Dynamics of Fluctuations near the Bénard Instability Point

東大・理　　松　葉　育　雄

2平板間に囲まれた流体を下から十分熱すると，ある温度差で roll 状態の convection が生じる。[1] この roll のできるまでの，過渡的な流体のゆらぎを議論する。一般に，不安定状態ではゆらぎが異常に大きくなるため，ゆらぎは非線形Fokker-Planck方程式により記述される。この方程式を解くために Suzuki の Scaling 理論[2]を用いる。

無次元化された流速$\vec{\boldsymbol{v}}$，圧力Pおよび温度Tは次の Boussinesq 近似した流体力学方程式で記述される。[3]

$$\partial_j v_j = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\partial_i P + \partial_j \partial_j v_i + \sqrt{R}\, T \delta_{i3} + \partial_j \delta_{ij} \tag{2}$$

$$P_r(\partial_t T + v_j \partial_j T) = \partial_j \partial_j T + \sqrt{R}\; v_3 - \partial_j q_j \tag{3}$$

ここですべての変数は熱伝導状態からのずれを示し，P_r，R はそれぞれ Prandtl 数，Rayleigh 数（無次元化した温度差）を示す。また random force S および q は平均値が 0 で white かつ Gaussian と仮定する。

今 $u \equiv (\boldsymbol{v}, T, P)^T$ を2つの部分に分ける。すなわち $u = \overline{u} + u'$，$\overline{u}$ はマクロな運動で次の方程式とマクロな初期条件（一般に存在し，熱的な noise よりも非常に大きい）と境界条件により定まる。

$$\partial_j \overline{v}_j = 0 \tag{4}$$

$$\partial_t \overline{v}_i + \overline{v}_j \partial_j \overline{v}_i = -\partial_i \overline{P} + \partial_j \partial_j \overline{v}_i + \sqrt{R}\;\; \overline{T} \delta_{i3} \tag{5}$$

$$P_r(\partial_t \overline{T} + \overline{v}_j \partial_j \overline{T}) = \partial_j \partial_j \overline{T} + \sqrt{R}\;\; \overline{v}_3 \tag{6}$$

$$\overline{v}_3 = \overline{T} = 0, \quad \partial_3 \overline{v}_1 = \partial_3 \overline{v}_2 = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = 0,\ 1 \quad (\text{自由境界})$$

したがってゆらぎu'は次の方程式により記述される。

$$\partial_j v'_j = 0 \tag{7}$$

$$\partial_t v'_i + \overline{v}_j \partial_j v'_i + v'_j \partial_j \overline{v}_i + v'_j \partial_j v'_i = -\partial_i P' + \partial_j \partial_j v'_i + \sqrt{R}\, T' \delta_3 + \partial_j S_{ij} \tag{8}$$

$$P_r(\partial_t T' + \overline{v}_j \partial_j T' + v'_j \partial_j \overline{T} + v'_j \partial_j T') = \partial_j \partial_j T' + \sqrt{R}\; v'_3 - \partial_j q_j \tag{9}$$

今$R \gtrsim R_c$（臨界 Rayleigh 数）で，roll 状態のみを考えると$\overline{u}$は次のようになる。[3]

$$\overline{u} = \eta W(T) e^{ik_i x_1} [i\sqrt{2}\cos \pi x_3,\ 0,\ \sin \pi x_3,\ \sqrt{3}\sin \pi x_3, -3\pi \cos \pi x_3]^T + \mathrm{c.c.} \tag{10}$$

ここで$\eta \equiv (\frac{R}{R_c} - 1)^{\frac{1}{2}}$，$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$，$T = \eta^2 t$で$W(T)$は roll の amplitude である。

$W(T)$に対する方程式は reductive pertubation により容易に導くことが出来る。[4]

$$(1+P_r)\frac{dW(T)}{dW} = \frac{3}{2}\pi^2 W(T) - \frac{1}{2}P_r^2 |W(T)|^2 W(T) \tag{11}$$

この方程式の解は，もし初期条件が正であれば，$\sqrt{3}\pi / P_r$に近づく。

次に amplitude のゆらぎに対するFokker-Planck方程式は Scaling 理論に従い次の３つの stage に分かれる。

1) initial region

$$(1+P_r)\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial Z}\{(-\frac{3}{2}\pi^2 + \frac{3}{2}P_r^2 W^2(T))ZP\} + \frac{1}{2}\varepsilon(1+P_r)\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} \tag{12}$$

2) second region

$$(1+P_r)\frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Z}\{C(Z,T)P\} = 0$$

$$C(Z,T) = (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{3}{2}P_r^2 W^2(T))Z - \frac{3}{2}P_r^2 W(T)Z^2 - \frac{1}{2}P_r^2 Z^3 \tag{13}$$

3) final region

$$(1+P_r)\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial Z}\{(-\frac{3}{2}\pi^2 + \frac{3}{2}P_r^2 W^2(T))ZP\} + \frac{1}{2}\varepsilon(1+P_r)\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} \tag{14}$$

ここでεはηでscaleされた拡散係数である。(11) ～ (13) 式より，Fig. 1 には分布関数，Fig. 2 には分散の時間発展を描いてある。

Fig. 1で a は初期分布を示し，簡単のため Gauss 分布としてある。ある時刻たつと分布は平らになり，やがて２つのpeakが現われる。この２つのpeakは互いに反対に回転する roll を表わす。Fig. 2 では異った ϵ の値に対する分布の時間発展を示してある。容易にわかるように，２つの形が同じであることからある非線形変換された時間を用いることによりこの２つの曲線が同一になる。これは Scaling 理論の基本的な内容である。またこの問題は fluctuation-enhancement theorem の興味ある例を与える。

