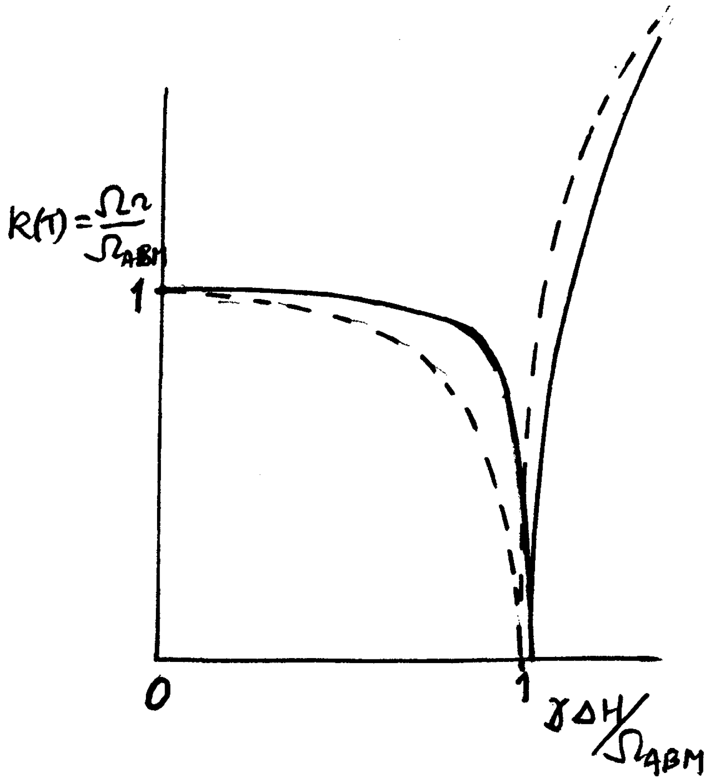
$$\ddot{\theta} + \Gamma_A\frac{d}{dt}\sin\theta + \Omega_A^2\sin\theta = 0 \tag{12.16}$$

となる。ここで θ を小さい微小振動として解くと，NMR の線巾が $\Gamma_A/2$ で与えられることが解る。

今 A 相について $k^2(t)$ を求める為に (12.13) 式の第 2 項の被積分項を，その中に出て来る $k(t)$ を $k(0)$ で近似して求めたのが真木－海老沢[54)]と Ambegaokar-Levy[55)] で $k(t)$ が $k(0)$ とあまり違わない時は大体実験の残響共鳴振動数のずれを説明出来る。しかし，共鳴振動数が消える附近ではうまくゆかず，実験とは不一致である。これを解決するために，[53)] (12.13) 式を t で微分して，出て来る微分式で振子の引き返えし点で大きく効く有力な項のみを取って，一週期 T 後の $k(T)$ を求めると，

$$k(T) = \left\{\cosh\left[\pi(\Gamma_A/\Omega_A) + \cosh^{-1}k(0)\right]\right\}^{-1} \quad 但し\quad k<1 \tag{12.17}$$

となる。同様な計算を k＞1 に対しても行って，緩和効果の入った共鳴振動数をΓ_A/Ω_Aと計算値を代入すると第12－1図の様に求まる。これは Wheatley ら[56]の実験で観測される "ringin up" つまり，k＜1 で見られる振動数が実際よりは緩和効果で取り残されて大きく見えることや，"ringing down" つまり k＞1では振動数が小さく見えることや，2～3%位に及ぶ共鳴振動数の消える時の $\gamma\triangle H/\Omega$ の値の1からのずれをうまく説明出来る。



第12－1図　A相での共鳴振動数Ω_rと input $\gamma\triangle H$との関係。実線は緩和効果のある場合，点線は無い場合。

B相の場合で，BW状態のモデルで $\hat{\omega}$ 軸が壁に pin されていない場合（Leggett 配位と云う）を考える。$E_D(\theta)$ は，

$$E_D(\theta) = \frac{4}{5} g_D(T)[2\cos^2\theta + \cos\theta] \qquad (12.18)$$

で与えられる。真木[57]の取扱いに従って k の代りに変数 $\xi = \sqrt{\frac{15}{16}}\, k = \sqrt{\frac{15}{16}}\, \gamma\triangle H/\Omega_B$ を用いると便利である。今，$z = \sqrt{\frac{16}{15}}\, \xi \sin\frac{\theta(t)}{2}$ で $\xi \geqq z + \frac{1}{4}$ の時に (12.13) 式に対応する式は，

