京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学 KYOTO UNIVERSITY

Title	Cowanの方程式と非線型振動子
Author(s)	寺本, 研; 成田, 和明
Citation	物性研究 (1978), 30(5): 207-215
Issue Date	1978-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89568
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

Cowan の方程式と非線型振動子

京大理　生物物理　　寺　本　　研
成　田　和　明

§ 1. 序　論

1968年と1970年に J. D. Cowan は神経システムを記述する方程式をミクロスコピックな見地から提案している。[1)2)] 2要素の場合にこの方程式をかきおろすと，

$$\left.\begin{aligned}\tau\frac{dx_1}{dt}&=\left(b_1u_1+\frac{1}{\beta_1}\alpha_{12}x_2\right)x_1(1-x_1)\\ \tau\frac{dx_2}{dt}&=\left(b_2u_2+\frac{1}{\beta_2}\alpha_{21}x_1\right)x_2(1-x_2)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

但し，τ，b_1，b_2，u_1，u_2，β_1，β_2，α_{12}，α_{21} は定数である。（定数の生理学的意味に関しては 2）を参照して下さい）

以下の節では，変数の変換によって，方程式(1)の内のいくつかのタイプが非線型振動子の方程式に帰着できることを示す。

§ 2. 三つの Cowan の方程式

(Type 1-a)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt}&=\alpha_1((2+r)c_2-r)c_1(1-c_1)\\ \frac{dc_2}{dt}&=\alpha_1(2+r-2(2+r)c_1)c_2(1-c_2)\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

但し α_1，r は定数である。平衡点の座標は $(c_1^0,\ c_2^0)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{r}{2+r}\right)$ で $0<r<\infty$ のとき $0<c_1^0<1$，$0<c_2^0<1$ の領域中にある。変換

$$\begin{cases}a_1=1-c_1\\ a_2=c_1(1-c_2)\end{cases}\qquad すなわち\begin{cases}c_1=1-a_1\\ c_2=\dfrac{1-a_1-a_2}{1-a_1}\end{cases}$$

により，a_1，a_2 のみたす方程式は

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \alpha_1(2a_1+(2+r)a_2-2)a_1 \\ \frac{da_2}{dt} &= \alpha_1(2+r-2(1+r)a_1-(2+r)a_2)a_2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

となる。平衡点は $(a_1^0, a_2^0)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2+r}\right)$ で $0<r<\infty$ のとき $a_1^0>0$， $a_2^0>0$， $a_1^0+a_2^0<1$ の領域中にある。

(Type 1-b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_1^*}{dt} &= \alpha_1(r-2(1+r)c_2^*)c_1^*(1-c_1^*) \\ \frac{dc_2^*}{dt} &= \alpha_1(2(2+r)c_1^*-2(1+r))c_2^*(1-c_2^*) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

α_1， r は定数である。平衡点の座標は $(c_1^0, c_2^0)=\left(\frac{1+r}{2+r}, \frac{r}{2(1+r)}\right)$ で $0<r<\infty$ のとき $0<c_1^0<1$， $0<c_2^0<1$ の領域中にある。変換

$$\left(\begin{aligned} a_1 &= c_1^*(1-c_2^*) \\ a_2 &= 1-c_1^* \end{aligned}\right. \qquad \text{すなわち} \qquad \left(\begin{aligned} c_1^* &= 1-a_2 \\ c_2^* &= \frac{1-a_1-a_2}{1-a_2} \end{aligned}\right.$$

により， a_1，a_2 は方程式(3)をみたす。従って c_1，c_2 と c_1^*，c_2^* の関係は

$$\left(\begin{aligned} c_1^* &= 1-c_1+c_1c_2 \\ c_2^* &= \frac{c_1c_2}{1-c_1+c_1c_2} \end{aligned}\right. \qquad \text{又は} \qquad \left(\begin{aligned} c_1 &= 1-c_1^*+c_1^*c_2^* \\ c_2 &= \frac{c_1^*c_2^*}{1-c_1^*+c_1^*c_2^*} \end{aligned}\right.$$

となる。次に変換

$$\left(\begin{aligned} x &= \left(\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2}a_1a_2\right)^{\frac{1}{r}} \\ p &= \alpha_1(1-2a_1)\left(\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2}a_1a_2\right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}\right.$$

又は

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{\alpha_1 x}\right) \\ a_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\, x^r \left(1-\frac{p}{\alpha_1 x}\right)^{-1} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

をおこなうと，ハミルトニアンを

$$H=\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}x^2(\alpha_1^2-2\alpha_2 x^r) \tag{6}$$

