15) P. Glansdorff and I. Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (Wiley-Intersciences, London and N. Y., 1971).
16) D. D. Joseph: Stability of Fluid Motions, I and II (Springer, 1976).
17) G. Matsumoto: Biol. Bulletin **150** (1976) 279.

Fluctuation and Relaxation of Transient Laser

東大・理　有 光 敏 彦

急に発振状態におかれたレーザーが，自然放出により光を出しはじめ，定常的発振状態におちつくまでの極く短い時間の間に，光子数分布にひじょうに大きなゆらぎが観測されている。[1] この現象は，非平衡系の不安定点近傍では，一般的にみられるものである。この様な現象を扱う一つの方法として，スケーリング理論[2]が提出された。このスケーリング理論を，H. Risken[3] によって導びかれた半古典的レーザーモデルに応用し，F. T. Arecchi et al.[1]による自分たちの実験の解析と比較し，スケーリング理論がひじょうに有効であることを示す。また，レーザーの過渡的現象を扱った種々の理論があるが，[4)~7)] 今興味ある実験の解析としては，スケーリング理論が物理的直観にもうったえやすく，すぐれていることがわかる。ちなみに，スケーリング理論では分布関数が解析的に求まるが，他の理論では固有関数展開による無限級数でしか求められない。

初期状態の不安定点からのずれを示すパラメータ δ と，系の大きさ（レーザー系ではポンピング強度の２乗，つまり定常発振時の光子数）の逆数 ϵ において，(i) 不安定点上からの緩和（$\epsilon^{\mu}/\delta \to \infty$），(ii) 不安定点近傍での緩和（$\epsilon^{\mu}/\delta = \gamma^{\mu} = \text{finite}$），(iii) Ω 展開[8] の使える緩和（$\epsilon^{\mu}/\delta \to 0$）と分類できるが，紙面の都合上 (i) の場合の結果だけをここに記すことにする。

Risken[3] の式を変数変換すると，

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{2x(1-x)R\} - 2\epsilon \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} R = 0 \tag{1}$$

とかける。ただし，xは光子数に比例し，Rは光子数分布関数，$\varepsilon = 2/a^2$ で，a はポンピング強度に比例した量である。(1) より，初期領域及びスケーリング 領域での分布関数 R_{ini}, R_{sc} と，母関数 $Z_{ini}(\xi)$, $Z_{sc}(\xi)$ は次のように与えられる。

1) 初期領域

$$R_{ini}(x,\tau) = \frac{1}{2\tau-\varepsilon} \exp\left[-\frac{x}{2\tau-\varepsilon}\right], \tag{2}$$

$$Z_{ini}(\xi) = 1/\{1-(2\tau-\varepsilon)\xi\}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{2}e^{2t}. \tag{3}$$

2) スケーリング領域

$$R_{sc}(x,\tau) = \frac{\tau}{2\mu\{\tau-(\tau_1-\tau)x\}^2} \exp\left[-\frac{x}{2\mu\{\tau-(\tau_1-\tau)x\}}\right], \tag{4}$$

$$Z_{sc}(\xi) = e^{\xi\beta}\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi^m}{m!}(-\alpha\beta)^m\Gamma(1-m,\alpha)\}, \tag{5}$$

ただし，$\alpha = 1/\{2\mu(\tau-\tau_1)\}$, $\beta = \tau/(\tau-\tau_1)$, $\mu = 1-\varepsilon/(2\tau_1)$,

$\Gamma(z,p) = \int_p^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1} dt$, $Z(\xi) = \langle e^{\xi x}\rangle$ である。τ_1 は初期領域とスケーリング領域のつなぎ目をあらわす。

図1に a = 25 の場合の分布関数の時間発展を示す。また，(3) (5) から求めた，光の強度とゆらぎの時開発展を図2に示す。図3にスケーリング理論で求めた $\langle(\triangle I)^2\rangle_{sc}/I_{sc}^2$ と，Arecchi et al.が，実験の解析に用いた $\langle(\triangle I)^2\rangle/I^2$ を示す。スケーリングの結果で，$\mu=1$, $t_1=0$ (つまり $\tau_1=\frac{\varepsilon}{2}$) とおいたのが，Arecchi et al. の式と一致することがわかる。