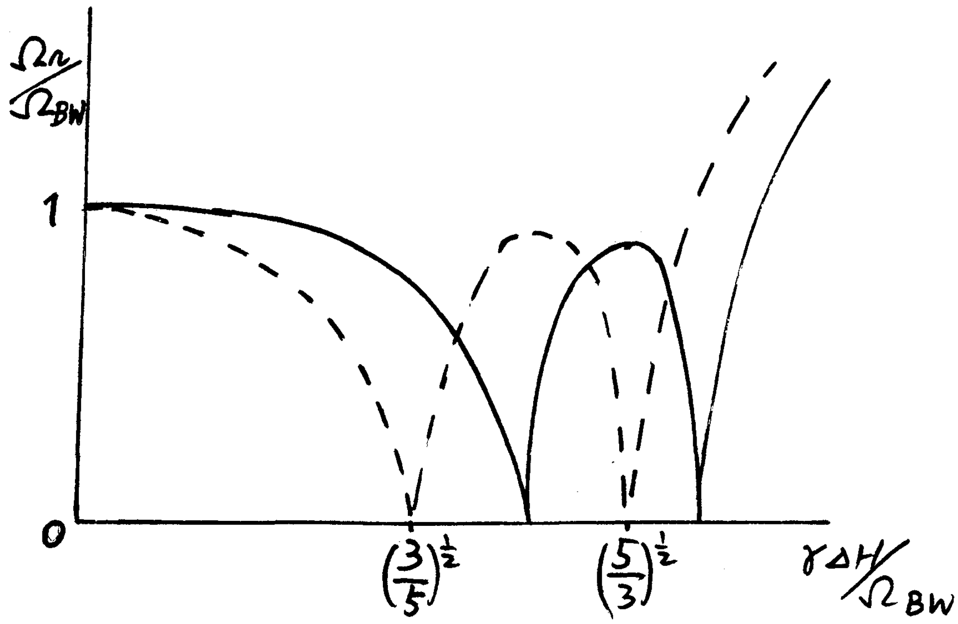
$$\xi^2(t) = \xi^2(0) - 4\sqrt{\frac{15}{16}}\, \frac{\Gamma_B}{\Omega_B} \int_0^{z(t)} dz \frac{\sqrt{1-z^2}\,(z+\frac{1}{4})^2}{\sqrt{\xi^2(t) - (z+\frac{1}{4})^2}} \qquad (12.19)$$

となる。$\xi(t)$ と $\xi(0)$ があまり異ならない時は真木－海老沢[54]の様に，(12.19)

の被積分項の $\xi(t)$ を $\xi(0)$ として計算すると，緩和した時からのずれが小さい時は実験と良く一致する。しかし共鳴振動数が消える附近では近似は悪くなる。 そこでは，(12.19) 式で $X(z) = \xi^2(z) - (z+\frac{1}{4})^2$ を導入してやはり振子の類推で，その引き返し点で大きく効く有力な項のみを残す様に，(12,19) 式を $z(t)$ について微分して得た微分式より，積分によって一週期後の $\xi(T)$ を求めると次の様になる。

$$\xi^2(T) - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left\{\left[\xi^2(0) - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{39\pi}{64}\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_B}{\Omega_B}\right\}^{\frac{2}{3}} \qquad (12.20)$$

$\Gamma_B/\Omega_B = 0.32$ の時に共鳴振動数の消える２点は各々 0.75 より 0.97 と 1.25 より 1.47 とずれる。計算で求めた振舞いは第１2− ２図で示された通りで，これは Wheatley ら[56)] の実験と良く一致する。