として x，p に関して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\ ,\ \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{7}$$

がなりたつ。運動方程式は $r=1$，2 のとき楕円函数を用いて求積できる。ここで c_1，c_2，c_1^*，c_2^* を x，p であらわすと，

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{p}{\alpha_1 x}\right) \\ c_2 &= \frac{p^2-x^2(\alpha_1^2-2\alpha_2 x^r)}{p^2-\alpha_1^2 x^2} \\ c_1^* &= \frac{x(\alpha_1^2-\alpha_2 x^r)-\alpha_1 p}{\alpha_1(\alpha_1 x-p)} \\ c_2^* &= \frac{p^2-x^2(\alpha_1^2-2\alpha_2 x^r)}{2x(\alpha_1 p-x(\alpha_1^2-\alpha_2 x^r)} \end{aligned}\right.$$

となる。

注）よく知られているように，ハミルトニアン(6)は $r=2$ の時，カノニカル変換

$$X=\frac{1}{\sqrt{8\alpha_2}}\,\frac{p}{x},\quad P=\frac{1}{\sqrt{8\alpha_2}}\left(\alpha_1^2-4\alpha_2 x^2-\frac{p^2}{x^2}\right)$$

によって

$$H=\frac{P^2}{2}-\frac{1}{16\alpha_2}(\alpha_1^2-8\alpha_2 X^2)^2$$

に変換できる。

(Type 2)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} &= \beta_1((2+r)c_2-2)c_1(1-c_1)\\ \frac{dc_2}{dt} &= \beta_1(2+r-2(1+r)c_1)c_2(1-c_2)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

但し β_1, rは定数である。平衡点の座標は $(c_1^0, c_2^0) = \left(\frac{2+r}{2(1+r)}, \frac{2}{2+r}\right)$ で $0<r<\infty$のとき $0<c_1^0<1$, $0<c_2^0<1$ の領域中にある。また，変換

$$\left(\begin{aligned}c_1^* &= 1-c_1+c_1c_2\\ c_2^* &= \frac{c_1c_2}{1-c_1+c_1c_2}\end{aligned}\right. \quad \text{すなわち} \quad \left(\begin{aligned}c_1 &= 1-c_1^*+c_1^*c_2^*\\ c_2 &= \frac{c_1^*c_2^*}{1-c_1^*+c_1^*c_2^*}\end{aligned}\right.$$

ののち，時間変数の変換 $t\to -t$ を行うと c_1^*, c_2^* について(8)と同じ形の方程式が成立つ。次に変換

$$\left(\begin{aligned}a_1 &= c_1(1-c_2)\\ a_2 &= 1-c_1\end{aligned}\right. \quad \text{すなわち} \quad \left(\begin{aligned}c_1 &= 1-a_2\\ c_2 &= \frac{1-a_1-a_2}{1-a_2}\end{aligned}\right.$$

をおこなうと，a_1, a_2 のみたす方程式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{da_1}{dt} &= \beta_1(r-(2+r)a_2-ra_1)a_1\\ \frac{da_2}{dt} &= \beta_1(-r+(2+r)a_1+ra_2)a_2\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

となる。平衡点は $(a_1^0, a_2^0) = \left(\frac{r}{2(1+r)}, \frac{r}{2(1+r)}\right)$ で $0<r<\infty$のとき $a_1^0>0$, $a_2^0>0$, $a_1^0+a_2^0<1$ の領域中にある。次に変換

$$\left(\begin{aligned}x &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}(1-a_1-a_2)\right)^{\frac{1}{r}}\\ p &= \beta_1(a_2-a_1)\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}(1-a_1-a_2)\right)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}\right.$$

又は

$$\left(\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2}-\frac{\beta_2}{2\beta_1}x^r-\frac{p}{2\beta_1 x}\\ a_2 &= \frac{1}{2}-\frac{\beta_2}{2\beta_1}x^r+\frac{p}{2\beta_1 x}\end{aligned}\right.$$

をおこなうと，ハミルトニアンを

$$H=\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}x^2(\beta_1-\beta_2 x^r)^2 \tag{11}$$

