Staggered Field のある Ising Model の零点分析

川端親雄・竹内正樹・唐木幸比古

最近,Multicritical phenomena について, Monte Carlo 法, High temperature Series expansion, そして Renormalization Group 等で研究されている。私達は，これらの方法とは別なアプローチとして，2nd nearest neighbor ferromagnetic interaction を有する Antiferromagnetic Ising Model に Staggered field をかけた場合の partition function の distribution of zero を調べる。数値実験として，Spin = 1/2 の 4×4 = 16，4×6=24 につき結果を求めた。 System の Hamiltonian は,

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{i,j} S_i S_j - J_2 \Big(\sum_{i,k}^{A} S_i S_k + \sum_{j,\ell}^{B} S_j S_\ell \Big) - m h_A \sum_i^A S_i - m h_B \sum_j^B S_j \tag{1}$$

状態和 (partition function) は,

$$\begin{aligned} Z &= T_r \exp(-\beta \mathcal{H}) \\ &= \Sigma\, g(\ell_1, \ell_2, S_A, S_B)\, e^{\beta(J_1\ell_1 + J_2\ell_2)}\, e^{\beta m h_A S_A} \cdot e^{\beta m h_B S_B} \\ &= \Sigma\, g(\ell_1, \ell_2, S_A, S_B)\, e^{\beta(J_1\ell_1 + J_2\ell_2)}\, Z_A^{S_A} \cdot Z_B^{S_B} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで,

$g(\ell_1, \ell_2, S_A, S_B)$ は状態密度,

$\ell_1 = \Sigma S_i S_j$,　$\ell_2 = \Sigma S_i S_k + \Sigma S_j S_\ell$,

$S_A = \overset{A}{\Sigma} S_i$,　$S_B = \overset{B}{\Sigma} S_j$,　$Z_A = e^{\beta m h_A}$,　$Z_B = e^{\beta m h_B}$,

$\beta = (kT)^{-1}$

さらに整理して，

$$Z = \Sigma\, g(\ell_1, \ell_2, S_A, S_B)\, e^{\beta(J_1\ell_1+J_2\ell_2)}\, Z_N^{S_A+S_B} \cdot Z_{st}^{S_A-S_B} \tag{3}$$

ここで，

$$Z_N = (Z_A \cdot Z_B)^{1/2} = e^{\beta m(h_A+h_B)/2} \quad : \ \text{Normal fugacity}$$

$$Z_{st} = (Z_A / Z_B)^{1/2} = e^{\beta m(h_A-h_B)/2} \quad : \ \text{Staggered fugacity}$$

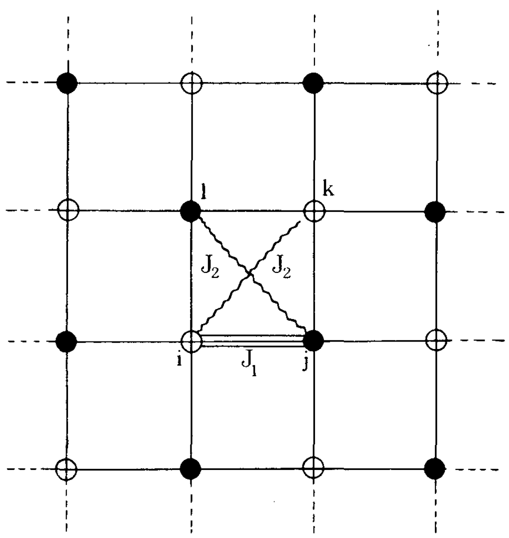
Staggered fugacity plane (Z_{st}) について状態和の零点を求める。

つまり，

$$\sum_{S_A,S_B} \Big(\sum_{S_A,S_B,\ell_1,\ell_2} g(\ell_1,\ell_2,S_A,S_B)\, e^{\beta(J_1\ell_1+J_2\ell_2)}\, Z_N^{S_A+S_B} \Big) Z_{st}^{S_A-S_B} = 0 \tag{4}$$

今， kT と Z_N を変数とした場合の単位円周上に根が分布するグラフは次の如くである。それぞれ J_1 と J_2 の Ratio に関して，斜線部分が単位円周上に零点が存在する範囲である。

格子系（二副格子構造をもつ lattic 系）



○ A 副格子　● B 副格子