第１2−２図　B 相での共鳴振動数 Ω_r と input $\gamma\,\triangle H$ との関係実線は緩和のある時，点線は緩和の無い時 。

§ 13. 軌 道 波

ABM 状態はスピンに共役な位相 φ_k のみならず，軌道ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ で特長づけられる。今 ^{3}He－A の軌道角運動量 **L** とこの $\boldsymbol{\ell}$ が共役であると考える。即ち，

$$[L_i, \ell_j] = i h \ \epsilon_{ijk} \ell_k \tag{13.1}$$

今慣性能率を χ_{orb} とし，核磁気双極子相互作用エネルギーと $\boldsymbol{\ell}$ の空間変化によるエネルギーGを含む自由エネルギーを F ($\boldsymbol{\ell}$) とすると，系のハミルトニアンは

$$H = (2\chi_{orb})^{-1} L^2 + F(\boldsymbol{\ell}) \tag{12.3}$$

と表わせる。$\boldsymbol{\ell}$ の運動方程式と緩和効果を入れた **L** の運動方程式は

$$\dot{\boldsymbol{\ell}} = -\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{L}/\chi_{orb} \tag{13.3}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\ell} \times \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\ell}} - \gamma \cdot \mathbf{L} \tag{13.4}$$

となる。ここに γ は **L** の粘性係数みたいなもので，**L** の緩和を与える。(13.3) と (13.4) 式より軌道ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ の従う運動方程式は

$$\chi_{orb} \frac{d^2\boldsymbol{\ell}}{dt^2} + \gamma \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\ell}} \times \boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\ell} = 0 \tag{13.5}$$

となる。χ_{orb} は高振動極限で Leggett-Takagi [58] により，

$$\chi_{orb} = \frac{1}{2} \hbar^2 N(0) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{E_k^3} \{ |\triangle|^2 (\mathscr{D} \phi_k)^2 + \frac{\epsilon_k^2}{E_k^2} (\mathscr{D} |\triangle_k|^2) \} \tanh \frac{\beta E_k}{2} \tag{13.6}$$

で与えられる。ここに $\mathscr{D} = -i\hbar(\mathbf{k} \times \partial/\partial \mathbf{k})$ は角運動量演算子である。F ($\boldsymbol{\ell}$) には **d** ベクトルとの核磁気双極子相互作用エネルギー $-\frac{6}{5} g_D(T) (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{d})^2$ の他に $\boldsymbol{\ell}$ が方向を変えることを閉ぢこめてさせない様にしているエネルギー

$$F_{n\ell} = \sum_{k\sigma} (E_k(\boldsymbol{\ell}) - E_k(\boldsymbol{\ell}_n)) n_{k\sigma}(E_k(\boldsymbol{\ell}_n)) = \frac{1}{2} g_n(T) (1 - (\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\ell}_n)^2) \tag{13.4}$$

があると考える。ここに ℓ_n は ℓ の平衡での値で，g_n は $T \to T_c$ で緩和時間近似で

Cross [59] により $(\rho^n/\rho)\,2N(0)\triangle^3(T)/T_c$ で与えられている。また Leggett-Takagi [58] によると $\boldsymbol{\ell}$ 自身は $\boldsymbol{\ell}_n$ に

$$\dot{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{(\boldsymbol{\ell}_n - \boldsymbol{\ell})}{\tau} \tag{13.5}$$

