

In the above examples there are two kinds of critical fluctuations, even though d_c is the same in each case.

(a) In the Schlögl reaction, β_μ is the same ($d/2$) in both the non-critical region and the critical region when $d > d_c$, whereas α_μ changes from 0 to 2.

(b) In the Benard problem, α_μ is the same (1) in both regions, while β_μ changes from $d/2$ to $(d - 2)/2$.

不安定系の異常揺動と緩和

東大・理 鈴木 増 雄

一変数の場合の不安定点近傍における緩和とゆらぎを一般的にとり扱うスケーリング理論^{1)~4)}の要点を最初に復習し、それを多モードに拡張する。^{5)~6)} その場合にもやはり、異常揺動定

理が導かれる。

多成分レーザー
 模型及び化学反
 応系への応用例
 を述べる。⁶⁾ 超
 放射への応用⁷⁾
 については、有
 光・鈴木の報告
 を参照して下さい。

基本的な考え
 方は、一変数で
 も多モード系で
 同じであるから

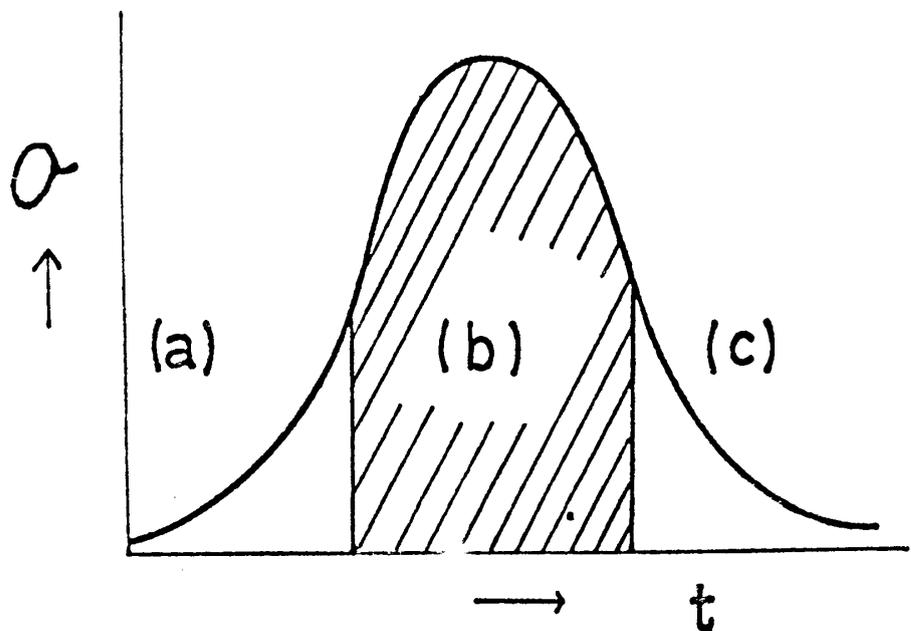


図 1. σ : ゆらぎ, (a) 初期領域, (b) 第 2 非線型領域, (c) 終領域

まず, single mode の場合について, スケーリング理論の要点を述べたい。図1のように, 時間を3分割して, それぞれ, 初期線型領域, スケーリング領域(又は, 非線型領域)及び終領域と呼ぶ。初期線型領域では Ω -展開^{8,9)}または示量性⁹⁾の理論から, 緩和を議論することができる。第2のスケーリング領域は, ゆらぎが異常に大きく, 非線型が重要になり, ランダムな力の効果は, 漸近的に無視でき, 図2のように各位相点を

