秩序相における複素オーダーパラメーターの長波長ゆらぎ

北大工　岡 本 幸 雄

§ 1. Introduction

超流動^{4}He及び磁性体XYモデル[*),1)]のような，2成分のオーダーパラメーターφを持つ系 ── 超流動^{4}Heでは，$\varphi=\Psi$，Ψはボーズ凝縮体の波動関数，XYモデルでは，$\varphi=M_x+\mathrm{i}M_y$，$M_{x(y)}$は$x(y)$方向の磁化 ── を考える。系のHamiltonianはφのuniform rotationのもとで不変である(isotropic system)。以下では，問題を鮮明にするために古典的XYモデルを考える。

3次元では高温側の常磁性相から低温側の強磁性相へと相転移を起こす。転移温度以下での帯磁率は，磁場h ── x方向を向く ── に垂直な方向の帯磁率（横帯磁率$\chi_\perp$）ばかりでなく，磁場に平行な方向の帯磁率（縦帯磁率$\chi_{/\!/}$）も，$h\to 0$で発散することが指摘されている[2)]。そして$\chi_{/\!/}$に関係している縦相関関数$C_{/\!/}(x)$（フーリエ変換した量は$C_{/\!/}(q)$）は，長波長で異常に振る舞う。即ち，

$$h\sim 0\text{で，}\quad \chi_{/\!/}(h)\propto h^{-1/2}\,, \tag{1}$$

$$h=0\text{で，}\quad C_{/\!/}(q)\propto q^{-1}\,。 \tag{2}$$

PatashinskiiとPokrovskki[3)]は，これらの異常性に対して現象論的な考察を行なった。そして微視的Hamiltonianの詳細にはよらず，isotropic systemに共通な性質であることを示した。但し，そこではfree energy functionalとcanonical free energyとを混同している（この点については§2 (4)式の下で述べられる）。我々はこの論文で，縦帯磁率と縦相関関数の異常性に対して，現象論的な説明を与えたい。上記の混同をしないように注意し，Re $\varphi=M_x$と振巾$|\varphi|$との違いを強調して。§4で縦時間相関関数[4)]について，同様の観点から議論する。

---

*) 磁性体ではオーダーパラメーターに共役な場（磁場）が存在するが，超流動^{4}Heでは現実には存在しない。従って実験的に観測できる量は異なってくる。我々はこの違いを，両者が相補的関係にあるものとして把える。

考え方は以下の如きである。(1)長波長では位相のゆらぎが極めて大きい。振巾のゆらぎは $q\to 0$ で Ornstein-Zernike 型であると仮定する。(2)従って basic variable として位相と振巾をとるのが良い。(3) Re φ のゆらぎは，振巾のゆらぎからの寄与と位相のゆらぎからの寄与とがある。位相からの寄与が異常性の原因である。

§ 2.　縦相関関数（ $h=0$ ）

複素オーダーパラメーター $\varphi=M_x+iM_y$ を持つ isotopic system を考える。長波長成分（ $q<q_c$, $q_c\sim\xi^{-1}$, ξ はオーダーパラメーターの相関距離）だけを含む free energy functional F_ξ は，gradient を含まない項と含む項とから成り，前者は振巾のみの関数であり，後者は gradient について最低次の項のみを含む。磁場 $h=0$ のとき，

$$F_\xi = \int d\boldsymbol{x}\left[f_\xi(\alpha^2)+2^{-1}c_\xi\,|\nabla\varphi|^2\right] \tag{3}$$

