

長距離-短距離相互作用の  
共存する系における臨界現象

東北大・工 山 崎 義 武

長距離 (LR)-短距離 (SR) 相互作用の共存する N-成分 スピン系の二次相転移点に於ける臨界現象を調べるために、適用されたくりこみ群の理論と、得られた臨界指数について報告した。

【 model Hamiltonian 】  $H = -\sum_{i \neq j} J_{0ij} \vec{S}_{0i} \cdot \vec{S}_{0j}$  [ 最隣接相互作用  $J_{0ij} = J_0(r_{ij}) \sim \hat{a}_0^2 / r^{d+2} + \hat{b}_0^2 / r^{d+\sigma} > 0$  ( $\hat{a}_0^2, \hat{b}_0^2$  : 正定数 ; potential range をあらわす parameter  $\sigma : 1 < \sigma < 2$ ) ; i-th site の spin は N-成分  $S_{0i} = \{S_{0i1}, \dots, S_{0iN}\}$  で  $\vec{S}_{0i}^2 = \sum_{\alpha=1}^N S_{0i\alpha}^2$  の対称性を仮定 ] を採り,  $\vec{S}_{0i}^2 =$  一定の拘束条件を附して, 連続 spin で表わされた次の Hamiltonian density  $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [a_0^2 (\nabla \vec{S}_0)^2 + b_0^2 (\nabla^{\sigma/2} \vec{S}_0)^2 + m_0^2 \vec{S}_0^2] + \frac{1}{4!} g_0 (\vec{S}_0^2)^2$  が得られる。添字 0 は unrenormalized 量を示し,  $a_0^2 \neq 0, b_0^2 = 0$  は SR-,  $b_0^2 \neq 0, a_0^2 = 0$  は LR-,  $a_0^2 \neq 0 \neq b_0^2$  は共存 (CE)- 相互作用系に当る。これを renormalized 量 (添字 0 をもたない) で書き換える :  $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [Z_{3a} a^2 (\nabla \vec{S})^2 + Z_{3b} b^2 (\nabla^{\sigma/2} \vec{S})^2] + \frac{1}{4!} Z_1 g (\vec{S}^2)^2 + \frac{1}{2} [\delta m^2 \vec{S}^2 + Z_3 t \vec{S}^2 + Z_3 \Delta S_\alpha S_\beta]$ , ( $\alpha \neq \beta$ ) ;  $t \sim T - T_c$ ,  $\Delta : S_\alpha(x) S_\beta(x)$  ( $\alpha \neq \beta$ ) の結合定数,  $\vec{S}^2 = \sum_{\alpha=1}^N S_\alpha^2(x)$ 。

【 くりこみ定数と規格化 】  $\mathcal{H}(x)$  に導入されたくりこみ定数  $\{Z\}$  は,  $a^2 = \mu^{\epsilon_a} \tilde{a}^2 = Z_3 Z_{3a}^{-1} a_0^2$ ,  $b^2 = \mu^{\epsilon_b} \tilde{b}^2 = Z_3 Z_{3b}^{-1} b_0^2$ ,  $g = \mu^{\epsilon_u} \tilde{g} = Z_3 Z_1^{-1} g_0$ ;  $\epsilon_a = d - 2 - [S^2]$ ,  $\epsilon_b = d - \sigma - [S^2]$ ,  $\epsilon_u = d - 2 - [S^2]$  ( $[S^2]$  :  $S^2$  の次元) により関係づけられ, 規格化条件  $\partial \Gamma^{(2)}(p) / \partial p^2 |_{p=0} = a^2$ ,  $\partial \Gamma^{(2)}(p) / \partial p^\sigma |_{p=0} = b^2$ ,  $\Gamma^{(4)}(0, \dots, 0) = g$ ,  $Z_3 = [Z_{3a} a^2 p^2 + Z_{3b} b^2 p^\sigma] / [a_0^2 p^2 + b_0^2 p^\sigma] |_{p=\mu} = \{ \tilde{a}^2 Z_{3a} / \tilde{a}_0^2$  ( $\tilde{b} = 0$  or  $2 - \sigma \leq 0$ )

SR-limit ;  $\tilde{b}^2 Z_{3b} / \tilde{b}_0^2$  ( $\tilde{a} = 0$  or  $2-\sigma \gg \tilde{\epsilon}$ ) LR-limit ;  $[Z_{3a} \tilde{a}^2 + Z_{3b} \tilde{b}^2] / [\tilde{a}_0^2 + \tilde{b}_0^2]$  ( $0 < 2-\sigma \lesssim \tilde{\epsilon}$ ) CE regime} により  $Z_{3a}, Z_{3b}, Z_1, Z_3$  が Feynman diagram 展開を通して、夫々定まる。