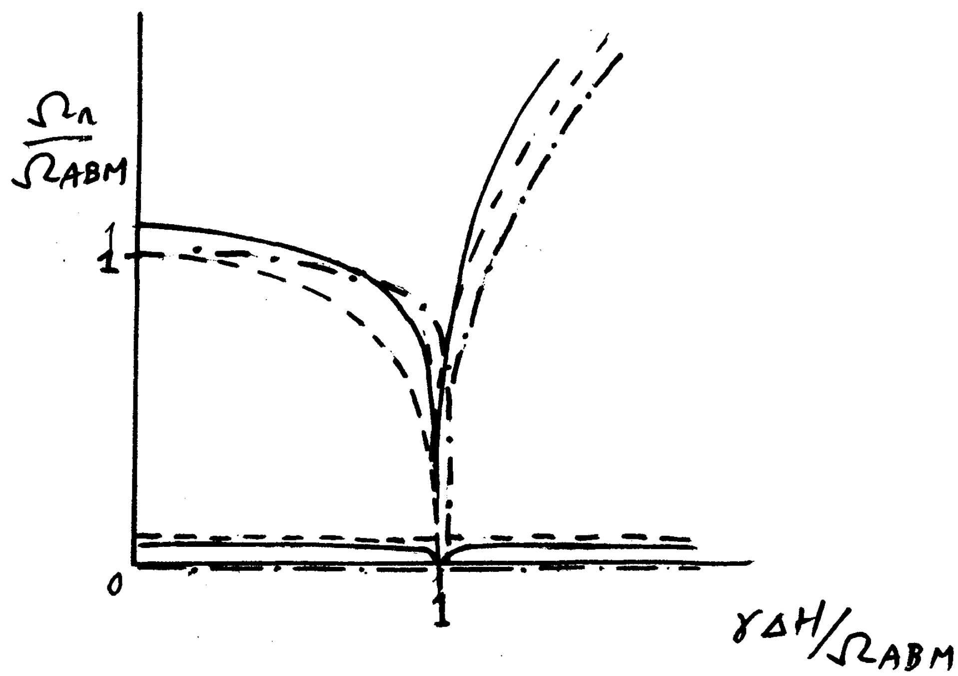
に従って緩和すると考える。τ はフェルミ面での準粒子の緩和時間であると示せて γ^{-1} とは異なる。

(13.3), (13.4) と (13.5) 式は色々の場合の解があって，当面 $\boldsymbol{\ell}$ の空間変化に伴う勾配のエネルギーGをF($\boldsymbol{\ell}$)から省くと，

(1)　$\rho^n/\rho \ll 1$ で $g_n/g_D \gg 1$ の時は **L** は $(g_n/\chi_{orb})^{\frac{1}{2}} \sim (\rho^n/\rho)^{\frac{1}{2}}\triangle/h \ll \triangle/h$ で振動する。

(2)　$T \sim T_c$ 附近では g_D/g_n $1/\tau \propto (1-T/T_c)^{-\frac{1}{2}}$ に比例する減衰常数で指数関数的に減衰する。

(3)　$g_n/g_D \lesssim 1$ でかつ非常な低温では **d** の存在する平面に垂直方向に振動する flapping mode [60] が存在する。



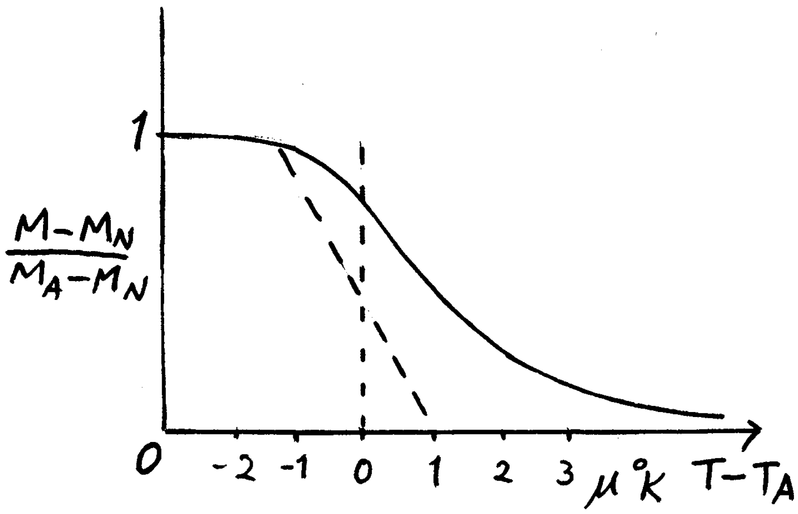
第13－1図　スピンと軌道のモードの混成波の振動数スペクトル

また非常な低温では，スピンと軌道のモードがエネルギー的に交差することや，ℓ の勾配エネルギーGを取り入れて，それを部分積分して偶力への寄与として計算すると，T＝0 で $\omega\sim v_F q$ の軌道波が存在する。

また筆者の仕事[61] も含めて，[58] 軌道モードとスピン・モードが共存する時は dipole coupling によってお互に各々の振動数は反撥によってずれる他に，軌道波の減衰モードは dambing がやや弱くなるのは第13－1図に示した様である。点線が coupling が無い場合で，実線が coupling のある場合である。鎖線は減衰モードに coupling がある場合を示した。