としてx, pに関して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{12}$$

がなりたつ。運動方程式は$r=1$, 2のとき楕円函数を用いて求積できる。ここで前記のc_1, c_2, c_1^*, c_2^*をx, pであらわすと,

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta_2}{2\beta_1}x^r-\dfrac{p}{2\beta_1 x} \\[2ex] c_2=\dfrac{2\beta_2 x^{r+1}}{x(\beta_1+\beta_2 x^r)-p} \\[2ex] c_1^*=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta_2}{2\beta_1}x^r+\dfrac{p}{2\beta_1 x} \\[2ex] c_2^*=\dfrac{2\beta_2 x^{r+1}}{x(\beta_1+\beta_2 x^r)+p} \end{cases}$$

となる。

§ 3. 積分保存量について

(Type 1-a について)

方程式(2)は，変数変換

$$c_1=\frac{e^{w_1}}{1+e^{w_1}}, \quad c_2=\frac{e^{w_2}}{1+e^{w_2}}$$

したがって

$$\begin{cases} w_1=\log\dfrac{c_1}{1-c_1}=\log\dfrac{1-a_1}{a_1}=\log\dfrac{\alpha_1 x+p}{\alpha_1 x-p} \\[2ex] w_2=\log\dfrac{c_2}{1-c_2}=\log\dfrac{1-a_1-a_2}{a_2}=\log\dfrac{x^2(\alpha_1^2-2\alpha_2 x^r)-p^2}{2\alpha_2 x^{r+2}} \end{cases}$$

により，次の形となる。

$$\frac{dw_1}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial w_2} \;,\; \frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial G}{\partial w_1} \qquad \left(\therefore \; \frac{dG}{dt} = 0\right) \tag{13}$$

ここで積分保存量Gは,

$$\begin{aligned} G &= \alpha_1 \;[(2+r)w_1 - 2(2+r)\log(1+e^{w_1}) + rw_2 - (2+r)\log(1+e^{w_2})] \\ &= \alpha_1 \log c_1^{2+r} c_2^{r} (1-c_1)^{2+r} (1-c_2)^2 \\ &= \alpha_1 \log a_1^{2+r} a_2^{2} (1-a_1-a_2)^r \end{aligned} \tag{14}$$

(Type 1-b について)

方程式(4)は，変数変換

$$c_1^* = \frac{e^{w_2^*}}{1+e^{w_2^*}} \;,\; c_2^* = \frac{e^{w_1^*}}{1+e^{w_1^*}}$$

したがって

$$w_1^* = \log \frac{c_2^*}{1-c_2^*} = \log \frac{1-a_1-a_2}{a_1} = \log \frac{x^2(\alpha_1^2 - 2\alpha_2 x^r) - p^2}{(\alpha_1 x - p)^2}$$

$$w_2^* = \log \frac{c_1^*}{1-c_1^*} = \log \frac{1-a_2}{a_2} = \log \frac{x(\alpha_1^2 - \alpha_2 x^r) - \alpha_1 p}{\alpha_2 x^{r+1}}$$

により，次の形となる。

$$\frac{dw_1^*}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial w_2^*} \;,\; \frac{dw_2^*}{dt} = \frac{\partial G}{\partial w_1^*} \qquad \left(\therefore \frac{dG}{dt} = 0\right) \tag{15}$$

ここで積分保存量Gは

$$\begin{aligned} G &= \alpha_1 \left[rw_1^* - 2(1+r)\log(1+e^{w_1^*}) + 2(1+r) w_2^* - 2(2+r)\log(1+e^{w_2^*}) \right] \\ &= \alpha_1 \log c_1^{*2(1+r)} c_2^{*r} (1-c_1^*)^2 (1-c_2^*)^{2+r} \\ &= \alpha_1 \log a_1^{2+r} a_2^{2} (1-a_1-a_2)^r \end{aligned} \tag{16}$$

ここで前記の w_1，w_2，w_1^*，w_2^* の変換関係は

$$\left\{\begin{array}{l} w_1^* = w_1 + w_2 - \log(1+e^{w_2}) \\ w_1 = \log(1+e^{w_1^*}+e^{w_1^*+w_2^*}) - w_2^* \end{array}\right.$$

すなわち

$$\left\{\begin{array}{l} w_2^* = \log(1+e^{w_2}+e^{w_1+w_2}) - w_1 \\ w_2 = w_1^* + w_2^* - \log(1+e^{w_1^*}) \end{array}\right. \tag{17}$$

で与えられ，当然のことながら

$$\frac{\partial(w_1^*,\ w_2^*)}{\partial(w_1,\ w_2)} = 1$$

となる。

(Type 2 について)

方程式(7)は，変数変換

$$c_1 = \frac{e^{w_1}}{1+e^{w_1}} \quad , \quad c_2 = \frac{e^{w_2}}{1+e^{w_2}}$$