ここで $\varphi(\boldsymbol{x})\equiv\alpha(\boldsymbol{x})\,e^{i\phi(\boldsymbol{x})}$, ϕ は位相，α は振巾，index ξ は cut off の波数 $q_c\sim\xi^{-1}$ への依存性即ち温度依存性を示す。（但し，この論文では $C_{/\!/}(q)$, $\chi_{/\!/}(h)$ の波数依存性と磁場依存性にのみ関心を持っているので，温度依存性について具体的に考察しない。）長波長では位相のゆらぎが最も大きいことが(3)式より見れる。従って位相及びそれと統計的に独立な変数である振巾とを basic variables として選ぶ。そして F_ξ を，$\partial f_\xi/\partial\alpha=0$ から決まる $\alpha=\alpha_s$ のまわりで展開し，$\alpha'=\alpha-\alpha_s$ と ϕ について 2 次までとると，

$$F_\xi \simeq Vf_\xi(\alpha_s^2)+\sum_{|\boldsymbol{q}|<q_c}2^{-1}V\left\{(\chi_s^{-1}+c_\xi q^2)\,|\alpha_{\boldsymbol{q}}|^2\right.$$

$$\left.+\,c_\xi\,\alpha_s^2\,q^2\,|\phi_{\boldsymbol{q}}|^2\right\} \tag{4}$$

ここで V は系の体積であり，$\alpha'(\boldsymbol{x})$, $\phi(\boldsymbol{x})$ のフーリェ展開係数 $\alpha_{\boldsymbol{q}}$, $\phi_{\boldsymbol{q}}$ ── $\alpha'(\boldsymbol{x})=\sum_{|\boldsymbol{q}|<q_c}\alpha_{\boldsymbol{q}}\,e^{i\boldsymbol{qx}}$ など── を使った。今，長波長のゆらぎについては未だ Trace をとっていないのであるから，$f_\xi(\alpha^2)$ は canonical free energy と同じ性質を持っているわけでなく，むしろ我々は，$\chi_s^{-1}\equiv\partial^2 f_\xi/\partial\alpha^2(\alpha_s^2)$ は有限であることを仮定する。

F_ξ の表式(4)から，位相の相関関数 $F(r)$ が求められる。

$$<|\phi_{\boldsymbol{q}}|^2> \equiv \prod_{\boldsymbol{k}} \int d\phi_{\boldsymbol{k}} |\phi_{\boldsymbol{q}}|^2 \exp(-\beta F_\xi) / \prod_{\boldsymbol{k}} \int d\phi_{\boldsymbol{k}} \exp(-\beta F_\xi)$$
$$= (V \beta c_\xi \alpha_s^2 q^2)^{-1}$$

ここで $\beta = (k_B T)^{-1}$。 $r > \xi \equiv (4\pi\beta c_\xi \alpha_s^2)^{-1}$ のとき，

$$F(r) \equiv <\phi(\boldsymbol{x})\,\phi(0)> \approx \xi/r \,.\quad r \equiv |\boldsymbol{x}|\,。 \tag{5}$$

即ち長距離での位相の相関は power law r^{-1} となる。同様にして振巾の相関関数 $G(r)$ は

$$G(r) \equiv <\alpha'(\boldsymbol{x})\,\alpha'(0)> \approx (4\pi\beta c_\xi)^{-1} \exp(-r/\sqrt{c_\xi \chi_s})/r \tag{6}$$

即ちフーリェ変換した量は Ornstein-Zernike 型となる。

縦相関関数は， $M_x = 2^{-1}\alpha(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ であることと α' 及び ϕ はガウス分布であることから簡単に求められる。

$$C_{/\!/}(r) \equiv <M_x(\boldsymbol{x})\,M_x(0)> = \{\alpha_s^2 + <\alpha'(\boldsymbol{x})\,\alpha'(\boldsymbol{0})>\}\,e^{-<\phi(0)^2>} \times \cosh <\phi(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{0})>$$

ここで，強磁性相は φ の回転に対する対称性の破れた状態であり $<\phi(0)^2> \ll 2\pi$ が成り立っているはずであるから， $e^{-<\phi(0)^2>} \approx 1$ である。更に $r > \xi$ では $<\alpha'(\boldsymbol{x})\,\alpha'(\boldsymbol{0})>$ は無視できて，結局 $r > \xi$ のとき

$$C_{/\!/}(r) \approx 2^{-1}\alpha_s^2\ \{1 + (\xi/r)^2\}$$

上式をフーリェ変換すると

$$C_{/\!/}(q) \equiv <|M_{xq}|^2> \approx (V\,16\,\beta^2 c_\xi^2 \alpha_s^2)^{-1} q^{-1} \tag{7}$$