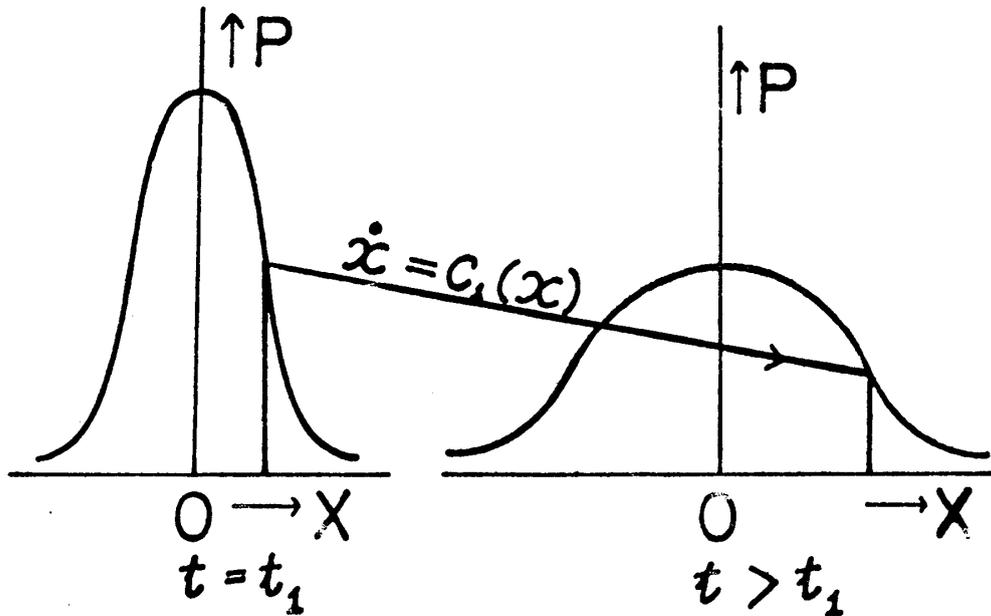


図2. 第2非線型領域における分布関数の時間変化

決定方程式(即ち, ドリフト方程式)に従って解けばよい。もし, 初期状態が, 必ずしも丁度不安定点ではなく, δ だけそこからずれているときは, 図3のように, ϵ と δ の大小関係によって, 不安定領域か, 示量性領域かに分けられる。それぞれの領域に応じて, 図4に示されているように, 途中の時間領域で, ゆらぎは異常に大きくなり, それぞれ $1/\epsilon$ 及び $1/\delta^2$ の大きさにまで増大する。^{1)~6)}不安定点からの緩和の特徴は, 巨視変数のゆらぎの部分の大きさの程度が時間と共に変化する事である。即ち, 初期領域では, $\Omega^{1/2}$ の大きさであるが, 第2の非線型領域に入るにつれて, Ω のオーダーになってくる。終状態に入れると, 再び $\Omega^{1/2}$ の大きさにもどる。第2領域で, Ω の大きさになることが, 図4の異常揺動効果となって現われる。