【 Propagator 】  $G(p) = [a^2 p^2 + b^2 p^\sigma]^{-1}$  at  $T_c$  は計算を複雑にするので、次の展開形を用いる :  $\{[(a^2 + b^2) p^2]^{-1} [1 + \sum_{m=1} \tilde{b}^{2m} (1-p^{\sigma-2})^m] \dots p^2$ -型,  $[(a^2 + b^2) p^\sigma]^{-1} [1 + \sum_{m=1} \tilde{a}^{2m} (1-p^{2-\sigma})^m] \dots p^\sigma$ -型},  $\bar{X}^2 \equiv X^2 / (a^2 + b^2)$  for  $X = a$  or  $b$ 。

【 Renormalization-group equations 】 (Case I)  $\epsilon_a = 0$ , (Case II)  $\epsilon_b = 0$ , (Case III)  $\epsilon_a \neq 0 \neq \epsilon_b$  に分けて調べる。(Case I) :  $[\mu \partial / \partial \mu + \mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) - \mathcal{C}(r_3, r_4, r_5)] \Gamma^{(n)}$  ( $p_i; \bar{u}, \tilde{b}^2, \tilde{t}, \tilde{\Delta}, \mu) = 0$ ,  $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \equiv \beta_{\bar{u}}(\bar{u}) \partial / \partial \bar{u} + \beta_{\tilde{b}^2}(\tilde{b}^2) \partial / \partial \tilde{b}^2$ ,  $\mathcal{C}(r_3, r_4, r_5) \equiv n r_3(\bar{u}) / 2 + r_4(\bar{u}) \tilde{t} \partial / \partial \tilde{t} + r_5(\bar{u}) \tilde{\Delta} \partial / \partial \tilde{\Delta}$  ( $\sim$ 印は無次元量を示す ;  $\bar{u} \equiv \tilde{u} (\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)^{-d/2}$ )  $\beta_{\bar{u}}(\bar{u})$ ,  $\beta_{\tilde{b}^2}(\tilde{b}^2) (\equiv \{\beta\})$  は連立方程式  $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln \bar{u} Z_1 Z_3^{-2} = -\epsilon_u - \frac{d}{\sigma} \beta_{\tilde{b}^2}(\tilde{b}^2) / (\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)$ ,  $\mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln \tilde{b}^2 Z_{3b} Z_3^{-1} = -\epsilon_b$  から得られ  $\{r_j\}$  ( $j = 3, 3b, 4, 5$ ) は  $r_j(\bar{u}, \tilde{b}^2) \equiv \mathcal{D}(\bar{u}, \tilde{b}^2) \ln Z_j$  で与えられる。(Case II, III) についても同様にして  $\{\beta\} \{r_j\}$  が求められる。

【 Vertex-functions の漸近形 】 これは特性曲線の方法により  $\{\beta = 0\}$  を満す固定点で得られる。例えば,  $\Gamma^{(2)}$  は, (Case I) の場合,

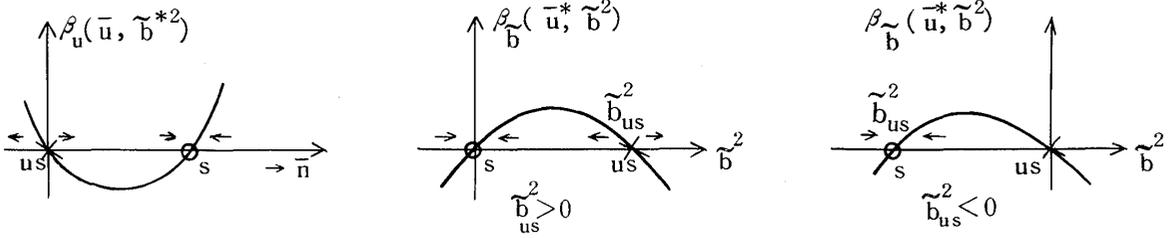
$$\Gamma^{(2)}(\lambda p; \bar{u}, \tilde{b}^2, \tilde{t}, \tilde{\Delta}, \mu) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^{2-r_3^*} \Gamma^{(2)}(p; \bar{u}^*, \lambda^{-[2-\sigma-r_3^*]}, \tilde{t} \lambda^{-r_4^*}, \tilde{\Delta} \lambda^{-r_5^*}, \mu)$$

