定義とは矛盾するように思われるのだが）。

参　考　文　献

1) A. F. Andreev and I. M. Lifshitz, Sov. Phys. JETP **29**, 1107 (1969)
2) G. V. Chester, Phys. Rev. **A2**, 256 (1970)
3) W. J. Mullin, Phys. Rev. **A4**, 1247 (1971)
4) T. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. **16**, 569 (1956)
5) H. Matsuda and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. suppl. **46**, 411 (1970)
6) Y. Imry and M. Schwartz, J. Low Temp. Phys. **21**, 543 (1975)
7) A. Widom and D. P. Locke, J. Low Temp. Phys. **23**, 335 (1976)
8) R. A. Guyer, Phys. Rev. Lett. **26**, 174 (1971)
9) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **25**, 1543 (1970)
10) W. M. Saslow, Phys. Rev. Lett. **36**, 1151 (1976)
11) W. M. Saslow, Phys. Rev. **B15**, 173 (1977)
12) J. F. Fernández and M. Puma, J. Low Temp. Phys. **17**, 131 (1974)
13) I. E. Dzyoloshinskii and P. S. Kondratenko, Sov. Phys. JETP **40**, 1195 (1974)
14) K–S. Liu and Fisher, J. Low Temp. Phys. **10**, 655 (1973)

周期場中の超流動性

名大理　伊　藤　正　和

三　宅　和　正

§1. 最近グラファイトの表面の一様性を利用して，ここに吸着したヘリウム膜の実験的研究が進んできた。そこで解ってきた興味ある事実の一つとして2・3層のヘリウム膜も「超流動性」を示すことが挙げられる。ここには，2次元有限温度では普通の意味での秩序相が存在しないのに、なぜ超流動性が見られるのか，という問題と共に，壁の外場をexplicitに考慮することは超流動性をどのように変更するのか，またはしないのか，というbulkな場合には表面効果として無視されている問題がある。ここでは後者について議論する。

例えば，T＝0 の場合 excitation の立場からすれば normal part は零と考えられるが，実際には基底状態に居る粒子も壁のポテンシャルに衝突して 運動量を失っている筈だから，たとえ T＝0 でも，壁から何の「抵抗」も受けずに流れる流体というのは考えにくい。従って２つの場合が考えられる。即ち、壁の「抵抗」のため超流動が不可能になってしまう場合と T＝0 であるにも拘らず正常部分が有限に出てくる場合である。これについて具体的に知るために今までに解っていることを見てみよう。それらは次のようである。

① $\rho_s \leqq \left[1/L \int_0^L dx \; 1/\tilde{\rho}(x) \right]^{-1}$ [1],

$\tilde{\rho}(x) = L^{-1} d^{-1} \int_0^L \int_0^d \rho(x,y,z)\, dz\, dy$

② $\rho_s/\rho = m/m^*$,（周期場中の Bose Gas）[2]

③ Bose Gas に δ－関数型の外場が入ると $\rho_n = \rho$ となり“超流動性”は壊れる。[3]

④ 超流動性が安定である条件は，任意の外場が入ってきても長波長での位相相関関数が $1/k^2$ になることである。[3]（粒子間の相互作用がこれを保証すると想像される）

③ の例が前記の「超流動性が不可能になってしまう場合」に対応している。 この他，一般に外場のために波動関数が重りなく局在化してしまうときが，この場合であると考えられる。

以下で示すことは，ｉ）変分的に計算された① の結論を外場のポテンシャルについての摂動論で follow したときの表現，ii）Bogoliubov model のように小さくても粒子間に相互作用があるとき，δ－関数的な外場に対して超流動性は安定であること（c.f. ③，④）である。

また，この報告では，「超流動性」とは Hess-Fairbank effect が生ずる，という意味であるとする。これは流体に対して壁を無限でゆっくり動かしたとき、定常状態で流体の平均運動量が壁の速度と流体の全質量を掛け合わせたものより小さくなることと同等である。

§２．外場を速度 v(t) で動かしたとき，体系の Hamiltonian は，一般的に

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_i U(\mathbf{r}_i - \mathbf{v}(t)t) \tag{1}$$

と書ける。ここに $U(r_i)$ は外場の potential 。また $v(t)$ は $t=-\infty$ から断熱的に増してくるものとして，$v(t)=v\exp[nt]$ $(t\leqq 0)$，$v(t)=v$ $(t>0)$ とする。

外場の動く速さ v は十分遅いとして，v に対する体系の（全）運動量の線型応答を求めると（$T=0$，以下議論は絶対零度に限る）

$$\langle P_\alpha \rangle_{t=0} = -i\, v_\beta \int_{-\infty}^{0} dt' \langle \Phi_0 | [P_\alpha(t'), P_\beta(0)] | \Phi_0 \rangle e^{nt'},$$

$$= v_\beta \sum_n{}' \frac{\langle \Phi_0 | P_\alpha | \Phi_n \rangle \langle \Phi_n | P_\beta | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | P_\beta | \Phi_n \rangle \langle \Phi_n | P_\alpha | \Phi_0 \rangle}{E_n - E_0} \tag{2}$$