多モードに拡張すると,⁵⁾初期領域で最も速く成長するモードが, 第2領域に入るにつ

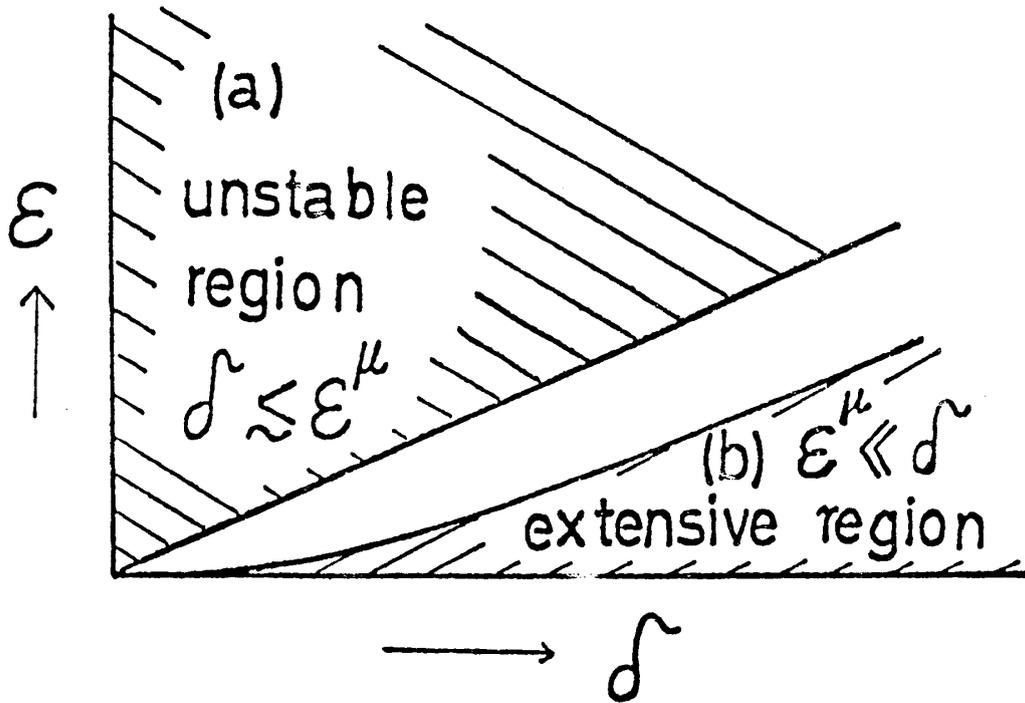


図3. $\varepsilon - \delta$ 平面

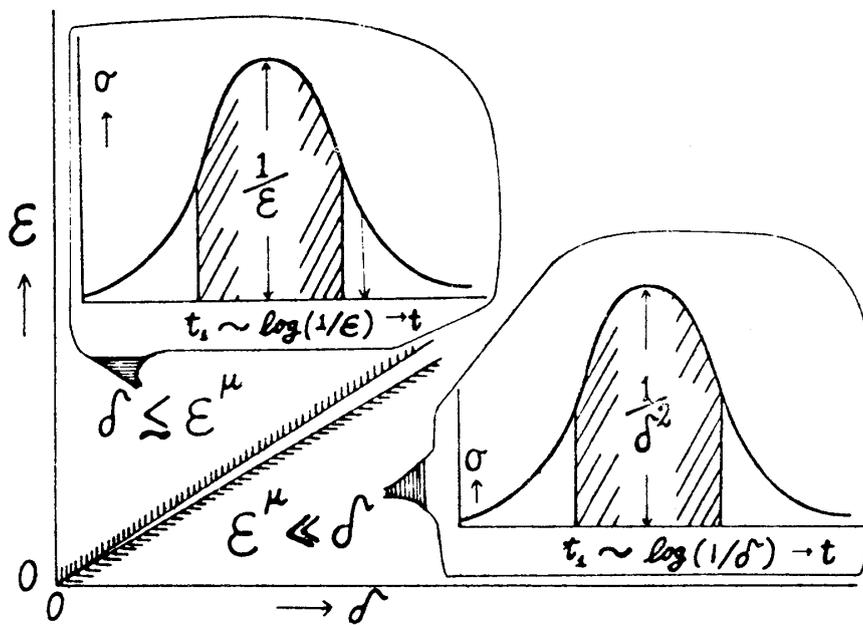


図4. 不安定領域と示量性領域における異常揺動の定性的な説明

れて、非線型項のモード結合により、他のモードのゆらぎを増大させ、最も速く成長するモードの時定数によって決まる時間の大きさ ($\sim \log \Omega$) のところで、やはり、図4のような異常揺動効果が現れる。多モードに対しても、第2の非線型領域に入ると、ランダムな力の効果は漸近的に無視できる。(図5参照)

