

指数格子と関連した微分差分方程式

京大理 生物物理 寺本研 成田和明

§ 1. まえがき

この論文には前の投稿「指数格子の研究」にやり残している計算をまとめてあります。従って前の内容と一部重複する所がありますが、ある程度新しい事も含んでいますので物性研究に投稿する次第です。

§ 2. 序論

Hamiltonian $H = \sum_n \frac{p_n^2}{2m} + \sum_n \phi(u_n - u_{n-1})$ をもつ一次元格子で、 $\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar$ の場合は指数格子とよばれ、 $r_n = u_n - u_{n-1}$ に対して、無次元化ののち

$\ddot{r}_n = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n} \dots\dots\dots \textcircled{1}$ とあらわされる。他の三つの非線型格子

$$\dot{a}_n = (a_{n-1} - a_{n+1}) a_n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\dot{b}_n = (b_{n-1} - b_{n+1}) b_n^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\dot{c}_n = (c_{n-1} - c_{n+1}) (1 - c_n^2) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

との変換関係は

$$e^{r_n} = a_n a_{n+1} \dots\dots\dots \textcircled{5} \quad a_n = b_n b_{n+1} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$c_n = (1 + c_n)(1 - c_{n+1}) \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

で与えられる。①②③④が主な方程式であるが以下ではこれらの方程式と関連のあるすこし複雑な形の微分差分方程式の変換関係と wave train を表わす解について述べる。

§ 3. 4つの非線型微分差分方程式

次の型の四つの方程式を考える。

$$A) \quad \dot{u}_i = \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

$$B) \quad \dot{v}_i = 4 \frac{v_{i-1} - v_{i+1}}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1})} v_i^2 \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

$$C) \quad \dot{x}_i = 4 \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{(x_{i-1} + x_i)(x_i + x_{i+1})} (1 - x_i^2) \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

$$D) \quad \dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{(y_{i-1} + y_i)(y_i + y_{i+1})} (1 - y_i^2)^2 \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

A), B), C), D) は以下のように変形できる。

① A) について

$$\dot{s}_i = \frac{\sqrt{s_{i-1} + s_i} - \sqrt{s_i + s_{i+1}}}{\sqrt{s_{i-1} + s_i} + \sqrt{s_i + s_{i+1}}} \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

という方程式を考えると

$$\dot{s}_i + \frac{1}{\dot{s}_i} = 2 \frac{s_{i-1} + s_{i+1} + 2s_i}{s_{i-1} - s_{i+1}}$$

$$\therefore \frac{\dot{s}_i}{1 + \dot{s}_i^2} = \frac{1}{2} \frac{s_{i-1} - s_{i+1}}{s_{i-1} + s_{i+1} + 2s_i} \dots\dots\dots \textcircled{13}$$

$$u_i^2 = s_i + s_{i+1} \dots\dots\dots \textcircled{14} \text{ とおくと}$$

$$\dot{s}_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{u_{i-1} + u_i}$$

したがって

$$\begin{aligned} 2u_i \dot{u}_i &= \dot{s}_i + \dot{s}_{i+1} \\ &= 2 \frac{(u_{i-1} - u_{i+1})u_i}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})} \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{u}_i = \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})}$$

$$= \frac{1}{u_i + u_{i+1}} - \frac{1}{u_{i-1} + u_i}$$

$$= b_i - b_{i+1}$$

ここに

$$b_i = \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{b_i} \right) = - \frac{\dot{b}_i}{b_i^2} = \dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}$$

$$= b_{i+1} - b_{i-1}$$

よって

$$\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i+1}) b_i^2$$

② B) について

$$\dot{t}_i = 2 \frac{t_{i-1} - t_{i+1}}{t_{i-1} + t_{i+1}} t_i \dots\dots\dots (16)$$

という方程式を考える。

$$v_i = t_i t_{i+1} \dots\dots\dots (17) \text{ とおくと}$$

$$\frac{\dot{t}_i}{t_i} = 2 \frac{v_{i-1} - v_i}{v_{i-1} + v_i}$$

したがって

$$\frac{\dot{v}_i}{v_i} = \frac{\dot{t}_i}{t_i} + \frac{\dot{t}_{i+1}}{t_{i+1}}$$

$$= 4 \frac{(v_{i-1} - v_{i+1}) v_i}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1})}$$

又は

$$\dot{v}_i = 4 \frac{v_{i-1} - v_{i+1}}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1})} v_i^2$$

ここで

$$c_i = \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}} \dots\dots\dots (18) \text{ とおくと}$$

$$\frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{1 - c_i}{1 + c_i}$$

$$\therefore \frac{\dot{v}_{i+1}}{v_{i+1}} - \frac{\dot{v}_i}{v_i} = -\frac{2\dot{c}_i}{1 - c_i^2}$$