(2)式で述べられた縦相関関数の長波長における異常性が導かれた。この節での議論から明らかなように，この異常性は位相のゆらぎから来ている。但し，現象論の範囲では， $\chi_s^{-1} \neq 0$ は仮定されていることを注意しておきます。

§ 3. 縦帯磁率 ($h \neq 0$)

(a) 縦帯磁率

§ 2と同様に，長波長ゆらぎ ($q < q_c \sim \xi^{-1}$) だけを含む free energy functional F_ξ を考える。磁場 h は x 方向を向いているとして，

$$F_{\xi}=\int d\boldsymbol{x}\ [f_{\xi}(\alpha^2)-2^{-1}h(\varphi^*+\varphi)+2^{-1}c_{\xi}|\nabla\varphi|^2]$$

$\partial[f_{\xi}(\alpha^2)-2^{-1}h(\varphi^*+\varphi)]/\partial\varphi^*=0$ から決まる一様なφを φ_0 とすると，$2\varphi_0$ {$\partial f_{\xi}(\alpha^2)/\partial(\alpha^2)$} $=h$ であり φ_0 はhと同じ方向を向いている。F_{ξ} をφ_0 のまわりで展開し，$\alpha'\equiv\alpha-\alpha_0(\alpha_0\equiv\varphi_0)$ と ϕ について２次までとると，

$$\begin{aligned}F_{\xi}\approx V f_{\xi}(\alpha_0^2)+\sum_{|\boldsymbol{q}|<q_c}2^{-1}V\ \{&(\chi_0^{-1}+c_{\xi}q^2)|\alpha_{\boldsymbol{q}}|^2\\&+(\alpha_0^2\chi_{\perp}^{-1}+c_{\xi}\alpha_0^2q^2)|\phi_{\boldsymbol{q}}|^2\}\end{aligned}\tag{8}$$

ここで，$\chi_0^{-1}\equiv\partial^2 f_{\xi}(\alpha^2)/\partial\alpha^2(\alpha_0^2)$，$\alpha_0$ はhの関数であり，両方とも$h=0$でhに関して regularな量であることを仮定する。$\alpha_0^2\chi_{\perp}^{-1}=h\alpha_0$，$\chi_{\perp}$は横帯磁率である。

(8)式により，$<|\phi_{\boldsymbol{q}}|^2>=\{V\beta(h\alpha_0+c_{\xi}\alpha_0^2q^2)\}^{-1}$ であるから，位相の相関関数は，

$$F(r)\approx(4\pi\beta c_{\xi}\alpha_0^2)^{-1}\exp(-\kappa_{\perp}r)/r\tag{9}$$

ここで $\kappa_{\perp}^2\equiv h/c_{\xi}\alpha_0$・$h\to0$で(5)式に還元する。縦相関関数は§２と同様にして求められ，

$$C_{\parallel}(r)\approx2^{-1}\alpha_0^2\ \{1+(4\pi\beta c_{\xi}\alpha_0^2)^{-2}\exp(-2\kappa_{\perp}r)/r^2\}$$

上式をフーリエ変換すると

$$C_{\parallel}(q)\approx\{V8\pi(\beta c_{\xi}\alpha_0)^2\}^{-1}q^{-1}\tan^{-1}(q/2\kappa_{\perp})$$

従って縦帯磁率は

$$\chi_{\parallel}(h)\equiv T^{-1}V\lim_{q\to0}C_{\parallel}(q)\approx\{16\pi\beta(c_{\xi}\alpha_s)^{3/2}\}^{-1}h^{-\frac{1}{2}}\tag{10}$$