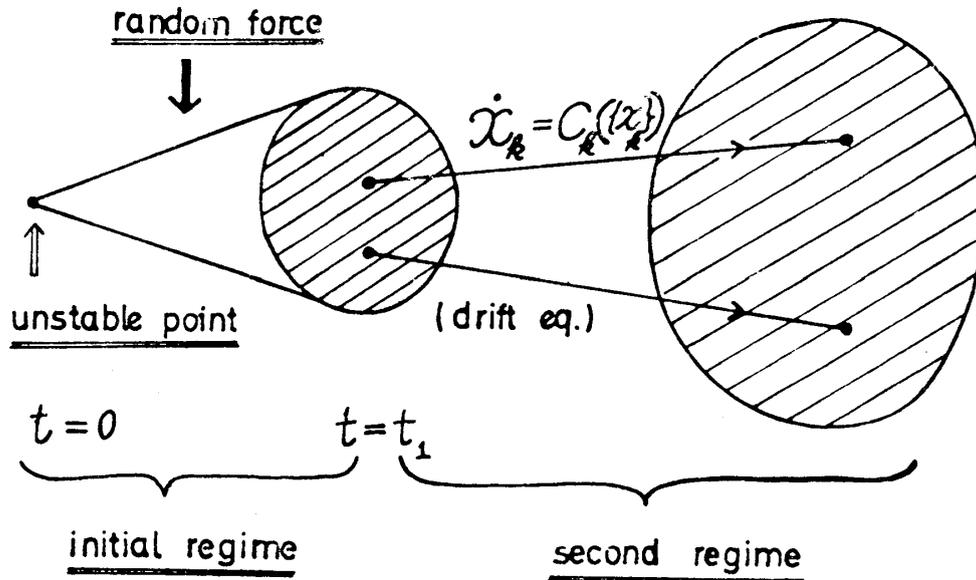


図5. 多モード系の初期領域と第2非線型領域における時間発展の模式図

次に、異常揺動定理の直観的な導出を与える。不安定点からの系（又はmost probable path $y(t)$ ）のずれを δ_y 、初期領域での時定数と分散を、それぞれ、 r 、 σ

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = r(\delta y), \quad \frac{d}{dt}\sigma_t = 2r\sigma_t + c; \quad c = \text{拡散定数}, \quad (1)$$

となり、これより、 $\delta y(t_1) = \delta y(0) \exp(r t_1) \simeq \Delta$ ($\Delta \lesssim 1$) と置いて決まる時間 t_1 即ち、

$$t_1 \sim r^{-1} \log(\Delta/\delta); \quad \delta = \delta y(0) \quad (2)$$

になると、線型近似が破綻し始めて、第2領域に入ってくる。これに対応して、分散 σ_t は、

$$\sigma_f(t_1) = (\sigma_0 + \sigma_1) e^{2\tau t_1} - \sigma_1 \simeq (\sigma_0 + \sigma_1) \frac{\Delta^2}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta^2} \quad (3)$$

となり、異常揺動の大きさが δ^{-2} に比例して大きくなることがわかる。(但し、 $\sigma_1 = c/(2r)$ 。) 同様にして、不安定領域では、 $\delta=0$ として、その代りに smallness parameter として、 ϵ が入って来て、図4のように、

$$\sigma_m \sim 1/\epsilon \sim \Omega \quad \text{at} \quad t \sim \log(1/\epsilon) \quad (4)$$

のゆらぎの増大が現れる。物理的に言って、示量性領域の異常揺動は σ_m よりずっと小さいはずであるから、 $\delta^{-2} \ll 1/\epsilon$ 即ち、 $\epsilon^{1/2} \ll \delta_0$ これが、図3の示量性領域の条件になっている ($\mu=1/2$)。