一方 $\frac{\dot{v}_i}{v_i} = 2(c_{i-1} + c_i)$ だから

$$\dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$$

③ C) について

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4 \frac{\sqrt{1 + m_{i-1}m_i} - \sqrt{1 + m_i m_{i+1}}}{\sqrt{1 + m_{i-1}m_i} + \sqrt{1 + m_i m_{i+1}}} \dots\dots\dots (21)$$

という方程式を考える。

$$\frac{\dot{m}_i}{4m_i} + \frac{4m_i}{\dot{m}_i} = 2 \frac{2 + m_i(m_{i-1} + m_{i+1})}{m_i(m_{i-1} + m_{i+1})}$$

したがって

$$\frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_i^2 + 16m_i^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{m_{i-1} - m_{i+1}}{2 + m_i(m_{i-1} + m_{i+1})} \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\tilde{x}_i^2 = 1 + m_i m_{i+1} \dots\dots\dots (19) \text{ とおくと}$$

$$m_i m_{i+1} = \tilde{x}_i^2 - 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} + \frac{\dot{m}_{i+1}}{m_{i+1}} = \frac{2\tilde{x}_i \dot{\tilde{x}}_i}{\tilde{x}_i^2 - 1}$$

ここで

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4 \frac{\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i} \quad \text{だから}$$

$$\text{左辺} = \frac{8\tilde{x}_i (\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_{i+1})}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})}$$

よって

$$\dot{\tilde{x}}_i = 4 \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1}}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})} (1 - \tilde{x}_i^2)$$

$$\text{ここで } \xi_i = \frac{\tilde{x}_{i+1} + 1}{\tilde{x}_i + 1} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}_i}{\xi_i} &= \frac{\dot{\tilde{x}}_{i+1}}{\tilde{x}_{i+1} - 1} - \frac{\dot{\tilde{x}}_i}{\tilde{x}_i + 1} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} - 1} \cdot \frac{4(\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i)(1 - \tilde{x}_{i+1}^2)}{(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})(\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2})} \\ &\quad - \frac{1}{\tilde{x}_i + 1} \cdot \frac{4(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})(1 - \tilde{x}_i^2)}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})} \\ &= -4 \left[(1 + \tilde{x}_{i+1}) \left(\frac{1}{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}} - \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tilde{x}_i) \left(\frac{1}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i} - \frac{1}{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}} \right) \right] \\ &= -4 \left[1 - \frac{\tilde{x}_{i+1} + 1}{\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2}} - \frac{\tilde{x}_i - 1}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -4 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\tilde{x}_{i+2} - 1}{\tilde{x}_{i+1} + 1}} - \frac{\frac{\tilde{x}_i - 1}{\tilde{x}_{i-1} + 1}}{1 + \frac{\tilde{x}_i - 1}{\tilde{x}_{i-1} + 1}} \right] \\
 &= -4 \left[1 - \frac{1}{1 + \xi_{i+1}} - \frac{\xi_{i-1}}{1 + \xi_{i-1}} \right] \\
 &= -2 \left[\frac{1 - \xi_{i-1}}{1 + \xi_{i-1}} - \frac{1 - \xi_{i+1}}{1 + \xi_{i+1}} \right] \\
 &= -2 (c_{i-1} - c_{i+1})
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 c_i &= \frac{1 - \xi_i}{1 + \xi_i} \\
 &= \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + 2}{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}} \dots\dots\dots \textcircled{22} \text{ とおくと}
 \end{aligned}$$

$$\xi_i = \frac{1 - c_i}{1 + c_i} \quad \text{だから}$$

$$\frac{\dot{\xi}_i}{\xi_i} = - \frac{2\dot{c}_i}{1 - c_i^2}$$

したがって

$$\dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$$

④ D) について

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(z_i + \frac{1}{z_i} \right)$$

$$z_i = \frac{1 - y_i}{1 + y_i}$$

とすると

$$\xi_i = \frac{1 + y_i^2}{1 - y_i^2} \quad \therefore y_i^2 = \frac{\xi_i - 1}{\xi_i + 1}$$

また

$$z_i = \frac{\sqrt{\xi_i + 1} + \sqrt{\xi_i - 1}}{\sqrt{\xi_i + 1} - \sqrt{\xi_i - 1}}$$

ここで方程式系

$$\xi_i \left(= \frac{1}{2} \left(z_i + \frac{1}{z_i} \right) \right) = v_i + v_{i+1} \dots\dots\dots \textcircled{23}$$

$$\dot{v}_i = 2 \frac{z_{i-1} - z_i}{1 - z_{i-1} z_i}$$

を考える。この時

$$y_i^2 = \frac{v_i + v_{i+1} - 1}{v_i + v_{i+1} + 1}, \quad \text{又} \quad z_i = \frac{a_i + b_i}{a_i - b_i}$$