§ 14. fluctuationの効果

fluctuationの効果は，超流動 ^{3}He では T_c が小さいのと，Ginzburg 基準温度 $\varepsilon_c \simeq 7\zeta(3)/8\pi k_F^3 \xi_{eff}^3 T_c = 6\times10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{K}$（$\xi_{eff}$：有効 coherence length）が小さいので，極めて小さいと考えられている。しかし，T_c 直上でオーダーパラメーターのゆらぎの2乗迄取った自由エネルギーで Patton[62] が計算してみると，Wheatley[63] らの実験の約 0.5％ 程度の静的磁化 M のやや丸みを帯びた T_c 上での実験で求められた変化を説明することが出来た。平均場理論（mean field theory）からのずれは $2\mu^\circ$K のオーダーで第14－1図の通りである。この計算では軌道角動量で $\ell=1$ を取っただけであるが coherence length がやや小さ過ぎることと，$\delta M = M - M_N$ が coherence length ξ の ℓ 依存性に敏感なのでもっと精密な測定を行



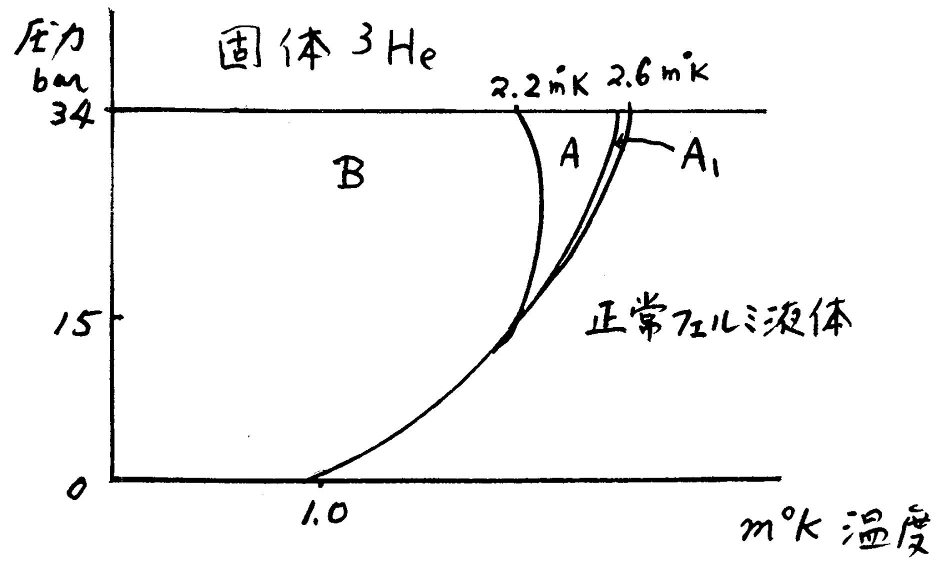
第14－1図　T_A 直上での磁化変化

う他に，やはり諸輸送係数に現われる緩和時間にこの fluctuation による ξ が効いて来るのでこれらをも精密に測ると ℓ の値をきめることが可能であると Emery[64] は述べ粘性係数の実験値ではむしろ $\ell = 1$ を示唆しているかも知れないと云っている。

Jones-Love-Moore[65] は核磁気二乗極相互作用と磁場がある場合に，p波でのもっとも一般的なG−L自由エネルギーを極小化し，くりこみ群の方法を適用して計算を行い，fluctuation により色々の超流動相への転移を示す境界で，平均場理論の２次の相転移を与えるものを１次のものに変えてせまい温度巾の fluctuation の領域の存在を示し，その両側の相が安定なので実験的に観測可能だと検討の結果を述べている。

§15. 結び

Van der Waals 型の引力や主としてパラマグノンを媒介としたP波の引力によって２〜３m °K と云う超低温で，液体 ^{3}He 中に ^{3}He 粒子の凝縮対が出来て，異方的かつスピン triplet の第１５−１図に示してある様な A_1，A と B の ３種の磁気的超流動相が出現し，比熱，音波，粘性係数の測定実験によって正常フェルミ液体から２次の相転移によって到達出来ることが明らかになった。



