Title	9.二次元乱流と臨界現象(臨界現象,研究会報告)
Author(s)	五十嵐, 儀孝
Citation	物性研究 (1977), 27(5): E25-E28
Issue Date	1977-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89285
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

「二次元乱流と臨界現象」

東大理　五十嵐儀孝

A) 乱流スペクトルはN-S方程式の慣性項に起因する渦粘性と単位質量当りの流体の波数kまでのエネルギー減衰率の均合からKolmogorovの $E \propto k^{-5/3}$，さらに分子粘性による散逸を考慮すればHeisenbergの $E \propto k^{-7}$ が得られる事は良く知られている。[1] 平板上の乱流スペクトルでは，これら慣性部分領域 $k^{-5/3}$ と，粘性領域 k^{-7} 間の狭い範囲に遷移領域が存在するものがある。Kraichnan[2] は二次元乱流のN-S方程式を V^2，ω^2 (ω: 渦度）の平均値に対する連続形に直し，慣性項の三角相互作用 $\langle \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi^2 \rangle$ (ψ: V, ω) のスケール不変性とE(k)の不変性等から，$k \gg K_{input}$ 領域で渦度カスケード機構に伴う $E(k) \propto k^{-3}$ を導出した。これは二次元N-S方程式が流体要素の過度連続形の式になる事が一因と考えられる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \omega = \nu \triangle \omega, \quad \omega = \mathrm{rot}\ \vec{V}$$

ところで，二次元乱流の統計物理的考察を最初に行ったのは故 Onsager[3] で，流速場が安定な渦系の集合による kinematics で記述できると仮定し，$(x,y) \rightarrow (q,p)$ 写像を各渦系に与えて有効ハミルトニアン $H = -\Sigma k_i k_j \log R_{ij}$ (k_i: 渦度強度）に基づく渦系の空間分布を推察した。この線に沿った乱流研究は進展してないが，強磁場下のプラズマのguiding-centreの問題の方面に道を開いた。[4] これは乱流の本質である慣性力(dynamics)が考慮されてない事が原因であろう。二次元乱流はエネルギーではなく渦度が短波長自由度にカスケードする機構が主要となる点が特徴である。

B) $E \propto k^{-5/3}$ はカスケード過程でのエネルギー減衰率等の揺動効果[5] を無視した結論であり，この効果をN-Sから得る Fokker-Planck 方程式[6] に基づき，相転移臨界現象の非線形をくりこみ理論に類比を求め，指数の変化と相関関数の形を推測したのがNelkin[7] である。しかし現在の所，自明なスケール法で $k^{-5/3}$ を得た以外に具体的な類比や，平均場理論に相当し $k^{-5/3}$ を直接与える様な定常分布 $P_0(v)$ も得られていない。

この立場から理論を構成するのは，P_0 が既に非線形項を処理したもの（渦粘性）になっている事からも非常に困難であろう。また，くりこみ変換群を構成して P_0 を得るとしても，Wilson [8]流の多項式展開，長波長消去等で達成される保証もなヽ。即ち，臨界現象での Kadanoff 描像に相当する現象論に欠けている。そこで，特に二次元乱流の特徴を活用し，具体的に臨界現象の問題に帰着する様な現象論を以下で提案する。