(ここに $a_i \equiv \sqrt{\xi_i + 1}$ $b_i \equiv \sqrt{\xi_i - 1}$) であるから,

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= 2 \frac{a_{i-1} b_i - a_i b_{i-1}}{a_{i-1} b_i + a_i b_{i-1}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{(\xi_{i-1} + 1)(\xi_i - 1)} - \sqrt{(\xi_{i-1} - 1)(\xi_i + 1)}}{\sqrt{(\xi_{i-1} + 1)(\xi_i - 1)} + \sqrt{(\xi_{i-1} - 1)(\xi_i + 1)}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{(v_{i-1} + v_i + 1)(v_i + v_{i+1} - 1)}}{\sqrt{(v_{i-1} + v_i + 1)(v_i + v_{i+1} - 1)} \\ &\quad - \sqrt{(v_{i-1} + v_i + 1)(v_i + v_{i+1} + 1)} \\ &\quad + \sqrt{(v_{i-1} + v_i - 1)(v_i + v_{i+1} + 1)}} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{2\dot{v}_i}{4 + \dot{v}_i^2} = \frac{1}{\frac{2}{\dot{v}_i} + \frac{\dot{v}_i}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1}) - 1}$$

$$\therefore \frac{\dot{v}_i}{4 + \dot{v}_i^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1}) - 1} \dots\dots\dots (24)$$

この時

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(z_i + \frac{1}{z_i} \right) &= - \frac{1 - z_i^2}{z_i^2} \dot{z}_i = \frac{d}{dt} (2 \xi_i) = 2 (\dot{v}_i + \dot{v}_{i+1}) \\ &= 4 \cdot \frac{(z_{i-1} - z_{i+1})(1 - z_i^2)}{(1 - z_{i-1} z_i)(1 - z_i z_{i+1})} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -4 \frac{z_{i-1} - z_{i+1}}{(1 - z_{i-1} z_i)(1 - z_i z_{i+1})} z_i^2 \dots\dots\dots (25) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1 + z_i z_{i+1}}{1 - z_i z_{i+1}} - \frac{1 + z_{i-1} z_i}{1 - z_{i-1} z_i} \right) \\ &= 2 (c_i - c_{i-1}) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} c_i &\equiv \frac{1 + z_i z_{i+1}}{1 - z_i z_{i+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{1-y_i}{1+y_i} \cdot \frac{1-y_{i+1}}{1+y_{i+1}}}{1 - \frac{1-y_i}{1+y_i} \cdot \frac{1-y_{i+1}}{1+y_{i+1}}} \\ &= \frac{1 + y_i y_{i+1}}{y_i + y_{i+1}} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

又, $z_i z_{i+1} = \frac{c_i - 1}{c_i + 1}$ より

$$\frac{\dot{z}_i}{z_i} + \frac{\dot{z}_{i+1}}{z_{i+1}} = \frac{2\dot{c}_i}{c_i^2 - 1}$$

一方左辺 = $2(c_i - c_{i-1} + c_{i+1} - c_i) = 2(c_{i+1} - c_{i-1})$

$\therefore \dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$

又 $\frac{\dot{z}_i}{z_i} = \frac{-2\dot{y}_i}{1 - y_i^2} = 2(c_i - c_{i-1})$

$$= 2 \left(\frac{1 + y_i y_{i+1}}{y_i + y_{i+1}} - \frac{1 + y_{i-1} y_i}{y_{i-1} + y_i} \right)$$

$$= 2 \frac{(y_{i-1} - y_{i+1})(1 - y_i^2)}{(y_i + y_{i+1})(y_{i-1} y_i)}$$

よって $\dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{(y_{i-1} + y_i)(y_i + y_{i+1})} (1 - y_i^2)^2 \dots\dots\dots \textcircled{27}$

ここで $b_i = \frac{2i}{\frac{1}{z_{i+1}} - z_i}$ (i は虚数単位) とおく。

$$b_i = \frac{2i}{\frac{1 + y_{i+1}}{1 - y_{i+1}} - \frac{1 - y_i}{1 + y_i}}$$

$$= i \frac{(1 + y_i)(1 - y_{i+1})}{y_i + y_{i+1}} \dots\dots\dots \textcircled{28}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{b_i} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z_{i+1}} - z_i \right) \right\} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{\dot{z}_{i+1}}{z_{i+1}^2} + \dot{z}_i \right)$$

$$= -\frac{2}{i} \left\{ \frac{z_{i+2} - z_i}{(1 - z_i z_{i+1})(1 - z_{i+1} z_{i+2})} + \frac{(z_{i+1} - z_{i-1}) z_i^2}{(1 - z_{i-1} z_i)(1 - z_i z_{i+1})} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{i} \left\{ \frac{\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_{i+2}}}{\left(\frac{1}{z_i} - z_{i+1}\right)\left(\frac{1}{z_{i+2}} - z_{i+1}\right)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{\left(\frac{1}{z_i} - z_{i-1}\right)\left(\frac{1}{z_i} - z_{i+1}\right)} \right\} \\
 &= -\frac{2}{i} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{z_{i+2}} - z_{i+1}} - \frac{1}{\frac{1}{z_i} - z_{i+1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{z_i} - z_{i+1}} - \frac{1}{\frac{1}{z_i} - z_{i-1}} \right\} \\
 &= b_{i+1} - b_{i-1}
 \end{aligned}$$