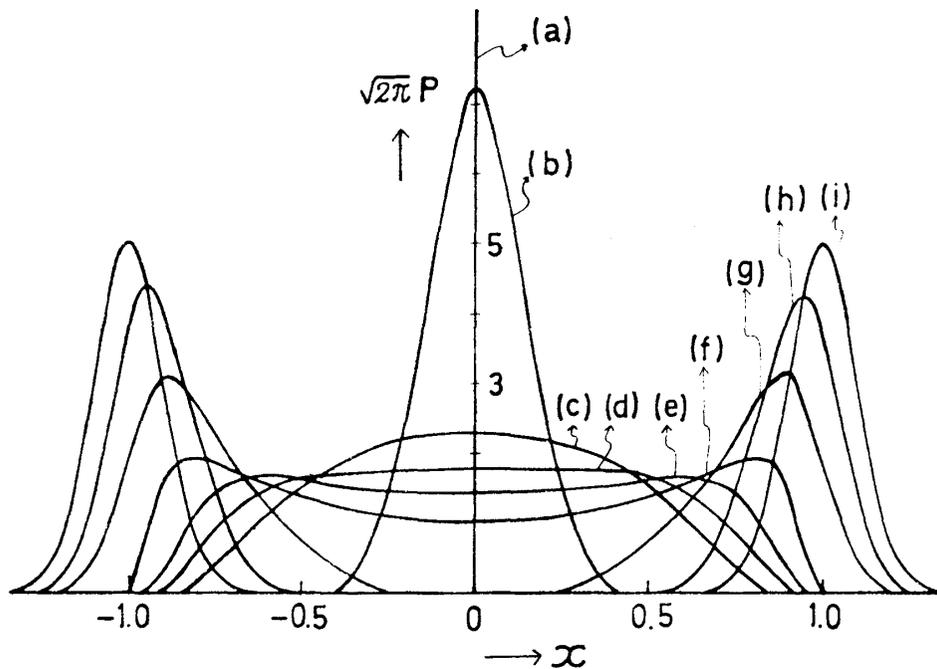


図6. レーザー模型における分布関数の時間変化。
 (a) $P_0 = \delta(x)$; $t=0$, (b) $\tau=0.02$, (c) $\tau=0.2$,
 (d) $\tau=\tau_0=\frac{1}{3}$, (e) $\tau=0.5$, (f) $\tau=1$,
 (g) $\tau=2$, (h) $\tau=4$ and (i) P_{eq} 即ち $t=\infty$;
 但し、 $\sigma_f=1$, $\epsilon=0.01$ として計算した。

応用例として、まず、一変数のレーザー模型の分布関数をスケーリング理論で求めて結果を示すと、図6のようになる。終領域の計算結果も含まれている。n-成分に拡張して、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\nabla \cdot \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} c \varepsilon \Delta \right] P \quad (5)$$

というFokker-Planck eq.を考えよう。今簡単のために、

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{x}) = r(1-r^2); \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (6)$$

とすると、中心対称性を持つスケーリング解は、

$$P_{sc}(r) \simeq \frac{2}{(2\tau)^{n/2} \Gamma(n/2)} (1-r^2)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\tau(1-r^2)}\right) \quad (7)$$

で与えられる。但し、 $\tau = \varepsilon(\sigma_0 + \sigma_1) \exp(2t)$ 。2成分の化学反応系、例えば、PLN-model¹⁰⁾に応用すると、富田達と同じ記号を用いて、分散は、次のような異常揺動を示す⁶⁾：

$$\sigma_m \simeq \frac{1}{\delta^2} \quad \text{at} \quad t_1 \simeq \frac{2}{b-b_c} \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (8)$$

丁度、不安定点から出発すると、

$$\sigma_m \simeq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{at} \quad t_m \simeq \frac{1}{b-b_c} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (9)$$

が示せる⁶⁾。但し、 ε は系のサイズ。パラメータ b が臨界点 b_c に近づくにつれて、 t_1 , t_m が異常に大きくなる臨界緩和の現象が、過度現象で見られることは、注目すべきことである。

尚、ミクロな模型(例えば、Kinetic Ising model, TDGL model¹¹⁾)で、異常揺動効果をもつと具体的に調べつつある。森理論¹²⁾との関係も現在考察中である。

参 考 文 献

1. M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 56(1976) 77.
2. M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 56(1976) 477.
3. M.Suzuki, J. Stat. Phys. 16(1977) No.1.

4. M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 57(1977) No.2
5. M.Suzuki, J. Stat. Phys. submitted
6. ボーズ統計 50 周年記念理論物理国際会議及び冬の学校 (1977 年 1 月 6 日 ~ 25 日
ニューデリー) のプロシーディングス。
7. M.Suzuki, Physica (in press).
8. N.G. van Kampen, Can. J. Phys. 39(1961) 551.
9. R.Kubo, K.Matsuo and K.Kitahara, J. Stat. Phys. 9(1973) 51.
10. K.Tomita, T.Ohta and H.Tomita, Prog. Theor. Phys. 52(1974) 1744 and references
cited therein.
11. K.Kawasaki, Prog. Theor. Phys. (in press)
12. H.Mori, Prog. Theor. Phys. 52(1974) 433.

超放射の厳密解 (有限系) とスケーリング理論

東大・理 有 光 敏 彦
鈴木 増 雄

スケーリング理論を超放射系に応用し、有限系でのその厳密解と比較するところにより、スケーリング理論の意味するところをはっきり知り、また久保、松尾、北原の $1/\Omega$ 展開とのつながりもはっきりさせる。超放射系のモデルについては、(1)を参照されたい。ひとこと言え、2準位の同じ原子 N 個を、えんぴつ型の容器に入れた系と、熱浴と接触した光子系とを考え、その間のカップリングについて、2次までを考慮するのである。

§ 1. Formulation

超放射の基礎方程式

$$\dot{\rho}(t) = \frac{I_1}{2} \{ [S^-, \rho S^+] + [S^- \rho, S^-] \}, \quad I_1 = \frac{2g^2}{\kappa} \quad (1.1)$$