非平衡状態における緩和・ゆらぎの理論

国士館大工　清　水　敏　寛

System-size 展開の方法[1]は，非平衡状態にある系を取り扱う有効な手段の一つである。この方法は，(i) マクロな変数は extensive な性質をもっている。(ii) 平均値のまわりの分散は ε (system-size Ω の逆数) のオーダーである， という２つの仮説に基づいている。仮説 (ii) は，系の分布関数が Gauss 分布で記述される場合には正しいが，Multi-stable 系では必ずしも成り立つとは限らない。具体的には，1. 不安定点から出発した場合の緩和・ゆらぎ，2. 準安定状態から安定状態への緩和等の問題では，平均値のまわりの分散が ε のオーダーでなくなる場合が生ずるので，従来の Ωー展開の方法を拡張する必要がある。研究会では，この拡張についての一つの考え方を提案した。

平均値のまわりの分散等，マクロ変数のモーメントのオーダーの時間的変化を考慮に入れるために，まずモーメントの時間発展についての方程式を Master 方程式より導出し，その後でその時間発展の中の most dominant な部分を取り出すことを考える。Master 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n C_n(x)\, p(x,t) \tag{1}$$

から出発する。簡単の為に一変数の場合を考えるが多変数への拡張は容易である。モーメント $y(t) \equiv \int x p(x,t) dx$，$M_n(t) \equiv \int (x-y(t))^n p(x,t) dx$ $(n \geq 2)$ を使って定義した $G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ を導入する。[2]

$$G(\alpha, \vec{\beta}; t) \equiv \delta(y(t)-\alpha) \prod_{k=2}^{\infty} \delta(M_k(t)-\beta_k), \quad \vec{\beta} = (\beta_2, \beta_3, \cdots) \tag{2}$$

(1) 式より $G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ の従う式は，

$$\frac{\partial G(\alpha, \vec{\beta}, t)}{\partial t} = \mathscr{L} G(\alpha, \vec{\beta}, t) \tag{3}$$

ここで演算子 $\mathscr{L}$ は次式で定義される。

$$\mathscr{L} G = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(v_1(\alpha, \vec{\beta}) G\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_n}\left(v_n(\alpha, \vec{\beta}) G\right) \tag{4}$$

$$v_1(\alpha,\vec{\beta}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} C_1^{(\ell)}(\alpha)\,\beta_\ell\,,$$

$$v_n(\alpha,\vec{\beta}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{n}{\ell!} C_1^{(\ell)}(\alpha)\,\beta_{n-1+\ell} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k-1}}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\frac{C_k^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}\beta_{n-k+\ell}$$

$$- n\,\beta_{n-1}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{C_1^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}\beta_\ell\,,$$

$$\left(\beta_0 = 1,\quad \beta_1 = 0,\quad C_k^{(\ell)}(\alpha) \equiv \frac{\partial^\ell C_k(\alpha)}{\partial\alpha^\ell}\right)$$

$G(\alpha,\vec{\beta};t)$ を用いて書くとモーメントの時間発展は，

$$y(t) = \int d\alpha\, d\vec{\beta}\; G(\alpha,\vec{\beta};t)\,\alpha = \int d\alpha\, d\vec{\beta}\left(e^{\mathscr{L}t}G(\alpha,\vec{\beta};0)\right)\alpha\,,$$

$$M_n(t) = \int d\alpha\, d\vec{\beta}\; G(\alpha,\vec{\beta};t)\,\beta_n = \int d\alpha\, d\vec{\beta}\left(e^{\mathscr{L}t}G(\alpha,\vec{\beta};0)\right)\beta_n \tag{5}$$

又 $\mathscr{L}$ の共役演算子 $\mathscr{D}$ を導入すれば，

$$M_n(t) = \int d\alpha\, d\vec{\beta}\; G(\alpha,\vec{\beta};0)\,e^{\mathscr{D}t}\,\beta_n$$

$$= \int d\alpha\, d\vec{\beta}\; G(\alpha,\vec{\beta};t')\,e^{\mathscr{D}(t-t')}\beta_n \tag{6}$$

（$y(t)$ についても同様）ここで $M_n(t)$ の most dominant な部分を議論する時に，小さなパラメータ ε は，演算子 $\mathscr{D}$ 及び $G(\alpha,\vec{\beta};t)$ の中のモーメントを通して入ってくることに注意しなければならない。理論の本質的な点は，時刻 t' でのモーメントのオーダーがわかった時，$\alpha,\vec{\beta}$ をスケール変換することによって (2)，(6)式より演算子 $\mathscr{D}$ の effective part を取り出すことである。