よって $\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i+1}) b_i^2$

⑤ §3 のまとめ

方程式 A), B), C), D) より次の変換

$$b_i = \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \dots\dots\dots (15)$$

$$c_i = \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}} \dots\dots\dots (16)$$

$$c_i = \frac{x_i - x_{i+1} + 2}{x_i + x_{i+1}} \dots\dots\dots (22)$$

$$b_i = i \frac{(1 + y_i)(1 - y_{i+1})}{y_i + y_{i+1}} \dots\dots\dots (28)$$

$$c_i = \frac{1 + y_i y_{i+1}}{y_i + y_{i+1}} \dots\dots\dots (26)$$

により, 方程式

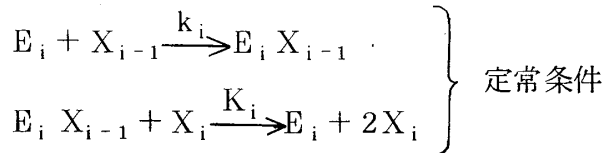
$$\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i+1}) b_i^2, \quad \dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$$

が導かれる。A), B), C), D) の(補助)方程式はそれぞれ⑬, ⑯, ⑳, ㉔である。

§4 生物物理学との関連

① B) について

a) 次のような反応系を考える。



E_i 又は $E_i X_{i-1}$ に着目して定常状態の条件より

$$k_i [E_i] [X_{i-1}] = K_i [E_i X_{i-1}] [X_i]$$

よって

$$[E_i X_{i-1}] = \frac{k_i [X_{i-1}]}{K_i [X_i]} [E_i]$$

$[E_i] + [E_i X_{i-1}] = e_i$ (保存)より

$$[E_i] = \frac{e_i}{1 + \frac{k_i [X_{i-1}]}{K_i [X_i]}} = \frac{e_i K_i [X_i]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]}$$

よって

$$[E_i X_{i-1}] = \frac{e_i k_i [X_{i-1}]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]}$$

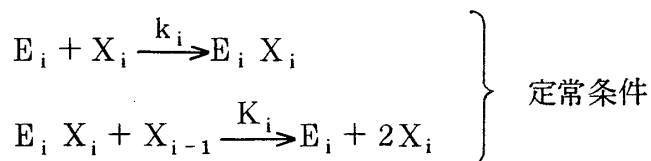
$$\begin{aligned} \frac{d [X_i]}{dt} &= -k_{i+1} [E_{i+1}] [X_i] + K_i [E_i X_{i-1}] [X_i] \\ &= -\frac{k_{i+1} e_{i+1} K_{i+1} [X_{i+1}] [X_i]}{K_{i+1} [X_{i+1}] + k_{i+1} [X_i]} \\ &\quad + \frac{K_i e_i k_i [X_{i-1}] [X_i]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]} \end{aligned}$$

ここで仮定 $k_i = K_i = k$, $e_i = e$ を置くと

$$\frac{d[X_i]}{dt} = ke \frac{[X_{i-1}] - [X_{i+1}]}{([X_{i-1}] + [X_i])([X_i] + [X_{i+1}])} [X_i]^2$$

これは B) 式に変形できる。

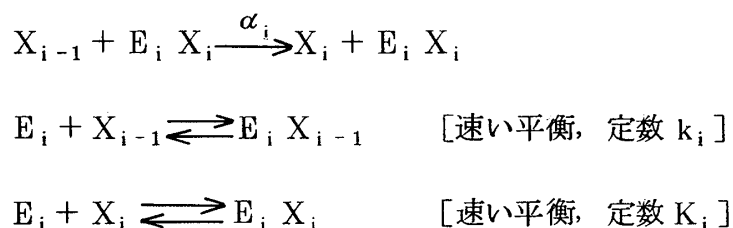
b) 次のような反応系



に於いても全く同様にして B) 式が誘導できる。

② C) 式について

C) 式に対応する反応系は



で定数が適当な一定値をとった時であるが、これは非常に非現実的な反応系模型となっている。

③ A), D) 二式は流入項と流出項の差の形に書直せないの、対応する反応系模型は存在しない。

§5 解を求める為の準備

—— 対称な双二次式 ——

Jacobi の楕円函数 $x_i = \text{sn } X, \text{cn } X, \text{dn } X$ ($X = \alpha_i + \beta t$) に対する加法定理を差当って次のような記号を使って書いておく。但し、加法定理の内容がこれで尽されているという意味ではないのは勿論である。

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = 2A \frac{\dot{x}_i}{x_i^2 - D^2}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} = 2B \frac{x_i}{x_i^2 - D^2}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} \cdot x_{i-\frac{1}{2}} = -D^2 \frac{x_i^2 - C^2}{x_i^2 - D^2}$$