(1)式で述べられた縦帯磁率の$h\to0$での異常性が導かれた。この異常性は位相のゆらぎからきている。

(b) Canonical free energy

free energy functional の表式(8)から，canonical free energy $\widetilde{F}$ を得ることができる。

$$\begin{aligned}-\beta\widetilde{F}(T,h)\equiv\ln\mathrm{Tr}\exp(-\beta F_{\xi})=-V\beta f_{\xi}(\alpha_0^2)\\+\ln[(N_c!)^{-1}\prod_{|\boldsymbol{q}|<q_c}\int d\alpha_{\boldsymbol{q}}\int d\phi_{\boldsymbol{q}}\exp\{-2^{-1}\beta V(\chi_0^{-1}+c_{\xi}q^2)|\alpha_{\boldsymbol{q}}|^2\end{aligned}$$

$$-2^{-1}\beta V(h\alpha_0+c_\xi\alpha_0^2q^2)|\phi_{\boldsymbol{q}}|^2\}]$$

ここで，$N_c\sim N(q_c a)^3$，Nはスピンの数，aは lattice constant 。$\widetilde{F}$のhに関して singular な項$\widetilde{F}_s$は，$-2^{-1}\sum_{|\boldsymbol{q}|<q_c}\ln(q^2+h/c_\xi\alpha_0)$からのみでてきうる。$q_c\gg\sqrt{h/c_\xi\alpha_0}$とすると，

$$\widetilde{F}_s=-(V/\beta 12\pi)(h/c_\xi\alpha_0)^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

この，磁場に対する singular な依存性は free energy functional に含まれているf_ξからでてくるのではなく，位相のゆらぎからの寄与であることを注意したい。(11)式から縦帯磁率のhに関して singular な項は

$$\chi_{/\!/}=-V^{-1}\partial^2\widetilde{F}_s/\partial h^2=\{16\pi\beta(c_\xi\alpha_s)^{\frac{3}{2}}\}^{-1}h^{-\frac{1}{2}}$$

となり，再び(10)式を得る。

§ 4. 縦時間相関関数

§ 2と§ 3における staticな問題では，変数として複素オーダーパラメーターだけを考えてきた。 dynamics を調べるためには，z方向の有効磁場によるオーダーパラメーターの才差運動を考慮に入れることが重要となる。それでz方向の磁化も変数としてとり，長波長成分($q<q_c\sim\xi^{-1}$)だけを含む free energy functional を考え，$\alpha'=\alpha-\alpha_s$とϕとM_zについて2次までとる。

$$\Delta F_\xi=\int d\boldsymbol{x}\,[(2\chi_s)^{-1}\alpha'^2+2^{-1}c_\xi\{(\nabla\alpha')^2+\alpha_s^2(\nabla\phi)^2\}+(2\chi_m)^{-1}M_z^2] \tag{12}$$

α'，ϕ，M_zの長波長ゆらぎの運動に対する線形方程式は次の如く仮定される。[5), 6)]

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial t}=-\Gamma\frac{\delta(\beta\Delta F_\xi)}{\delta\alpha'}+\zeta \tag{13-a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\Gamma\frac{\delta(\beta\Delta F_\xi)}{\delta\phi}+g\frac{\delta(\beta\Delta F_\xi)}{\delta M_z}+\theta \tag{13-b}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t}=\lambda\nabla^2\frac{\delta(\beta\Delta F_\xi)}{\delta M_z}-g\frac{\delta(\beta\Delta F_\xi)}{\delta\phi}+\eta \tag{13-c}$$

ここで random force ζ，θ，ηは Gaussian white であり，

$$<\zeta(\boldsymbol{x}t)\zeta(\boldsymbol{x}'t')>=<\theta(\boldsymbol{x}t)\theta(\boldsymbol{x}'t')>=2\Gamma\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t'),$$

$$<\eta(\boldsymbol{x}t)\eta(\boldsymbol{x}'t')>=-2\lambda\nabla^2\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t')$$

$$<\zeta(\boldsymbol{x}t)\theta(\boldsymbol{x}'t')>=<\theta(\boldsymbol{x}t)\eta(\boldsymbol{x}'t')>=<\eta(\boldsymbol{x}t)\zeta(\boldsymbol{x}'t')>=0$$