したがって

$$w_1 = \log\frac{c_1}{1-c_1} = \log\frac{1-a_2}{a_2} = \log\frac{x(\beta_1+\beta_2 x^r)-p}{x(\beta_1-\beta_2 x^r)+p}$$

$$w_2 = \log\frac{c_2}{1-c_2} = \log\frac{1-a_1-a_2}{a_1} = \log\frac{2\beta_2 x^{r+1}}{(\beta_1-\beta_2 x^r)-p}$$

により，次の形となる。

$$\frac{dw_1}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial w_2} \quad , \quad \frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial G}{\partial w_1} \qquad \left(\therefore \frac{dG}{dt} = 0\right) \tag{18}$$

ここで積分保存量Gは

$$\begin{aligned} G &= \beta_1\,[\,(2+r)w_1 - 2(1+r)\log(1+e^{w_1}) + 2w_2 - (2+r)\log(1+e^{w_2})\,] \\ &= \beta_1 \log c_1^{2+r} c_2^2 (1-c_1)^r (1-c_2)^r \\ &= \beta_1 \log a_1^r a_2^r (1-a_1-a_2)^2 \end{aligned} \tag{19}$$

ここで前記の変換によって定義した c_1^*, c_2^* から変数変換

$$c_1^* = \frac{e^{w_2^*}}{1+e^{w_2^*}} \quad , \quad c_2^* = \frac{e^{w_1^*}}{1+e^{w_1^*}}$$

によって w_1^*, w_2^* を新たに定義すると,

$$w_1^* = \log\frac{c_2^*}{1-c_2^*} = \log\frac{1-a_1-a_2}{a_2} = \log\frac{2\beta_2 x^{r+1}}{x(\beta_1-\beta_2 x^r)+p}$$

$$w_2^* = \log\frac{c_1^*}{1-c_1^*} = \log\frac{1-a_1}{a_1} = \log\frac{x(\beta_1+\beta_2 x^r)+p}{x(\beta_1-\beta_2 x^r)-p}$$

となり, 又 w_1, w_2 と w_1^*, w_2^* の変換関係は(17)と同じ式になるから,

$$\frac{\partial(w_1^*,\ w_2^*)}{\partial(w_1,\ w_2)} = 1$$

したがって w_1^*, w_2^* についても

$$\frac{dw_1^*}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial w_2^*} \quad , \quad \frac{dw_2^*}{dt} = \frac{\partial G}{\partial w_1^*}$$

が成り立つ。この時積分保存量 G は

$$\begin{aligned} G &= \beta_1 \left[(2+r)w_2^* - 2(1+r)\log(1+e^{w_2^*}) + 2w_1^* - (2+r)\log(1+e^{w_1^*}) \right] \\ &= \beta_1 \log c_1^{*(2+r)}(1-c_1^*)^r c_2^{*2}(1-c_2^*)^r \end{aligned}$$

となる。

§ 4. 積分保存量とハミルトニアンの関係

(Type 1-a, Type 1-b のとき)

(14)又は(16)に(5)を代入して計算すると

$$G = \alpha_1 \log\frac{\alpha_2^2}{2^{2+r}\alpha_1^{4+2r}}(-H)^r \tag{20}$$

すなわち

$$H = -2^{1+\frac{2}{r}}\ \alpha_1^{2+\frac{4}{r}}\ \alpha_2^{-\frac{2}{r}}\ e^{\frac{G}{\alpha_1 r}}$$

となる。

(Type 2　のとき)

(19)に(10)を代入して計算すると

$$G=\beta_1 \log \frac{\beta_2^2}{2^r \beta_1^{2(1+r)}} (-H)^r \tag{21}$$

すなわち

$$H=-2\beta_1^{2+\frac{2}{r}} \beta_2^{-\frac{2}{r}} e^{\frac{G}{\beta_1 r}}$$

となる。又，比較により面積要素変換のヤコビアンが求まり，

$$\frac{\partial(x,p)}{\partial(w_1,w_2)}=\frac{H}{\alpha_1 r} \quad \text{(Type } 1-a,\ 1-b \text{ のとき)}$$

$$=\frac{H}{\beta_1 r} \quad \text{(Type 2 のとき)}$$

と，運動に沿って一定であることがわかる。

参　考　文　献

1) J. D. Cowan, in Neural Networks (E. R. Caianiello, Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1968

2) J. D. Cowan, in Mathematical Problems in the Life Sciences, Vol. II (M. Gerstenhaber, Ed.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970