「波数構造を持った固定点相互作用とその応用」

東大理　田　中　文　彦

臨界現象の理論の出発点は対象とする体系のミクロなハミルトニアンを，それがT_cで示すであろう特異性の性格は保存しつつ適当に粗視化した有効ハミルトニアンを作ることである。これは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\int_q V_2^{\mu\nu}(q)\, a^*_{q\mu}\, a_{q\mu} + \sum_{\mu\nu}\int V_4^{\mu\nu}(q,p,k)\, a^*_{p-\frac{k}{2},\mu}\, a^*_{q+\frac{k}{2},\nu}\, a_{q-\frac{k}{2},\nu}\, a_{p+\frac{k}{2},\mu}\,, \tag{1}$$

の形に整理しておくと便利である。ここに$\{a^*, a\}$はm成分複素秩序場で種々の磁気的相互作用は$V_2^{\mu\nu}$の特性に反映される。[1]一方既存の理論はくり込み群の固定点では常に$(V_4^{\mu\nu})^*$ = 波数に依存しない定数 (例えばウイルソン理論では$(4-d)/4K_4(2m+8)$) で与えられていた。そこで理論の拡張としてV_4が波数に依存する構造を持ち，同時にくり込み群の矛盾のない固定点として定まる条件を考え，特に応用の広い形を例として取り上げて議論をする。まず直観的に理解できる条件として，この結節部分が一回変換を受けた後，再び同じ形に戻ること，即ち，

$$\int_{b^{-1}}^{1} \frac{V_4(\cdots)\ V_4(\cdots)}{V_2(q)\ V_2(q+k/b)}\, d^dq \sim V_4(\cdots)\ \log b \tag{2}$$

の条件が必要であることが分る。ここにbは波数空間の分割比である。次に(2)を満たす例として，ここでは，

$$V_2^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2}q^2 + r\,,\quad V_4^{\mu\nu}(q,p,k) = \lambda W(q,p;\hat{k}) = \lambda\, q_i\, D_{ij}(\hat{k})\, p_j\,, \tag{3}$$

を取り上げる。ここに$D_{ij}(\hat{k}) \equiv \delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j$ ($\hat{k}_i \equiv k_i/|k|$)，λは結合定数である。長波長ゆらぎがその上では正規分布に帰着する臨界空間次元dcが2であることは次数数え上げ定理から簡単に分る。条件(2)を満たすかどうかは漸化式をつくるときに結節部分のくり込みを示すファイマングラフから$\log b$の特異性を抜き出して順に検討すればよい。

V_2 と λ の連立漸化式から $\epsilon = 2-d$ として

$$\lambda^* = \epsilon/8(m+1)\,K_2, \quad r^*=0, \quad \eta = \epsilon/2(m+1), \tag{4}$$

と固定点と静的相関の臨界指数 η が求まる。(3) の応用のひとつとして流体力学における熱的ゆらぎの長波長極限での振舞いの問題がある。熱的揺動力に駆られたナビエ・ストークス方程式に従う流体の運動を速度場をある複素(一成分)秩序変数の二次形式で表現しなおすと，その定常分布函数が丁度 (3) を (1) に代入したポテンシャル $\mathcal{H}$ で書けるのである。 この流体の速度場の時間相関函数を調べるにはフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\{a\},t)=\{\sum_{\mu,k}(i\frac{\partial}{\partial a_{\mu k}}\frac{\partial\mathcal{H}_{int}}{\partial a^*_{\mu k}}+c.c.)+\sum_{\mu,k}[(\frac{\partial}{\partial a_{\mu k}}\frac{\partial}{\partial a^*_{\mu k}}+c.c.)$$
$$+\,2Q\frac{\partial^2}{\partial a^*_{\mu k}\,\partial a_{\mu k}}]\}P(\{a\},t), \tag{5}$$