第１５−１図　超流動 ^{3}He の相図

超流動 ^{3}He で特長的なことはスピンと軌道の両部分からなるオーダー・パラメーターで，色々な物理量が異方性をもつテンソルの形で表わせることや，オーダー・パラメーターが境界条件や外場の影響で方向性を示すことにより織目,渦糸や回位などの模様や特殊構造をなす特異曲線をもつことが判った。しかも，凝縮対を形成する ^{3}He 粒子の磁気能率の間に働く核磁気相互作用によって，超流動 ^{3}He のスピン振動が NMR や残響効果に現われ，軌道部分のオーダー・パラメーターの変動による軌道波や，超流動状態をはっきりと示す輸送的な性質を持つことが解明されて来た。超流動 ^{3}He は m°K の超低温技術の発展によって支えられて，超伝導と超流動 ^{4}He と類似な，及び異なるエキゾチックな超流動性を巨視的な量子効果の現われとして現代物理学の理解と発展に役立っている。

当面残された諸問題として実験又はそれとかかわり合いの深い所の，

(1)　強磁場中の超流動 ^{3}He の性質

(2)　渦糸や回位 (disgyration) の存在の直接的験証

(3)　制限された幾何的境界条件下での超流動 ^{3}He で，そこでのまだ見つかっていないオーダー・パラメーターの planer や polar の BW 状態の発見

(4)　低温での比熱の振舞い

(5)　拡散熱伝導率とスピン拡散係数の測定

(6)　振動する軌道波モードの発見と，巨視的な軌道角運動量の問題

(7)　稀薄 ^{3}He の ^{4}He 混合溶液での超流動

等々の問題がある。

参考文献

1) K. A. Brueckner, T. Soda, P. W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. **118** (1960) 1442.

2) L. P. Pitaevskii, Soviet Physics JETP **10** (1960) 1269.

3) V. J. Emergy and A. M. Sessler, Phys. Rev. **119** (1960) 43.

4) D. D. Osheroff, R. C. Richardson and D. M. Lee, Phys. Rev. Letters **28** (1972) 885 及びその後の一連の実験は,物理学会論文選集 190「超流動 ^{3}He」にリストされている。

5) Landau のフェルミ液体論は，A. A. Abrikosov and I. M. Khalatnikov, Report of Prog. in Phys. **22** (1959) 329 に良く解説されている。

6) N. F. Berk and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 433.
S. Doniach and S. Engelsberg, Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 750.
D. J. Amit, J. W. Kane and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 425.
7) J. C. Slater and J. C. Kirkwood, Phys. Rev. **37** (1931) 682.
J. de Boer and A. Michels, Physica **5** (1938) 945.
8) J. L. Yntema and W. G. Schneider, J. Chem. Phys. **18** (1950) 641.
9) L. M. Bruch and I. J. McGee, J. Chem. Phys. **46** (1967) 2959.
10) A. Layzer and D. Fay, Int. J. Mag. **1** (1971) 135.
S. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **50** (1973) 1101.
11) L. N. Cooper, Phys. Rev. **104** (1956) 1189.
12) T. Soda and R. Vasudevan, Phys. Rev. **125** (1962) 1484.
13) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957) 1175.
14) T. Soda and R. Vasudevan, Phys. Rev. **125** (1962) 1484.
15) A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 331
16) V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. exper. teor. Fiz **20** (1950) 1064.
17) P. W. Anderson and W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1108.
18) R. Balian and N. R. Werthamer, Phys. Rev. **131** (1963) 1553.
19) W. F. Brinkman and P. W. Anderson, Phys. Rev. **A8** (1973) 2732.
20) Y. Kuroda, Prog. Theor. Phys. **53** (1975) 349.
21) W. F. Brinkman, J. W. Serene and P. W. Anderson, Phys. Rev. **A10** (1974) 2386.
22) V. Ambegaokar, P. G. de Gennes and D. RAiner, Phys. Rev. **A9** (1974) 2676.
23) W. F. Brinkman, H. Smith, D. D. Osheroff and E. I. Blount, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1009.
24) D. D. Osheroff, S. Engelsberg and W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 190.
25) D. D. Osheroff, W. J. Gully, R. C. Richardson and D. M. Lee, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 920.
26) A. J. Leggett, Ann. Phys. **85** (1974) 11.
27) K. Maki and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. **52** (1974) 773.
28) R. A. Webb, R. L. Kleinberg and J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 145.
29) V. S. Shumeiko, JETP **36** (1973) 330.