上記第2種の揺動散逸定理により，確率的運動方程式(13)の平衡分布関数は(12)式によって与えられ，矛盾がない。

線形方程式(13)は容易に解ける。(13−b)と(13−c)とから，波数に比例する固有周波数と，波数の2乗に比例する減衰項とを持つスピン波が，長波長における normal m- ode であることが見れる。スピン波モードの線形結合によって位相ϕを表現し，長波長では減衰項が無視できることを注意して，

$$<\phi_{\boldsymbol{q}}(t)\phi_{-\boldsymbol{q}}(0)>\simeq(\beta c_\xi \alpha_s^2 q^2)^{-1}\cos\omega_f(q)\,t$$

ここで$\omega_f(q)\equiv\sqrt{\beta^2 g^2 c_\xi \alpha_s^2 \chi_m^{-1}}\cdot q\equiv vq$ はスピン波の固有周波数である。上式から位相の時間相関関数$F(r,t)$は

$$\begin{aligned}F(r,t)&\equiv<\phi(\boldsymbol{x}t,\phi(00)>=(2\pi)^{-3}\int^{q_c}d\boldsymbol{q}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{qx}}(\beta c_\xi \alpha_s^2 q^2)^{-1}\cos vqt\\&\simeq(2\pi^2\beta c_\xi\alpha_s^2)^{-1}\int_0^\infty dq(\sin qr/qr)\cos vqt\,\mathrm{e}^{-q/q_c}\\&=(4\pi^2\beta c_\xi\alpha_s^2)^{-1}r^{-1}\{\tan^{-1}q_c(r+vt)+\tan^{-1}q_c(r-vt)\}\end{aligned}\tag{14}$$

ここで積分領域は波数q_cでの sharp cut off なら smooth cut off に置き代えられた。§2と同様にして縦時間相関関数が求められて，

$$C_{/\!/}(r,t)\equiv<M_x(\boldsymbol{x}t)M_x(00)>\simeq\alpha_s^2\cosh F(r,t)\tag{15}$$

従って，$t\gg r/v$ では$C_{/\!/}(r,t)$はt^{-2}でゆっくり減衰する関数であることが導き出された。この異常性は位相のゆらぎからきている。

磁場$h\neq 0$の場合も同様にして取り扱うことができる。hについて最低次の項のみを考慮に入れる近似の範囲では，長波長でスピン波の減衰を無視することができるので，位相の時間相関関数は，

$$<\phi(\boldsymbol{x}t)\phi(00)>=(2\pi)^{-3}\int^{q_c}d\boldsymbol{q}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{qx}}\{\beta(h\alpha_0+c_\xi\alpha_0^2q^2)\}^{-1}\cos\omega_t(h,q)\,t$$

ここで$\omega_t(h,q)\equiv\sqrt{\beta^2g^2\chi_m^{-1}(h\alpha_0+c_\xi\alpha_0^2q^2)}$ 。位相は$t>\omega_t^{-1}(h,q=0)$では相関がない。

§ 5. Discussion

秩序相における複素オーダーパラメーターのゆらぎを現象論的に考察した。その目的は縦時間相関関数の長距離，長時間での振る舞い及び縦帯磁率の磁場依存性を，簡明な描像に基づいて調べることにあった。それらの異常性の原因は次の如きであった。即ち，$\mathrm{Re}\varphi = M_x$ のゆらぎね位相のゆらぎからの寄与を含み，それが $\mathrm{Re}\,\varphi$ のゆらぎの異常性の原因である。 Ginzburg-Landau-Wilson (G-L) Hamiltonian 及び time-dependent G-L 方程式を，くりこみ群の方法—— $\varepsilon \equiv 4-d$ 展開——を用いて調べた計算が存在する。[7),8)] これらの計算は，$\mathrm{Re}\,\varphi$ のゆらぎの異常性が位相のゆらぎから来ている点で，基本的には我々のものと同じであると思われる。