ここで $C \cdot D = K$ (定数) であり, $B^2 = (1 - D^2)(K^2 - D^2)$ が満足されていることに注意。次に対称な双二次式 $L(x, y)$ を次式で定義する。

$$(x_{i+\frac{1}{2}} + R)(x_{i-\frac{1}{2}} + R) = \frac{L(x_i, R)}{x_i^2 - D^2}$$

この時,

$$L(x, y) = x^2 y^2 - D^2(x^2 + y^2) + 2Bxy + K^2$$

∴ $L(x, y) = L(y, x)$ である。

又, $L(x, \pm 1) = (1 - D^2)(x_i \pm G)^2$

$$L(x, \pm K) = (K^2 - D^2)(x_i \pm H)^2$$

$$G = \frac{B}{1 - D^2}, \quad H = \frac{K \cdot B}{K^2 - D^2}, \quad G \cdot H = K$$

も確かめられる。

§6 解の求め方

① A) 式の解

A) 式は方程式系

$$\dot{s}_i = \frac{u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i-\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots (28)$$

$$u_i^2 = s_{i-\frac{1}{2}} + s_{i+\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (29)$$

と同値であることは前に述べた。

$$s_i = a \frac{x_i + b}{x_i + 1}, \quad u_i = e \frac{x_i + d}{x_i + G}$$

を仮定して未定定数を定める。条件⑳があるので、加法定理を使って㉑の右辺を整理した結果が完全平方式でなければならない。このことから $\frac{e^2}{a}$, b , d がきまり、㉒を使って a が決まる。結果は

$$a = \frac{A(D^4 + (3 - K^2)D^2 + K^2)}{2B(K^2 - D^2)}$$

$$b = \frac{D^4 + (3K^2 - 1)D^2 + K^2}{D^4 + (3 - K^2)D^2 + K^2}$$

$$e^2 = \left(\frac{1 + D^2}{1 - D^2}\right)^2 \frac{AB}{K^2 - D^4}$$

$$d = \frac{K^2 + D^2}{G(1 + D^2)}$$

② B) 式の解

B) 式は広田先生の nonlinear network の理論に関連した方程式で、 a を任意定数とし、解が

$$t_i = ax_i$$

$$\therefore v_i = -a^2 D^2 \frac{x_i^2 - C^2}{x_i^2 - D^2} \quad \text{で与えられる。}$$

この時分散関係が

$$2A + B = 0 \quad \text{となる。}$$

③ C) 式の解

C) 式が

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4 \frac{\tilde{x}_i - \frac{1}{2} - \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}}{\tilde{x}_i - \frac{1}{2} + \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots \textcircled{30} \\ \tilde{x}_i^2 = 1 + m_i - \frac{1}{2} m_{i+\frac{1}{2}} \dots\dots\dots \textcircled{31} \end{array} \right.$$

と表わされることは前に述べた。

解を

$$\begin{cases} m_i = a \frac{x_i + u}{x_i + 1} \\ \tilde{x}_i = b \frac{x_i + v}{x_i + G} \end{cases}$$

と仮定して未定の定数を定めることを考える。まず

$$\begin{aligned} 4 \frac{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}} - \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}}{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}} + \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{\frac{8A(v-G)}{L(x_i, G)} \dot{x}_i}{\frac{x_i + \frac{1}{2} + v}{x_i + \frac{1}{2} + G} - \frac{x_i - \frac{1}{2} + v}{x_i - \frac{1}{2} + G}} \\ &= \frac{4A(D^4 - 2D^2 + K^2)(v-G)}{B(G^2 - D^2)(v - \frac{D^2}{G})} \cdot \frac{\dot{x}_i}{(x_i + 1) \left(x_i - \frac{D^2(v - \frac{C^2}{G})}{v - \frac{D^2}{G}} \right)} \end{aligned}$$

ここに

$$L(x_i, G) = (G^2 - D^2)(x_i + 1)(x_i + G(2\alpha)) \quad \text{及び}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_i + \frac{1}{2} + v}{x_i + \frac{1}{2} + G} - \frac{x_i - \frac{1}{2} + v}{x_i - \frac{1}{2} + G} &= \frac{1}{G} \left\{ \frac{(G-v)(x_i + \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2} - G^2)}{(x_i + \frac{1}{2} + G)(x_i - \frac{1}{2} + G)} + G + v \right\} \\ &= \frac{2B}{D^4 - 2D^2 + K^2} \cdot \frac{(v - \frac{D^2}{G})x_i - D^2(v - \frac{C^2}{G})}{x_i + G(2\alpha)} \end{aligned}$$

を使った。($G(2\alpha)$ は倍角の G_0) 他方

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = \frac{(1-u)\dot{x}_i}{(x_i + 1)(x_i + u)} \quad \text{と比較することにより}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -D^2 \frac{v - \frac{C^2}{G}}{v - \frac{D^2}{G}} \dots\dots\dots (32) \\ 1 - u = \frac{4A(D^4 - 2D^2 + K^2)(v - G)}{B(G^2 - D^2)(v - \frac{D^2}{G})} \dots\dots\dots (33) \end{array} \right.$$

