

medium 近似 (EMA) との関連などについて以下のような説明が compact に行われた。IY は一電子 Green 関数を摂動展開した際、single site な diagram についての部分和をとったものであるが、その各項についてイオンの高次の配置相関は chain 形の二体相関の積ではいっており近似としては荒い。これに exclusion effect を考慮した場合、Roth によって導かれた EMA に一致することがわかり、EMA が CPA の非晶質系への拡張であることがわかる。次に IY を multiband に拡張して、Fermi level 付近での縮退を考慮した非単純液体の formulation ができること、金属の band 計算の有力な手段である KKR 法と TBA 法の間にある構造上の対応から、それに対して、IY, CPA の近似を導入して液体の場合への拡張ができることなどについて論じられた。なお詳しい議論については夏の学校のテキストにあげられている論文を参照されたい。

(文責 明田雅昭)

臨界現象における展開理論

講師 東大教養 阿部 龍蔵

(I) 7月29日(第1日目)

§ 1. 臨界現象の基本的概念

講義は終始 Ising model, Gaussian model …… などのスピン系の臨界現象が扱われた。まず最初に、critical exponent と scaling law についての初歩的な説明がなされた。例えば、状態方程式、multipsin correlation function の scaling law, $d - \gamma = \nu d$, $\eta = 2 - \frac{\gamma}{\nu}$ などの scaling law relation が説明された。

§ 2. Kadanoff-Wilson picture

いわゆる Kadanoff theory と臨界指数 ν のきめ方について述べられた。 T_c 近傍で ξ は非常に大きい、4 個の spin を 1 個の block spin とみなせば、 ξ (correlation length) は半分になり、取扱いが楽になる。original spin の相互作用パラメーターを K , block spin のそれを K_1 とすると、 $\xi[f(K)] = \frac{1}{2} \xi(K)$, $K_1 = f(K)$ (K の解析関数) が成り立ち、これから、 $\nu = \ln 2 / \ln \lambda$, $\lambda \equiv \left(\frac{df}{dK} \right)_{K_c}$ が得られる。

§ 3. ガウス模型におけるくりこみ群変換

くりこみ群の手法が、ガウス模型への適用を例にとって説明された。スピン変数の変換 $S_n \rightarrow \sigma_q$, $S_n = N^{-1} \sum_q \sigma_q e^{iqn}$ によって、分配関数は、

$$\begin{aligned} Z_G &= \int (\prod dS_m) \exp \left[-\frac{b}{2} \sum S_m^2 + \frac{1}{2} \sum K_{jk} S_j S_k \right] \\ &= \int_{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{|q| < 1} (q^2 + r) \sigma_q \sigma_{-q} \right] \end{aligned}$$

とかける。 $\frac{1}{2} < |q| < 1$ の σ_q に関して積分してしまい、 $q' = 2q$, $\sigma_q = \zeta \sigma'_{2q}$ の変換を行うと、ハミルトニアンは、 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ に変換される。また相関関数の変換から、 $\xi' = \frac{1}{2} \xi$ と $\nu = \frac{1}{2}$ が得られる。

§ 4. S^4 模型

くりこみ群の手法の S^4 模型への適用が述べられ、 ν の $\epsilon (= 4-d)$ による表式を導びくことが示された。ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}[\sigma] = -\frac{1}{2} \int (q^2 + r) \sigma_q \sigma_{-q} - u \int_{q_1 q_2 q_3} \sigma_{q_1} \sigma_{q_2} \sigma_{q_3} \sigma_{-q_1 - q_2 - q_3}$$

とかかれ、くりこみ群変換の、 r_ℓ と u_ℓ についての漸化式が導びかれる。固定点 $r^* = r_{\ell+1} = r_\ell$, $u^* = u_{\ell+1} = u_\ell$ は、臨界点に対応する。 $d > 4$ ならば、 $u_\ell \rightarrow 0$, $u^* = r^* = 0$ であり、 $d < 4$ ならば $u^* \simeq \frac{\epsilon \ln 2}{9C}$, $r^* \simeq -\frac{4}{9} \epsilon \ln 2$ である。漸化式を線型し、

$$\begin{pmatrix} r_{\ell+1} - r^* \\ u_{\ell+1} - u^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_\ell - r^* \\ u_\ell - u^* \end{pmatrix}$$

とする。行列 M の固有値と固有ベクトルを求める。correlation $\xi = X(r, u)$ の変換より、臨界指数 ν の表式として、

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2)$$

が、求められる。

(文責 久貝正己)

(II) 7月30日(第2日目)

§ 5. FEYNMAN GRAPH による計算

まづ相関関数 $\Gamma(x)$ は $T \simeq T_c$ で $1 \ll x \ll \xi$ として、

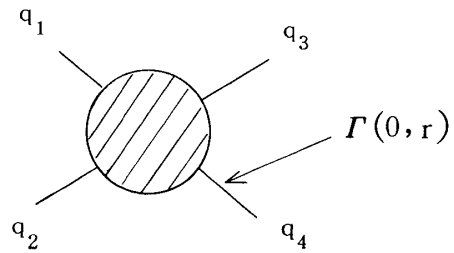
$$\Gamma(x) = \langle S(0) S(x) \rangle \sim 1/x^{2d_s}$$