簡単な例：$C_1(x) = \gamma x(1-x^2)$，$C_2(x) = C =$ 一定，$C_n(x) = 0\ (n\geq 3)$ 初期条件として不安定点 $x=0$ のまわりの Gauss 分布 $p(x,0) \propto \exp\{-x^2/2(\varepsilon\sigma_0)\}$ を仮定する。初期条件と対称性より奇数次のモーメントは常に 0 である。偶数次のモーメントの初期値は $M_{2k}(0) = \varepsilon^k m_{2k}\ (m_{2k} \sim 0(1))$ 。この例題では，演算子 $\mathscr{D}$ は次式で与

えられる。

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left\{\gamma(\beta_{2n} - \beta_{2(n+1)}) + \varepsilon C(n-\frac{1}{2})\beta_{2(n+1)}\right\}\frac{\partial}{\partial\beta_{2n}} \tag{7}$$

short time scale でのモーメントの振舞いは,

$$M_{2n}(t) = \int d\vec{\beta}\, G(\vec{\beta};0)\, e^{\mathcal{D}t}\, \beta_{2n}\ ,\quad G(\vec{\beta};0) = \prod_{k=1}^{\infty}\delta(M_{2k}(0) - \beta_{2k})$$
$$\vec{\beta} = (\beta_2, \beta_4, \cdots\cdots) \tag{8}$$

β_{2n} を $\zeta_{2n} = \beta_{2n}\ \varepsilon^{-n}$ とスケールすると (8) 式及び $\mathcal{D}$ は

$$M_{2n}(t) = \varepsilon^n \int d\vec{\zeta}\, G_I(\vec{\zeta};0)\, e^{\mathcal{D}t}\zeta_{2n}\ ,\quad G_I(\vec{\zeta};0) = \prod_{k=1}^{\infty}\delta(m_{2k} - \zeta_{2k})$$
$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left\{\gamma(\zeta_{2n} - \varepsilon\zeta_{2(n+1)}) + C(n-\frac{1}{2})\zeta_{2(n-1)}\right\}\frac{\partial}{\partial\zeta_{2n}} \tag{9}$$

従って $M_{2n}(t)$ の most dominant 部分 $M^I_{2n}(t)$ は

$$M^I_{2n}(t) = \varepsilon^n \int d\vec{\zeta}\ G_I(\vec{\zeta};0)\ e^{\mathcal{D}^I_{eff}\,t}\ \zeta_{2n} \quad (0 \leq t \leq t_I) \tag{10}$$

ここで $\mathcal{D}$ の effective part $\mathcal{D}^I_{eff}$ は,

$$\mathcal{D}^I_{eff} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(\gamma\zeta_{2n} + C(n-\frac{1}{2})\zeta_{2(n-1)}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta_{2n}} \tag{11}$$

モーメント (10) は従来の Ω–展開の方法の結果と一致し,時間 t が大きいところで,$M^I_{2n}(t) \propto (\varepsilon\sigma e^{2\gamma t})^n$, $(\sigma = \sigma_0 + \frac{C}{2\gamma})$。次に $M^I_{2n}(t)$ が正しい時間領域を考える。その為にまず時刻 $t_I\ (>0)$ まで $M^I_{2n}(t)$ が dominant 部分だとすると,時刻 $t\ (\geq t_I)$ のモーメントは (6) 式を使って次の様に表わせる。

$$M_{2n}(t) = \int d\vec{\beta}\, G(\vec{\beta};t_I)\,(e^{\mathcal{D}(t-t_I)}\beta_{2n}) \tag{12}$$
$$G(\vec{\beta};t_I) \equiv \prod_{k=1}^{\infty}\delta(M^I_{2k}(t_I) - \beta_{2k})$$

この場合には (8) 式の場合と異って，$M^{I}_{2k}(t_I)$ は ε のオーダーでないので，スケール変換 $\eta_{2n}=\beta_{2n}\triangle(t_I)^{-n}$，$(\triangle(t_I)=\sigma\varepsilon e^{2\gamma t_I})$ を導入する。その時演算子 $\mathcal{D}$ は次の様に変換され，

$$\mathcal{D}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\{\gamma(\eta_{2n}-\triangle(t_I)\eta_{2(n+1)})+\varepsilon\triangle(t_I)^{-1}C(n-\frac{1}{2})\eta_{2(n+1)}\}\frac{\partial}{\partial\eta_{2n}} \tag{13}$$