参考文献

1) S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"
2) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56**, 77 (1976), **56**, 477 (1976), **57**, 380 (1977)
3) R. Graham, Phys. Rev. **A10**, 1762 (1974)
4) A. Newell and J. Whitehead, J. Fluid **38**, 279 (1969)

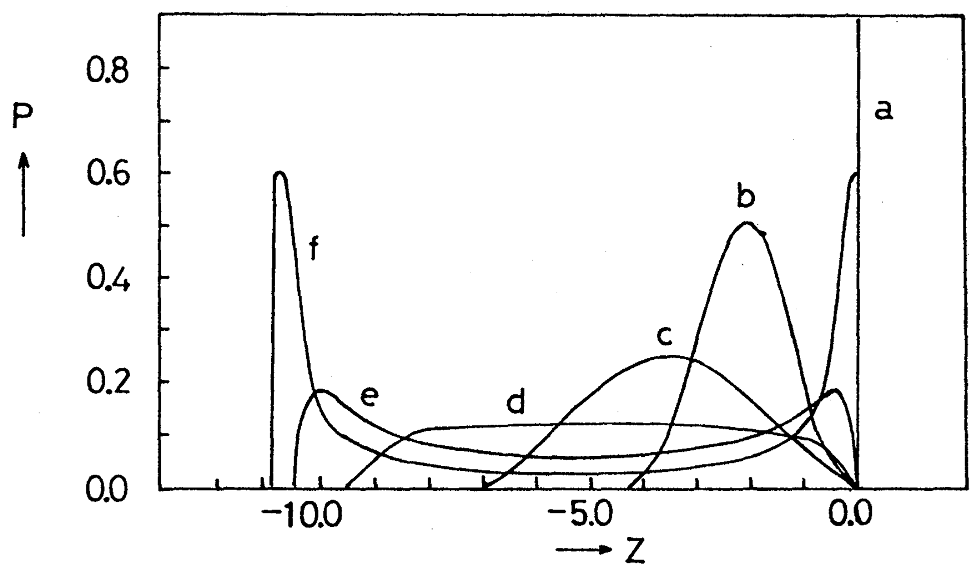

Fig. 1. Time evolution of the distribution function ; (a) T=0, (b) T=0.2, (c) T=0.3, (d) T=0.4, (e) T=0.5, (f) T=0.6 ; $\epsilon=10^{-3}$

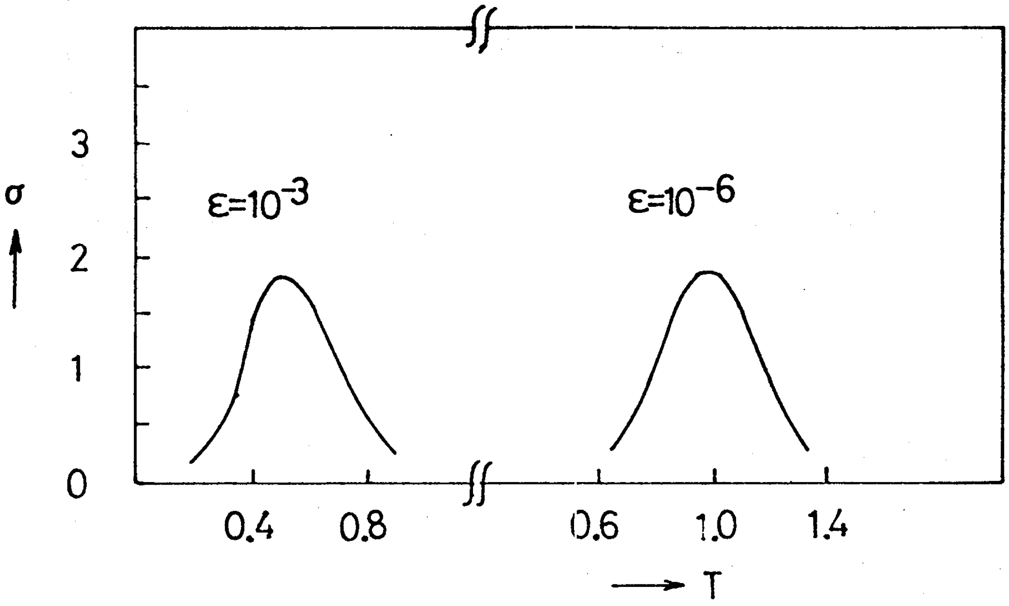

Fig. 2. Time evolution of the variance

Scaling Theory of Laser Radiation in the Transient Unstable Region

東大・理　有　光　敏　彦
鈴　木　増　雄

前回の「非線型…」の研究会[1]で，レーザー系[2]へのスケーリング理論[3]の応用を話したが，今回は，さらに Arecchi と Degiogio の実験結果[4]との比較も含めて，まとめという形で報告する。また，実験結果との比較を通して，スケーリング理論の有効性を，物理系で，はじめて証明したという意味で，今後のスケーリング理論の発展の上にも，大きな足跡となると思われるので，今回，まとめて報告することにしたのである。

ポンピングをしないレーザー系では，熱的なゆらぎによる光子が存在する。臨界ポンピング強度より十分弱いポンピングでは，その数は，ゼロと考えてよい。時刻 $t = 0$ で，急に，臨界ポンピング強度より十分強いポンピングをレーザー系に加えた場合に，定常発振状態に系がおちつくまでの，過渡的な時間発展を議論する。半古典的レーザーモデ