秩序相におけるゆらぎの考察には，振巾と位相を basic variables に選ぶ方が， real part と imaginary part を選ぶよりも，有利であると思われもする。しかし現象論的な取り扱いに対しては有効であるが，微視的計算に対してはいくつか不利な点をもつ。1つの例をあげよう。それは， real part と imaginary part から，振巾と位相への変換が非線形変換であるために生ずる。例えば，逐次 coarse graining を行なう手続きを考える。q_c までの波数を含むオーダーパラメーター $\varphi = \alpha e^{i\phi}$ を考え，次に q_c' までの短波長ゆらぎを消去した振巾 α' と位相 ϕ' を作る。これらを用いて作られる量 $\alpha' e^{i\phi'}$ は. real part と imaginary part の q_c' までの短波長ゆらぎを消去したオーダーパラメーターと異なってくる。$T \leq T_c$ での複素オーダーパラメーターのゆらぎの dynamics を扱うのに，くりこみ群の方法[9)] では， real part と imaginary part とを basic variables として使っている。これは coarse graining の手続きにあいまいさを生じない。しかし，縦相関関数の長波長，低振動数での振る舞いを正しく扱うことは大変複雑となるであろう。一方モード結合理論を適用した計算[10)]では，振巾と位相を使っていると称してその困難をさけている。しかし，そこで使った振巾演算子及び位相演算子は厳密には real 及び imaginary part であり，その点不備である。

最後に低次元系に少しふれたい。1次元及び2次元では，$T \neq 0$で通常の長距離秩序(自発磁化)は存在しない。けれども，低温領域ではオーダーパラメーターの振巾が発達しており，系のゆらぎは位相のゆらぎによって支配されている。[11)] 従って $\mathrm{Re}\,\varphi$ のゆらぎは主に位相のゆらぎで決まってくる。このような観点から，1次元及び2次元の低温領域における $\mathrm{Re}\,\varphi$ の時間相関関数の振る舞いを，この論文と同様の取り扱いで——但

し cut off の波数の意味が異なる——調べることができる。[12)]

§2と§3の多くは三宅和正氏との private communication（1976年）に依っております。

参考文献

1) 磁性体XYモデルと超流動 ^{4}He の同等性について.
T. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. **16** (1956) 569.
B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **188** (1969) 898.

2) K. Kawasaki and H. Mori, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 690.
V. G. Vaks, A. I. Larkin and S. A. Pikin, Soviet Phys.-JETP **26** (1968) 647.

3) A. Z. Patashinskii and V. L. Pokrovskii, Soviet Phys.-JETP **37** (1973) 733.

4) J. Villain, *Critical Phenomena in Alloys, Magnets and Superconductors*, ed. R. E. Mills et al. (McGraw-Hill, New York, 1971).

5) B. I. Halperin, P. C. Hohenberg and E. D. Siggia, Phys. Rev. **B13** (1976) 1299.

6) Y. Okwamoto, Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 2025.
K. Miyake and K. Yamada, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1689.

7) D. R. Nelson, Phys. Rev. **B13** (1976) 2222.

8) G. F. Mazenko, Phys. Rev. **B14** (1976) 3933.

9) P. C. Hohenberg, E. D. Siggia and B. I. Halperin, Phys. Rev. **B14** (1976) 2865.

10) Y. Okwamoto, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1351.

11) V. L. Berezinskii, Soviet Phys.-JETP **34** (1972) 610.
J. Villain, J. de Phys. **35** (1974) 27.

12) D. R. Nelson and D. S. Fisher, Phys. Rev. **B16** (1977) 4945.