(9) 式との比較から $\triangle(t_I)^{-1}\sim\varepsilon\triangle(t_I)^{-1}$，すなわち $\triangle(t_I)\sim\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ を満す時刻 t_I まで $M^{I}_{2n}(t)$ は正しいと考えられる。それ以後での $\mathcal{D}$ の effective 部分は

$$\mathcal{D}^{II}_{eff}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\gamma\eta_{2n}\frac{\partial}{\partial\eta_{2n}}\qquad(t_I\leq t\leq t_{II}) \tag{14}$$

モーメントの dominant 部分は

$$\begin{aligned}M^{II}_{2n}(t)&=\triangle(t_I)^n\int d\vec{\eta}\,G_{II}(\vec{\eta};t_I)e^{\mathcal{D}^{II}_{eff}(t-t_I)}\eta_{2n}\qquad(t_I\leq t\leq t_{II})\\ G_{II}(\vec{\eta};t_I)&\equiv\prod_{k=1}^{\infty}\delta(M^{I}_{2k}(t_I)\triangle(t_I)^{-k}-\eta_{2k})\end{aligned} \tag{15}$$

同様な議論をくりかえすと，$M^{II}_{2n}(t)$ は $\triangle(t_{II})\sim 1$ を満す時刻 t_{II} まで正しいことがわかる。$t\geq t_{II}$ では $\mathcal{D}$ の effective な部分は，スケール変換 $\xi_{2n}=\beta_{2n}\triangle(t_{II})^{-n}$ を導入して

$$\mathcal{D}^{III}_{eff}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\gamma(\xi_{2n}-\triangle(t_{II})\xi_{2(n+1)})\frac{\partial}{\partial\xi_{2n}}\qquad(t>t_{II}) \tag{16}$$

と求まり，モーメントの dominant 部分は次の様に求まる。

$$\begin{aligned}M^{III}_{2n}(t)&=\triangle(t_{II})^n\int d\vec{\xi}\,G_{III}(\vec{\xi},t_{II})e^{\mathcal{D}^{III}_{eff}(t-t_{II})}\xi_{2n},\qquad(t>t_{II})\\ G_{III}(\vec{\xi};t_{II})&\equiv\prod_{k=1}^{\infty}\delta(M^{III}_{2k}(t_{II})\triangle(t_{II})^{-k}-\xi_{2k})\end{aligned} \tag{17}$$

2次のモーメントを (17) 式から計算すると $M^{III}_{2}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n(\varepsilon\sigma e^{2\gamma t})^n$，$(b_n=1\times3\times\cdots\times(2n-1))$ となり $t\to\infty$ で正しい定常値1に近づく。この結果は

Suzuki[3] による計算と一致する。ここでは簡単な例を考えたが，この方法はもっと一般的な問題にも適用可能である。その場合には $M_{2n}^{\mathrm{III}}(t)$ は $t\to\infty$ で正しい定常値に近づくとは限らないが，その時には上で述べたのと同様の手続きをモーメントが正しい値に近づくまでくりかえしていけばよい。少し詳しいことは Phys. Letter A に載る予定。

参 考 文 献

1) R.Kubo et al., J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.

2) T.Shimizu, Phys. Letters **57A**(1976) 13; Physica **83A**(1976) 486.

3) M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56**(1976) 77; 研究会での講演.

スピノダル分解の初期過程

京大理　冨 田 博 之

(I) クラスター・ダイナミックスにおける相似則について

スピノダル分解の初期過程において，ごく初期の段階を除いてある種の相似則が成立つと考えられ，クラスターの平均的な大きさ $\bar{R}(t)$ （半径）あるいは構造因子のピーク $q_m(t)$ は時間 t のベキ函数

$$\bar{R}(t) = q_m(t)^{-1} \sim t^{a'} \tag{1}$$

に従うことが知られている。これは次のようなクラスター・ダイナミックスから現象論的に理解される：濃度（あるいはスピン）の空間的な揺ぎを，クラスターの大きさ ℓ（例えば ℓ ケの上向スピンから成るクラスター）に対する分布 $n_\ell(t)$ で表示し，クラスターはブラウン運動により相互に衝突し合体することより成長する，と考えると，次のような反応速度方程式

$$\frac{d}{dt} n_\ell = -n_\ell \sum_j K_{\ell j} n_j + \frac{1}{2} \sum_{i+j=\ell} K_{ij} n_i n_j \tag{2}$$

を得る。反応係数 K_{ij} は，ほぼ球状のクラスターを仮定すれば，拡散係数 D_ℓ とクラス