③②③を解くと

$$u = \frac{B(D^4 - K^2) + 4A(D^4 - 2K^2 D^2 + K^2)}{B(D^4 - K^2) + 4A(D^4 - 2D^2 + K^2)} \dots\dots\dots (34)$$

$$v = \frac{D^2 + K^2 - 4AG}{G(1 + D^2) - 4A} \dots\dots\dots (35)$$

但し $G = \frac{B}{1 - D^2}$ を使った。

次に a^2 を決める。ここで③②の条件の下で

$$L(x_i, u) = \epsilon_1 (x_i + G)^2 + \epsilon_2 (x_i + v)^2 + \epsilon_3 (x_i + G)(x_i + v)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \frac{D^2 (D^2 - 1)(u + 1)(u^2 - K^2)}{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))(u^2 - D^2)} \\ \epsilon_2 = \frac{(K^2 - D^2)(u - 1)(u + D^2)^2}{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))(u^2 - D^2)} \\ \epsilon_3 = 0 \end{array} \right.$$

が証明される。但し、 $G = \frac{B}{1 - D^2}$,

$$G(2\alpha) = \frac{D^4 - 2K^2 D^2 + K^2}{D^4 - 2D^2 + K^2} \text{ を使った。}$$

よって

$$1 + m_i + \frac{1}{2} m_i - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + a^2 \frac{u^2 - D^2}{1 - D^2} \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 \left(\frac{x_i + v}{x_i + G} \right)^2 \right) \\
 &= \left(1 + \frac{a^2 (u^2 - D^2) \epsilon_1}{1 - D^2} \right) + \frac{a^2 (u^2 - D^2) \epsilon_2}{(1 - D^2) b^2} \cdot \tilde{x}_i^2
 \end{aligned}$$

これを

$$1 + m_i + \frac{1}{2} m_i - \frac{1}{2} = \tilde{x}_i^2 \quad \text{と比較して}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= - \frac{1 - D^2}{\epsilon_1 (u^2 - D^2)} \\
 &= \frac{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))}{D^2 (u + 1)(u^2 - K^2)} \\
 &= \frac{- \{ 4A(D^4 - 2K^2D^2 + K^2) + B(D^4 - K^2) \}^2}{(D^4 - K^2 + 4AB) \{ 4A(D^2 + K) + B(D^2 - K) \} \{ 4A(D^2 - K) + B(D^2 + K) \}} \\
 &\dots\dots\dots (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b^2 &= \frac{1 - D^2}{a^2 (u^2 - D^2) \epsilon_2} \\
 &= \frac{(K^2 - D^2)(u - 1)(u + D^2)^2}{D^2 (1 - D^2)(u + 1)(u^2 - K^2)} \\
 &= \frac{4A(K^2 - D^2)(D^4 - K^2) \{ B(1 + D^2) - 4A(1 - D^2) \}^2}{B(1 - D^2)(D^4 - K^2 + 4AB) \{ 4A(D^2 + K) + B(D^2 - K) \} \{ 4A(D^2 - K) + B(D^2 + K) \}} \\
 &\dots\dots\dots (37)
 \end{aligned}$$

③④, ③⑤, ③⑥, ③⑦で完全な答が求まったことになる。 x_i として $\text{dn}(x, k)$ をとると

$$\left(\text{dn} \left((1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right) = \frac{1 - k \text{sn}^2(u, k)}{1 + k \text{sn}^2(u, k)} \quad \text{で } \text{sn}^2 \text{ に変換可能} \right),$$

α, β の適当な範囲の中で定数がすべての実数値をとっているのが確かめられる。

④ D) 式の解

$$y_i = \frac{1 - z_i}{1 - z_i} \quad \text{であらわすと, } z_i \text{ は連立形}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_i = \frac{2(z_i - \frac{1}{2} - z_{i+\frac{1}{2}})}{1 - z_i - \frac{1}{2} z_{i+\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots \textcircled{38} \\ z_i + \frac{1}{z_i} = 2(v_i - \frac{1}{2} + v_{i+\frac{1}{2}}) \dots\dots\dots \textcircled{39} \end{array} \right.$$

をみたすことは既にものべた。

解として

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i = a \frac{x_i + P}{x_i + Q} \\ v_i = b \frac{x_i - Z}{x_i - S} \end{array} \right.$$

という形を仮定して未定の定数を定めることを考えよう。まず $L(x_i, P)$ と $L(x_i, Q)$ が共通根をもつ条件は、二次式の終結式 = 0 より

$$(PQ + C^2)(PQ + D^2) = D^2(2\alpha)(P + Q)^2 \dots\dots\dots \textcircled{40}$$