C）　発展乱流は $R = UL/\nu \to \infty$，$k \to \infty$ の極限現象と考えられ,この極限状態では長波長長に入力した渦度が短波長にカスケードし分子粘性で散逸するので，$< \omega^m(k)\,\omega^n(K) >$ が $k \to 0$，$K \to \infty$ で有限な相関を持つと考えられ，カスケード量の渦度が秩序パラメータである。次に秩序パラメータの定常分布 $P(\omega)$ は，大きな渦から小さな渦へと渦度が波数空間でカスケードし易い様に流体が自己調整し，ある種の秩序「hierarchcal long range order」が存在すると考え，情報量 $I = \int P \,\ell n\, P\, \delta\omega$ の停留条件から定める。乱流のカスケード機構は k-空間に有るが，r-空間に存する様なものは自然界に多くの例が存在し，樹液に対する樹枝の形 (Cayley tree) 等は代表的であり，h. ℓ. r. o. in r-空間を成す。乱流を random, chaotic, disorder 系等と考えるのは早計で，単にr-空間で complicate なだけである。次に附加条件の問題であるが，乱流領域は外界と接触しているが（図１），流体エネルギー $\rho\int v^2\, d\vec{r}$ と渦度散逸量 $\nu\int(\vec{\nabla}\omega)^2\, d\vec{r}$ 等の平均値は定常状態で一定と考えられる。エネルギー散逸の方はカスケードが無いので無視する。所で流体の渦度は領域 Γ で長波長領域で可成りの量を持つと考えられ，これが外界との接触で制御不可能な変動をするので附加条件として採用しない。渦度散逸の方は短波長が主要で，Γ 内で固有な値を保持するのと対照的である。乱流の場合外界との接触が熱的なのか，機械的なのか規定し難いのも困難の一因であろう。次に渦度が揺動する際に“kinematical”な制約を N–S 方程式の三角相互作用部分から大局的に受ける。$\int\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\omega^2\, d\vec{r} \simeq 0$ これをデルタ関数的にはん関数空間の制限に用いるべきか，それとも平均値的に附帯条件に用いるべきか，現在確信がないが，非線形効果を分布関数に与え得る事は事実であろう。以上で分布関数は $R \to \infty$（$\nu \to 0$）で，$P \propto e^{-\Phi}$，$\Phi = \lambda\rho\int v^2\, d\vec{r} +$ non quadratic 項となる。流速場と渦度場は Biot-Savalt 則で結ばれている。

$$\vec{v} = \int(\omega \times \vec{r})\, r^{-d}\, d^d r$$

これと $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$ を用いFourier 成分 $\omega(\mathrm{k})$ で Φ を表現する。その際に，スピン系臨界現象（k→0）で格子定数 a が陰に $(\nabla S)^2$ の係数になり空間結合を与えたのとの類比で乱流（k→∞）領域 Γ のサイズ L^2 を理論の出発点で有限にとる。これは，始めからレイノルズ数を理論から除去しないためにも必要である。$D_L(K)=\int e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}\,d\vec{r}=2\pi\ L^2\ J_1(KL)/KL$，$K^2=(\vec{k}+\vec{k}')^2$ を用い，近似的に次式を得る。

$$\Phi \cong \lambda'\rho\iint \frac{\omega(k)\,D_L(K)\,\omega(k')}{(k-k')^2}\,d^2k\ d^2k'$$

ここで D_L の性質を利用して，$\vec{k}\cdot\vec{k}'\cong kk'$，$4k^2=(\vec{k}-\vec{k}')^2$ 等と近似したのは，長距離スピン系のハミルトニアンHと対応を付けるためである。

$$H = J\iint \frac{S(r)\ S(r')}{(r-r')^{d+\sigma}}\,d^d r\ d^d r'$$

後者の臨界現象[9]で $\langle S(r)\ S(0)\rangle \propto r^{2-d-\eta}$（$\eta=2-\sigma$）を得ており，前述の様に乱流をk-空間臨界現象と考え，Φ とHの類似性を極端に理想化すれば，$2=d+\sigma$ となり，乱流スペクトルは $E(k)\propto\langle\omega(k)\,\omega(-k)\rangle\ k^{-2}\ k^{d-1}\propto k^{2-d-\eta}\ k^{d-3}=k^{-3}$（$d=2$，$\sigma=0$），$k^{-2}$（$d=1$，$\sigma=1$）となる。一次元乱流[10]は波動乱流（渦度カスケードに相当しk^{-2}）で，弱い解が存在しない問題と，$d=1$，$\sigma=1$ での臨界現象の marginal 問題との一致は偶然であろうか。この単純な試みの段階で既知の一二次元N−S による結果と一致するのは興味深い。