書ける, 即ち, 固定点での値 (\* のついた量) によって表わされる。

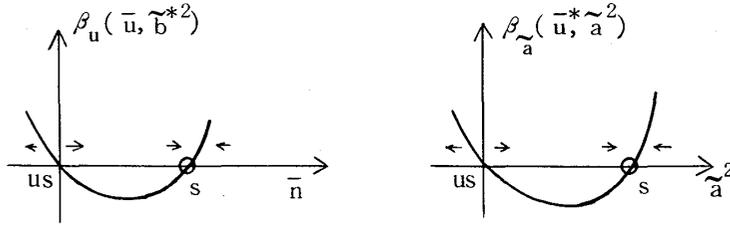
### 【 固定点と臨界指数 】

(Case. I) :  $p^2$ -型 {or  $p^\sigma$ -型} の propagator で展開して得られた  $\{\beta\}$  の表式から図のような曲線が求められる。  $\tilde{b}_{us}^2 = \frac{1}{\epsilon_b} [-\epsilon_b + \eta_{(2)}] > 0$  . この関係から安定な固定点は  $(u^*, \tilde{b}^{*2}) = (u_{SR}^*, 0)$  {or  $(\bar{u}_{SR}^*, 0)$ } , 固定点での固有値は  $\lambda_u = \epsilon_u$ ,  $\lambda_b = -\epsilon_b + \eta_{(2)}$  .  $u_{SR}^*, \eta_{(2)}$  は SR 系の固定点と臨界指数, その  $\epsilon^2$  項である。  $\tilde{b}_{us}^2 > 0$  の条件から  $\lambda_b > 0$ ,

即ち、短距離相互作用的な固定点が安定な固定点である。



(Case. II):  $p^2$ -型 {or  $p^\sigma$ -型} の propagator を用いた場合、 $\{\beta\}$  の表式から安定な固定点  $(\bar{u}^*, \bar{a}^{*2})$  が存在し、その点での固有値  $\lambda_u, \lambda_a$  が得られる。例えば、 $p^\sigma$ -型 prop. の場合、



$$\bar{u}^* = \frac{\epsilon' 6}{N+8} + \frac{\epsilon'^2 6}{N+8} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{(N+8)^2} [2(5N+22) - (N+2) \frac{\epsilon_a}{2\epsilon_u}] \right], \quad \bar{a}^{*2} = \left( \frac{1}{2\epsilon_u} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \frac{\epsilon_u \epsilon (N+2)}{2(N+8)^2} +$$

$$+ \frac{\epsilon'^2 (N+2)}{(N+8)^2} \left[ \left( \frac{1}{2\epsilon_u} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \epsilon_u \left\{ \frac{3}{8} + \frac{1}{(N+8)^2} [2(5N+22) - (N+2) \left\{ \frac{\epsilon_a}{2\epsilon_u} + \frac{3}{8} + \frac{\epsilon_u}{4\epsilon_a} \left( \frac{2}{\sigma} - 1 \right) \right\}] \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon_u}{2\epsilon_a} \right], \quad \lambda_u = \epsilon_u + \dots, \quad \lambda_a = -\epsilon_a + \dots, \quad \text{ここに, } \epsilon' = 2\sigma - d. \quad \text{この固定点は長距離-}$$

短距離相互作用の競合領域の値である。

(Case. III):  $p^2$ -型 {or  $p^\sigma$ -型} の prop. を用いて  $\{\beta\}$  を求め、 $\{\beta=0\}$  を満す固定点を調べると、 $\epsilon_a = 0 = \epsilon_b$  又は、(Case I) 又は (Case II) の時のみ固定点が存在する。

山崎義武

従って、上述の二つの場合に尽きる。

臨界指数  $\eta$  を例にとって図解する。

(Case. I) は  $2-\sigma < \eta_{(2)}$  のとき安定で、 $p^2$ -型 prop. を用いると  $\sigma$  に依らず A 点の値となり、 $p^\sigma$ -型 prop. では曲線 B となる。相転移には長距離相関が本質的に寄与するので、曲線 B が現われると考えられる。しかし、 $\eta_{(2)}$  は、例えば  $N=2, d=3$  で 0.02,  $N=\infty$  で 0, 即ち、非常に小さな値である。  
 (Case. II) は  $2-\sigma < \eta_{(2)}$  で且つ  $\epsilon (=4-d)$ ,  $\epsilon' (=2\sigma-d)$  展開の成り立つ領域  $\tilde{\epsilon}$  の間で安定で、 $p^\sigma$ -prop. で得られた曲線 C で表わされる。C は  $\sigma=2$  で A と一致する。筆者は  $\epsilon$  と  $\epsilon'$  の same order 領域の展開を外挿したために、LR limit の曲線 D に C が漸近している。本来、C と D はなめらかに結ばれる漸近展開の成り立つ領域  $\tilde{\epsilon}$  が 1 より小さく、 $\eta_{(2)}$  より大きい場合、1 より大きい場合、 $\eta_{(2)}$  より小さい場合によって三つの図に分けられる。最後の図は  $\epsilon, \epsilon'$ -展開の性質上ないと考えられる。