この時

$$L(x_i, Q) = (Q^2 - D^2)(x_i - S)(x_i - U)$$

$$L(x_i, P) = (P^2 - D^2)(x_i - S)(x_i - T)$$

$$L(x_i, S) = (S^2 - D^2)(x_i - P)(x_i - Q)$$

と表わされ、

$$P + Q = -\frac{2BS}{S^2 - D^2} \dots\dots\dots \textcircled{41}, \quad PQ = -D^2 \frac{S^2 - C^2}{S^2 - D^2} \dots\dots\dots \textcircled{42}$$

$$S = \frac{(D^4 - K^2)(P + Q)}{2B(PQ + D^2)} \dots\dots\dots \textcircled{43}, \quad T = \frac{1}{S} \cdot \frac{K^2 - D^2 P^2}{P^2 - D^2} \dots\dots\dots \textcircled{44},$$

$$U = \frac{1}{S} \cdot \frac{K^2 - D^2 Q^2}{Q^2 - D^2} \dots\dots\dots \textcircled{45}$$

を得る。

④① ④② から、後で用いる公式、

$$f(S^2) \equiv \left\{ (S^2 + D^2)P^2 - D^2(S^2 + C^2) \right\} \left\{ (S^2 + D^2)Q^2 - D^2(S^2 + C^2) \right\} = -\frac{4B^2D^2S^2}{(S^2 - D^2)^2} (S^2 - G^2)(S^2 - H^2) \dots\dots\dots ④⑥$$

を得る。但し、

$$\frac{(K^2 - D^4)^2}{B^2D^2} = 4D^2(2\alpha) = C^2 + D^2 + G^2 + H^2$$

($D(2\alpha)$ は倍角の D) を使った。又 ④③ ④④ ④⑤ から、後で用いる公式

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S-U}{S-T} &= \frac{P^2 - D^2}{Q^2 - D^2} \cdot \frac{(S^2 + D^2)Q^2 - D^2(S^2 + C^2)}{(S^2 + D^2)P^2 - D^2(S^2 + C^2)} \dots\dots\dots ④⑦ \\ \frac{U-T}{S-T} &= \frac{(K^2 - D^4)(P^2 - Q^2)}{(Q^2 - D^2)\{(S^2 + D^2)P^2 - D^2(S^2 + C^2)\}} \dots\dots\dots ④⑧ \end{aligned} \right.$$

を得る。

$$v_i = b \frac{x_i - Z}{x_i - S} \quad \text{としたから}$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{b(S-Z)}{S} \left\{ \frac{x_{i+\frac{1}{2}}x_{i-\frac{1}{2}} - S^2}{(x_{i+\frac{1}{2}} - S)(x_{i-\frac{1}{2}} - S)} + \frac{S+Z}{S-Z} \right\}$$

ここで

$$x_{i+\frac{1}{2}}x_{i-\frac{1}{2}} - S^2 = \frac{-1}{x_i^2 - D^2} \left\{ C_1(x_i + P)^2 + C_2(x_i + Q)^2 + C_3(x_i + P)(x_i + Q) \right\}$$

とすると、

$$C_1 = \frac{(S^2 - D^2)^2 \{ (S^2 + D^2) Q^2 - D^2 (S^2 + C^2) \}}{4D^2 (S^2 - 1)(S^2 - K^2)} \dots\dots\dots (57)$$

$$C_2 = \frac{(S^2 - D^2)^2 \{ (S^2 + D^2) P^2 - D^2 (S^2 + C^2) \}}{4D^2 (S^2 - 1)(S^2 - K^2)} \dots\dots\dots (58)$$

$$C_3 = \frac{(S^2 - D^2)(S^4 - K^2)}{(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}$$

となる。但しここで

$$(P - Q)^2 = \frac{4D^2 (S^2 - 1)(S^2 - K^2)}{(S^2 - D^2)^2} \text{ を使った。}$$

したがって、

$$v_{i+\frac{1}{2}} v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{b(S-Z)}{S} \left\{ \frac{-C_1}{a(S^2 - D^2)} \left(z_i + \frac{a^2 C_2}{C_1} \frac{1}{z_i} \right) + \frac{S+Z}{S-Z} - \frac{C_3}{S^2 - D^2} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

④と $v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(z_i + \frac{1}{z_i} \right)$ を比較して3つの条件式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2 C_2}{C_1} = 1 \dots\dots\dots (50) \\ \frac{S+Z}{S-Z} - \frac{C_3}{S^2 - D^2} = 0 \dots\dots\dots (51) \\ \frac{b(S-Z)}{aS(S^2 - D^2)} C_1 = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots (52) \end{array} \right.$$

を得る。

⑤より

$$a^2 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{(S^2 + D^2) Q^2 - D^2 (S^2 + C^2)}{(S^2 + D^2) P^2 - D^2 (S^2 + C^2)} \dots\dots\dots (53)$$

$$= \frac{Q^2 - D^2}{P^2 - D^2} \cdot \frac{S - U}{S - T} \dots\dots\dots (54) \quad (\because (47))$$