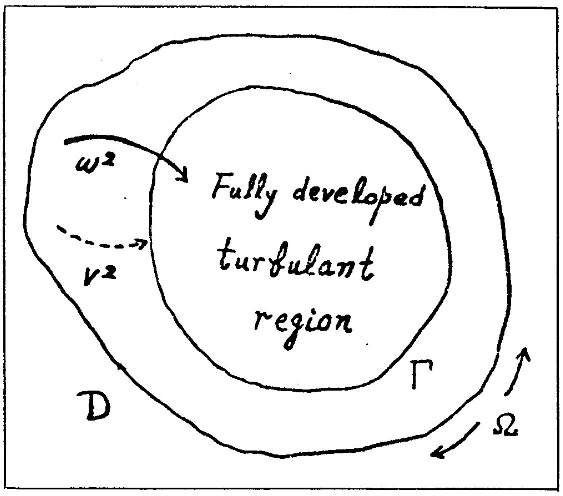

図 1

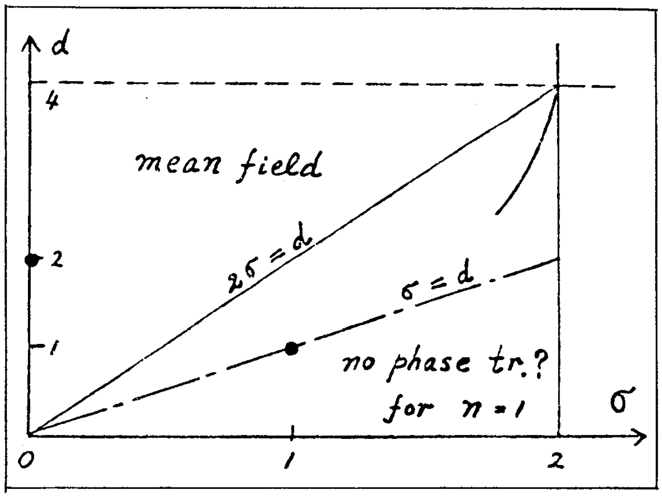

図 2

参考文献

1) G. K. Batchelor, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge, 1953.
S. Kuwahara, 物理会誌 Vol. 31, No–8, 651, (1976)

2) R. H. Kraichnan, Phys. of Fluids Vol. 10, No. 7, 1417 (1967).

3) L. Onsager, Nouovo Cimento Suppl. Vol. 6 (IX), 279 (1949).

4) S. F. Edwarrds and J. B. Talor, Proc. Roy. Soc. **A336**, 257, (1974).

5) A. M. Obuhkov, J. Fluid Mech. Vol. 13, 77, (1962).
A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. Vol. 13, 82, (1962).
A. M. Yaglom, Sov. Phys. Do-lady, Vol. 11, No. 1, 26, (1966).

6) S. F. Edwards, J. Fluid Mech. Vol. 18, 239, (1964).

7) M. Nelkin, Phys. Rev. Vol. 9, No. 1, 388, (1974), Vol. 11, No. 5, 1737, (1975).

8) K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Report, **12C**, 77, (1974).
K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Letters, Vol. 28, 240, (1972).

9) M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. Vol. 42, 597, (1974).

10) T. Tatsumi, 物理会誌 Vol. 30, No. 2, 106, (1975).
I. Hosokawa, 物理会誌 Vol. 31, No. 9, 721, (1976).

2次元XYモデルの相転移の研究

東大理　鈴木増雄，宮下精二，黒田　昭

岡山大計算センター　川端親雄

2次元XYモデルの臨界現象に関する研究は量子系および古典系を問わず最近盛んに行われている。Stanleyと Kaplanの研究がその契機となっているが，理論的にまだ決着がついていない。我々は量子スピン系および古典スピン系のXYモデルについてモンテ・カルロ・シミュレーションによる研究を行った結果，新しい型の相転移が発見されたので報告する。それは比熱には発散が認められず，帯磁率には著しい発散が起り，古典