に戻って右辺の演算子のくり込みを行えばよい。ここに $\mathcal{H}_{int} = \Sigma\, w(q,p;\hat{k})\, a^*_{\mu,p-\frac{k}{2}}\, a^*_{\nu,q+\frac{k}{2}}\, a_{\nu,q-\frac{k}{2}}\, a_{\mu,p+\frac{k}{2}}$ で時間反転に対する対称性から第一項はナビエ・ストークス方程式の慣性項に対応する力学的発展を示すドリフト項である。 Q は熱的ゆらぎの強さで $Q \sim k_BT$ である。摂動計算を組織的に行うには (5) の解を経路積分の形に書き，その際現われる作用積分に対するくり込み(自己エネルギーと結節部分の補正)を二次元近傍で考えるのが便利である。既に得た定常解の結果 (4) に加えて，(i) 固定点フォッカー・プランク演算子の力学的発展の項は消えてしまうこと，(ii) オーダ・パラメータの特性時間の指数は $z = 2-\eta$ で与えられることが分る。(i) と同様の現象はボーズ粒子系に対しても見られたことである。速度場自身の指数は $\eta_v = 2\eta$， $z_v = z$ で与えられる。以上，相互作用項に波数依存性を考えたためにウィルソン型と異った固定点及び指数が得られた。例えばクーロン相互作用 (e^2/k^2) の様な依存性では，固定点で平たくならされて定数に落着くこと[3] と対比させれば興味深い。

参 考 文 献

1) M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. **42**, (1974), 597.

2) S. Grossmann, Z. Physik, **B21**, (1975), 403, **B22**, (1975), 401.

3) S. Ma, Phys. Rev. Letters **29**, (1972), 1311.

くりこみ群変換からみた２次元量子spin系

東大教養　本 田 直 文

表記の問題について最近検討した結果を報告する。計算が簡単なので三角格子を採用し，spinの大きさは $1/2$ とする。全系を３つのspinから成るcellに分割する。[1] 格子点にあるspinを site spin ，cellを代表するspinを cell spinと呼ぶ。site spin のHamiltonian

$$\mathcal{H} = K_2 \sum_{(ij)} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + K_1 \sum_{(ij)} S_i^z S_j^z \quad ((ij)\text{ は n.n. pair}) \tag{1}$$

とかく。$\mathcal{H}$ はcell内部の相互作用 $\mathcal{H}_{0i}$ の総和 $\mathcal{H}_0 = \sum_i \mathcal{H}_{0i}$（cellも添字 i, j であらわす）とcell間相互作用Vとの和である。そこで密度行列を $\exp \mathcal{H} = \exp(\mathcal{H}_0 + V) = [\exp(\mathcal{H}_0)] S$ とかき，S をDyson 展開であらわす。これはVに関する摂動展開となっている。ここでの取扱いは摂動の１次に限る。

cellを記述する基底ベクトルを $|\mu_i, \sigma_i>$（$\mu_i = \pm 1$，$\sigma_i = 1, 2, 3, 4$）とかき次のようにえらぶ。

$$\mu_i = 1 \left\{ \begin{array}{lll} |1,1> = \alpha\alpha\alpha & & (S=\frac{3}{2},\ M=\frac{3}{2}) \\ |1,2> = \frac{1}{\sqrt{3}}(\beta\alpha\alpha + \alpha\beta\alpha + \alpha\alpha\beta) & & (S=\frac{3}{2},\ M=\frac{1}{2}) \\ |1,3> = \frac{1}{\sqrt{3}}(\beta\alpha\alpha + e^{\frac{2\pi}{3}i}\alpha\beta\alpha + e^{-\frac{2\pi}{3}i}\alpha\alpha\beta) & & (M=\frac{1}{2}) \\ |1,4> = \frac{1}{\sqrt{3}}(\beta\alpha\alpha + e^{-\frac{2\pi}{3}i}\alpha\beta\alpha + e^{\frac{2\pi}{3}i}\alpha\alpha\beta) & & (M=\frac{1}{2}) \end{array} \right. \tag{2}$$