(51) より

$$Z = \frac{1 + K}{2S} \cdot \frac{S^2 - \frac{2K}{1 + K^2}}{S^2 - \frac{1 + K^2}{2}} \dots\dots\dots (55)$$

(52) より

$$b^2 = \frac{S^2 (S^2 - D^2)^2}{4} \cdot \frac{1}{(S - Z)^2} \cdot \frac{a^2}{C_1^2} \dots\dots\dots (56)$$

ここで (55) より

$$\frac{1}{S - Z} = \frac{S (S^2 - \frac{1 + K^2}{2})}{(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}$$

(57), (53) より

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{C_1^2} &= \left(\frac{4D^2 (S^2 - 1)(S^2 - K^2)}{(S^2 - D^2)^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{f(S^2)} \\ &= \left(\frac{2D(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}{BS(S^2 - D^2)} \right)^2 \cdot \frac{1}{(S^2 - G^2)(S^2 - H^2)} \end{aligned}$$

が得られるから、これを (56) に代入すると、

$$b^2 = \frac{D^2 S^2 (S^2 - \frac{1 + K^2}{2})^2}{B^2 (S^2 - G^2)(S^2 - H^2)} \dots\dots\dots (59) \quad \text{となる。}$$

次に S を決める。

$$\frac{z_i - \frac{1}{2} - z_{i+1/2}}{1 - z_i - \frac{1}{2} z_{i+1/2}} = \frac{a(P - Q) \frac{2A \dot{x}_i}{L(x_i, Q)}}{1 - a^2 \frac{L(x_i, P)}{L(x_i, Q)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 a A \frac{P-Q}{Q^2-D^2} \cdot \frac{\dot{x}_i}{(x_i-S)(x_i-U)}}{\frac{U-T}{S-T} \cdot \frac{x_i-S}{x_i-U}} \quad (\because \textcircled{54}) \\
 &= \frac{2 a A \{ (S^2+D^2)P - D^2(S^2+C^2) \}}{(K^2-D^4)(P+Q)} \\
 &\quad \cdot \frac{\dot{x}_i}{(x_i-S)^2} \quad (\because \textcircled{48}) \dots\dots\dots \textcircled{60}
 \end{aligned}$$

これを

$$\frac{z_i - \frac{1}{2} - z_i + \frac{1}{2}}{1 - z_i - \frac{1}{2} z_i + \frac{1}{2}} = \frac{\dot{v}_i}{2} = - \frac{b(S-Z)}{2(x_i-S)^2} \dot{x}_i$$

と比較して

$$\begin{aligned}
 &- \left(\frac{4A}{K^2-D^4} \right) \left(\frac{1}{P+Q} \right) \left(\frac{a}{b(S-Z)} \right) \left\{ (S^2+D^2)P^2 - D^2 \right. \\
 &\quad \left. (S^2+C^2) \right\} = 1 \dots\dots\dots \textcircled{61}
 \end{aligned}$$

④と⑤から得られる $\frac{a}{b(S-Z)} = \frac{-2C_1}{S(S^2-D^2)}$ を代入すると

$$-A(S^2-D^2)^2 f(S^2) = BD^2(K^2-D^4)S^2(S^2-1)(S^2-K^2)$$

ここで $f(S^2)$ の表式を用いると、

$$4AB(S^2-G^2)(S^2-H^2) = (K^2-D^4)(S^2-1)(S^2-K^2) \dots\dots \textcircled{62}$$

これを解くと

$$S^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{K^2-D^4}{4AB}\right)} \left\{ G^2 + H^2 - \frac{(1+K^2)(K^2-D^4)}{4AB} \right\}$$

$$\pm \sqrt{\frac{(K^2 - D^4)(1 - K)^2}{4AB} - (G - H)^2} \left\{ \frac{(K^2 - D^4)(1 + K)^2}{4AB} - (G + H)^2 \right\} \dots\dots\dots (63)$$

P, Qは $L(x_i, S) = 0$ の二根であって解くと,

$$P = \frac{-BS \pm D \sqrt{(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}}{S^2 - D^2} \dots\dots\dots (64)$$

$$Q = \frac{-BS \pm D \sqrt{(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}}{S^2 - D^2} \dots\dots\dots (65)$$

又, P^2, Q^2 を P, Q で表わすことにより (63) から

$$a^2 = \frac{BQ(S^2 + D^2) + (K^2 - D^4)S}{BP(S^2 + D^2) + (K^2 - D^4)S} \dots\dots\dots (66)$$

を得る。

(63), (64), (65), (66), (69) は未定であった定数を α と β を使って表わしたもので, 完全な答となっている。 x_i として $\text{dn } x$ をとり $(\text{dn}((1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k})) =$

$\frac{1 - k \text{sn}^2(u, k)}{1 + k \text{sn}^2(u, k)}$ で sn^2 に変換可能), α, β を適当な領域にえらぶと, これ

らが実数の解であり, 又 ($x = d_i + \beta t$ に関して特異でない) 普通の wave train の形の解を与えていることを示すこともできる。