30) M. J. Seiden, Comptes Rendus **276B** (1973) 905, **277B** (1973) 115.

31) T. Soda and K. Fujiki, Prog. Theor. Phys. **52** (1974) 1405.

32) M. A. Shazmanian, J. Low Temp. Phys. **21** (1975) 589, **22** (1975) 27.

33) C. J. Pethick, H. Smith and P. Bhattacharyya, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 643, J. J. Low. Temp. Phys.

34) 小野義正，原純一郎，永井克彦，川村　清，物理学会年会（1976）名古屋での講演

35) T. A. Alvesalo, Yu. D. Anufriyev, H. K. Collan, O. V. Lounasmaa and P. Wennerström, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 962.

36) T. A. Alvesalo, H. K. Collan, M. T. Loponen, O. V. Lounasmaa and M. C. Veuro, J. Low. Temp. Phys. **19** (1975) 1.

37) R. T. Johnson, R. L. Kleinberg, R. A. Webb and J. C. Wheatley, J. Low Temp. Phys. **18** (1975) 501.

38) L. R. Corruccini and D. D. Osheroff, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 564.

39) D. T. Lawson, W. J. Gully, S. Goldstein and D. M. Lee, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 541.

40) D. N. Paulson, R. T. Johnson and J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 829.

41) H. Kojima, D. N. Paulson and J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 141.

42) I. M. Khalatnikov, 1965, "Introduction to the Theory of Superfluidity", (Benjamin, New York).

43) H. Ebisawa and K. Maki, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 337.

44) P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1169, **34** (1975) 1377.

45) J. W. Serene, theisi (1974) unpublished.

46) K. Nagai, Prog. Theor. Phys. **54** (1975) 1.

47) K. Maki and T. Tsuneto, Phys. Rev. **B11** (1975) 337.

48) R. Combescot, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 946, Phys. Rev. 10A (1974) 1700.

49) T. Soda, Prog. Theor. Phys. 53 (1975) 1833.

50) T. Soda, Prog. Theor. Phys. 53 (1975) 1219.

51) 高野安正，筆者への私信及び A. I. Ahonen, J. Kokko, O. V. Lounasmaa, M. A. Paalanen, R. C. Richardson, W. Schoppe and Y. Takano, preprint (1976).

52) A. J. Leggett and S. Takagi, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1424.

53) T. Soda, submitted to Prog. Theor. Phys.

54) K. Maki and H. Ebisawa, Phys. **B13** (1976) 4845.

55) V. Ambegaokar and M. Levy, Phys. Rev. **B13** (1976) 1967.

56) R. A. Webb, R. E. Sager and J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. **35** (1965) 1010.

57) K. Maki, "Quantum Statistics and the Many-Body Problem" (1975) p.101, edited by Trickey, Kirk and Dufty (Plenum Press, N.Y.)

58) A. J. Leggett and S. Takagi, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 1379.

59) M. C. Cross and P. W. Anderson, Proc. LT 14 **1** (1975) 29.

60) P. Wölfle in QSMBP (see Ref. 57) p.9.

61) T. Soda, preprint and talk given on March 23, 1976 at the meeting of "Kinetic Theory of Elementary Excitations in Superfluid ^{3}He" held at Buseiken, Univ. of Tokyo.

62) B. R. Patton, Phys. Lett. **47A** (1974) 459.

63) D. N. Paulson, H. Kojima and J. C. Wheatley, Phys. Lett. **47A** (1974) 457.

64) V. J. Emery, J. Low Temp. Phys. **22** (1976) 467.

65) D. R. T. Jones, A. Love and M. A. Moore, J. of Phys. C: Solid St. Phys. **9** (1976) 743.