である。ここに d_s は今考えている系の次元数である。このフーリエ成分 $\Gamma(q)$ は、 $q^{2d_s-d} = q^{n-2}$ に比例することが期待される。これを η で展開してやると、

$$\Gamma(q) \sim \frac{1}{q^2} \{1 + \eta \ln q + O(\eta^2)\}$$

ここで 4 point function u_K なるものが定義される。

$$u_K \equiv - \frac{\Gamma(0,0,0,0,r) \text{ connected}}{4! [\Gamma(0,r)]^2}$$



$\Gamma(q)$ は propagator と考えられ $q=0$ で、

$T \simeq T_c$ のときは、帯磁率を表わす。

$\Gamma(0,r) = 1/r$ u_K を実際に計算すると $u_K \sim r^{-\frac{\epsilon+2\eta}{2-\eta}}$, 今考えている系のハミルトニアンを、

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{q} [q^2(1+q^2)^2 + r] \sigma_q \sigma_{-q} - \frac{1}{2} \int (r_0 - r) \sigma_q \sigma_{-q} \\ - u_0 \int \frac{1}{q_1 q_2 q_3} \sigma_{q_1} \sigma_{q_2} \sigma_{q_3} \sigma_{-q_1 - q_2 - q_3}$$

とすると u_K と $\Gamma(q;r)$ は、

$$u_K \sim \text{diagram 1} u_0 + \text{diagram 2} u_0^2 + \text{diagram 3} u_0^3 + \text{diagram 4} u_0^3 + \dots$$

$$\Gamma(q;r) \sim \text{---} + \text{---} \overset{\text{loop}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}} u_0 + \text{---} \times \text{---} + \text{---} \overset{u_0^2}{\text{---}} + \dots$$

||
0 (counter-part)

u_0 は、相互作用の大きさである。グラフにより u_K を計算すると、

$$u_K = u_0 - 36 u_0^2 \int_q g^2(q) \sim u_0 + \frac{9 u_0^2}{4\pi^2} \left[\ln r + \frac{17}{6} - \epsilon \ln^2 r - \epsilon \left(\frac{1}{2} + K' \right) \times \ln r \right]$$

この u_K と scaling law からでてきた u_K を比較して u_0 を求める (matching) ができる。それによると、 $u_0 = \frac{2\pi^2}{9} \epsilon + \dots$ で $\eta = \frac{3u_0^2}{8\pi^4}$ となる。次に $S^2 \rightarrow S_1^2 + \dots + S_n^2$ とし、ハミルトニアンを、

$$H_1 = -u_0^2 \int_x [s_1^2(x) + \dots + s_n^2(x)]^2$$

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \int_q [q^2(1+q^2)^2 + r_0] \sigma_{q_i} \sigma_{-q_i}$$

$$- u_0 \sum_{j,k} \int_{q_1 q_2 q_3} \sigma_{q_1 j} \sigma_{q_2 j} \sigma_{q_3 k} \sigma_{-q_1 - q_2 - q_3}$$

として、やはりグラフにより u_K を計算すると、

$$u_K = u_0 + \frac{(n+8) u_0^2}{4\pi^2} \ln r$$

また、 $\Gamma(q,0)$ は、

$$\Gamma(q,0) = \frac{1}{q^2} \left\{ 1 + \frac{(n+2) u_0^2}{8\pi^4} \ln q + \dots \right\}$$

これと $\Gamma(q)$ の expected form を比較して、

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

が得られた。次に γ の計算のやり方が示された。その結論は、

$$r = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \epsilon + \frac{(n+2)(n^2+22m+52)}{4(n+8)^3} \epsilon^2 + \dots$$

§ 6. $\frac{1}{n}$ 展開

n が大きい極限では、

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} + \dots = \frac{2}{2-\epsilon} = \frac{2}{d-2}$$

$$\Gamma^{-1}(q) = r_0 + \Sigma(0) + q^2 + \Sigma(q) - \Sigma(0)$$

$\Sigma(q)$, $\Sigma(0)$ は self-energy である。グラフを用いて γ が計算でき、結果は

$$2 < d < 4 \quad \text{で} \quad \gamma = \frac{2}{d-2}, \quad 4 < d : \quad \gamma = 1$$

最後に η に対する $\frac{1}{n}$ 展開を行い、講義を終った。 $T = T_c$ で $\Gamma(q) \propto q^{\eta-2}$, また

$r = 0$ で $\Gamma^{-1}(q) = q^2 + \Sigma(q) - \Sigma(0)$, ここに、

$$\Sigma(q) - \Sigma(0) = \frac{1}{Nn} \sum_k \frac{g(q-k) - g(k)}{\nu(k)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Gamma^{-1}(q) \sim q^2 + \Sigma(q) - \Sigma(0) \propto q^{2-\eta} = q^2(1-\eta \ln q + \dots)$$

との比較により、3次元での結果は、

$$\eta = \frac{8}{3\pi^2 n} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{1}{\pi^2 n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

であった。

(文責 下西康之)