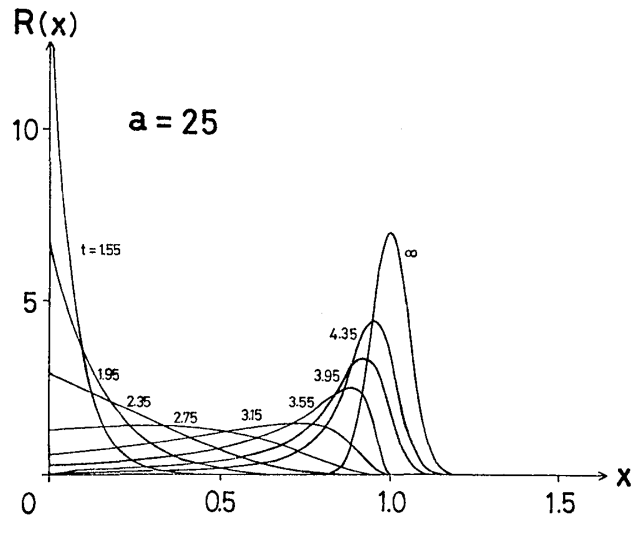

図 1.　a = 25 の場合の分布関数の時間発展

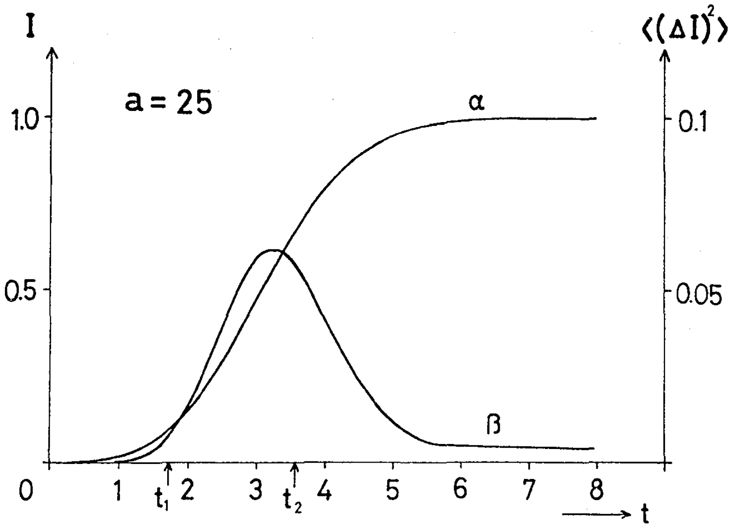

図2　a＝25の場合の光強度（α）とゆらぎ（β）の時間発展

Scaling

$$\frac{\langle(\Delta I)^2\rangle_{sc}}{I_{sc}^2} = \frac{\zeta\{1+E(\zeta)\} - E(\zeta)^2}{\{1+E(\zeta)\}^2}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{2}e^{2t}$$

$$\zeta = [2\mu(\tau-\tau_1)]^{-1}, \quad \mu = 1 - \frac{\epsilon}{2\tau_1}.$$

Arecchi et. al.,

$$\frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{I^2} = \frac{z\{1+E(z)\} - E(z)^2}{\{1+E(z)\}^2}, \quad z = [\epsilon(e^{2t}-1)]^{-1},$$

$$E(\zeta) = \zeta e^{\zeta}\int_{\infty}^{\zeta} t^{-1} e^{-t}\,dt = -\zeta e^{\zeta}\,\Gamma(0,\zeta).$$

図3　スケーリング理論のスケーリング領域での$\langle(\triangle I)^2\rangle_{sc}/I_{sc}^2$と，Arecchi et al.が実験の解析に用いた$\langle(\triangle I)^2\rangle/I^2$の表式の比較。

最後に，最近長谷川先生，その他[9)]によって議論されているentropy production rateの時間発展を図4に示す。不安定点近傍では$dp/dt > 0$なる時間帯があることがわかる。（pはentropy production）

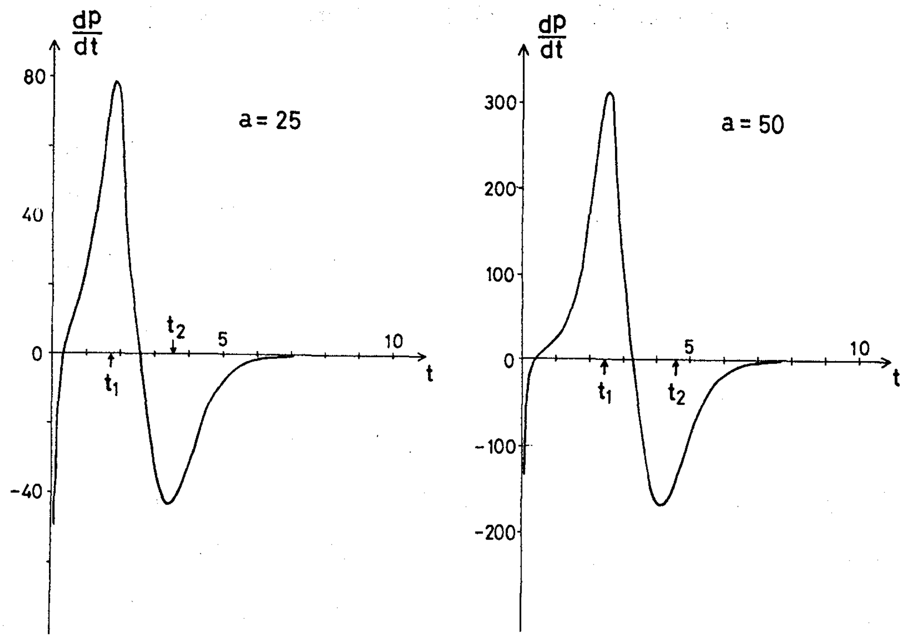

図4　a = 25 と a = 50 の場合の entropy production rate dp/dt の時間発展

参 考 文 献

(1) F. T. Arecchi and V. Degiogio, Phys. Rev. **A3** (1971) 1108

(2) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 380 及びこの中の Ref.

(3) H. Risken, in "Progress in Optics", vol. VIII, ed. E. Wolf (North-Holland 1970)

(4) H. Risken, Z. für Physik, **186** (1965) 85

(5) H. Risken and H. D. Vollmer, Z. für Physik, **204** (1967) 240

(6) M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Applied Optics **9** (1970) 2423

(7) Y. K. Wang and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **A8** (1973) 866

(8) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51

(9) H. Hasegawa, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 1523; H. Hasegawa, S. Sawada and M. Mabuchi, the 4th Rochester Conference (pre-print)