ここで Φ_n は $v=0$ での Hamiltonian (1) の正確な固有関数。Φ_n を外場の Potential についての摂動計算で求める際，重要になるのは低い励起状態だけなので，非摂動状態は Feynman の波動関数で書けるものとする[4)]

$$|\Psi_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N S_{\mathbf{k}}}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} |\Psi_0\rangle ,$$

$$S_{\mathbf{k}} = N^{-1} \langle \Psi_0 | \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \cdot \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} | \Psi_0 \rangle$$

はじめに外場が周期的である場合を考える。

$$U(\mathbf{r}) = U_0 (e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}})$$

この場合，摂動を受けた基底状態，及びこれと運動量の行列要素をもつ状態は

$$|\Phi_0\rangle = |\Psi_0\rangle - U_0 \frac{\sqrt{N S_{\mathbf{G}}}}{E_{\mathbf{G}}} (|\Psi_{\mathbf{G}}\rangle + |\Psi_{-\mathbf{G}}\rangle)$$

$$|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{\mathbf{G}}\rangle \pm |\Psi_{-\mathbf{G}}\rangle)$$

となる。これを (2) に代入して §1 の① に対応する式

$$\rho_n/\rho = 8\left(\frac{2m\,U_0}{\hbar^2 G^2}\right)^2 S_{\mathbf{G}}^4 \tag{3}$$

$$\left[\rho-\left\{{}^1\!/_{\rho}\int_0^L dx\ 1/\widetilde{\rho}(x)\right\}^{-1}\right]/\rho = 2\left(\frac{2m\,U_0}{\hbar^2 G^2}\right)^2 S_{\mathbf{G}}^4 ,$$

を得る。即ち①の不等式は ρ_n に対する制限式と見ると，外部 potential が弱い極限では，変分で得られた ρ_n は実際の ρ_n の $1/4$ になっているということである。

§3. §2の議論をそのまま使って粒子間に相互作用がある場合には,外場として δ–関数的相互作用をもつ外場が入っても，Bose Gas のときのように $\rho_n=\rho$ とはならないことを示すことができる。1つだけ δ–関数型の外場があるとき

$$U(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{V}\sum_{\mathbf{G}>0}\left(e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

粒子間に相互作用のある体系として，一番簡単なBogoliubov modelを考える。[4] そして，ここでも外場についての摂動計算をする。非摂動状態はFeynmanの波動関数に他ならないから，この場合の ρ_n/ρ は単に (3) を波数 G について加え合わせればよく，結果は，例えば２次元の場合,

$$\rho_n/\rho = \frac{U_0}{L^2}\ \frac{2m}{\Pi\,\hbar^2\ n\alpha} \tag{4}$$

L は体系の linear dimension,. n は数密度、α は粒子間相互作用の大きさである。1，3 次元でも定性的な結論は変わらない。(4) からわかることは,

(i)　$\alpha=$ fixed,　$L\to\infty$，の時 $\rho_n/\rho\to 0$,

(ii)　$\alpha\to 0$,　$L\to\infty$，の時 $\rho_n/\rho\to\infty$。

従って、確かに粒子間相互作用があれば，δ– 関数型の外場に対して超流動性は安定であることがわかる。(ii) は粒子間相互作用を小さくしていくと摂動が収束しなくなることを意味し，これは Bose Gas の“超流動性”が δ–関数型外場に対して不安定である

ことに対応する。

不純物（δ－ 関数型外場）がたくさんある場合にも、不純物間の相関を無視すれば計算できるが、結果は単に (4) で $U_0^2 \rightarrow U_0^2(c/2N)$ と置きかえればよい。 ここで c は impurity concentration ，N は流体の全粒子数。

参　考　文　献

1) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **25** (1970), 1543. G. V. Cheste, The Helium Liquids, edited by I. G. M. Armitage and I. E. Farqhar (Academic Press, London, 1975) P. 1.
2) W. Kohn, Phys. Rev. **133** (1964), A171.
3) T. Izuyama, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 1674, **57** (1977), 42.
物性若手夏の学校講義ノート (1977)
4) A. Miller, D. Pines and P. Nozières, Phys. Rev. **127** (1962), 1452.

Spinless Fermion 結晶における集団運動

名大理　寺 中 久 男

§1. 粒子の零点振動が大きく，絶対零度でも結晶全体に広がった状態の格子欠陥 (zero point defecton) を持ち，粒子数と格子点の数が異なる量子結晶の振舞いはAndreev-Lifshitz[1)]によって最初に論ぜられた。この様な結晶は，多粒子間の相互作用により，一体の周期ポテンシャルと一粒子状態 (energy band) が作られ、結晶状態と部分的に空の状態のあるバンド状態（Boson の場合は最低 level に，Fermion の場合は Fermi level まで粒子が詰っている状態）が共存している様な系である。ある意味で金属に似ているが，金属中の電子と比べると，電子はイオンの作る周期的な外場の中を運動しているのに対して，上の状態は、粒子が自分自身で作った周期場中を運動しているという違いがある。

以下では， Fermi 粒子系を考える。格子を作っている原子の（核）スピンが，強磁