

H. Ikeda (Univ. of Tokyo)

Critical Relaxation for Nonlinear Response

A. Morita (Akita Univ.)

An exact treatment of Nonlinear Dielectric Relaxation

## ローレンツアトラクター上の定常統計分布

北大・理 島 田 一 平

Lorenzによって導入された大気の対流運動を記述する簡単な常微分方程式には、熱平衡からのへだたりをあらわすパラメータがある臨界値をこえると、不規則に時間依存する解があらわれる。この解は非平衡系にあらわれる巨視的段階での統計的運動、いわゆる乱流現象の理解に本質的手がかりをあたえるものとして、多くの議論をよんできた。

乱流現象の理解にとって、それがどのような定常統計分布によって記述されるかという問題は基本的であり、ローレンツモデルについて同様の問題を考察することも一般的问题への第一歩として無駄なことではなかろう。また統計分布について得られた知識はローレンツモデルにおける時間相関函数のふるまいについての情報を与えてくれる。

ローレンツモデルは散逸的力学系であり、定常統計分布はほとんどすべての解がそこに漸近して行く不変集合；アトラクターの上に重みを持つものとして考えなければならない。相空間の中でのアトラクターの複雑な幾何学的構造はこの問題を考える上で最大の困難である。そこで、このアトラクターを平衡統計力学でよく知られた、1次元イジングスピン系の配位空間上に表現することを考える。このアイディアは Sinai によって、アノソフ力学系のエルゴード理論の建設に用いられたものである。

ローレンツアトラクターのスピン系への表現は、アトラクター上の不規則運動のもつ以下のような特徴を利用してなされる。アトラクターに引きこまれた位相点は二つの不安定定常状態  $C_+$  ,  $C_-$  のどちらか一方のまわりを何回かゆらぎながら運動し、ときどきもう一方の定常状態の近くにとびうつっては同様の運動をつづける。二つの定常状態間をとびうつる運動はまったく非周期的である。そこで、定常状態  $C_+$  のまわりを1回

ゆらぐたびに上向きスピンを，他方の定常状態  $C_{-}$  のまわりをゆらぐときには下向きスピンを対応させることにより，あるかつてな初期状態  $X_0$  からはじまる相空間の軌道に対して，1次元イジング系のスピン配位が1つ対応づけられる。

このような相空間の初期点  $X_0$  とイジング系のスピン配位との対応において，1つのサイトのスピンを決定することは相空間をたった二つの状態に分割するという極度に粗視化された観測を意味する。しかしまた，ひきつづく十分多くの数のサイトのスピン状態をあわせて決定することにより，相空間の初期点は十分な精度で決定されてしまうという性質も持っている。さらに，もとの相空間での時間発展はスピン系の空間的なずらしで表わされる。相空間の初期点  $X_0$  がどちらかの定常状態のまわりを1回ゆらいだのち  $P(X_0)$  にきたとすると， $P(X_0)$  に対応するスピン配位は  $X_0$  に対応するスピン配位を1つだけ空間的にずらしたものになる。したがって，アトラクター上の定常分布はスピン系の空間的なずらしに対して不変な分布に帰着されて研究される。スピン系の空間的なずらしに対して不変な分布の十分豊富な例を平衡統計力学の中にみいだすことができる。それは一様な磁場中でのギブス分布であって，その際各サイトのスピン間にもどのような相互作用が働いているかが問題となる。

ローレンツ方程式を数値積分して得た軌道データから，ひとつづきの有限個のサイトにあらわれるスピン配位の頻度を経験的に求めることができる。スピン配位を一つの実数； $DYD \equiv \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} \sigma_i$ ， $\sigma_i$ ； $i$  番目めのサイトのスピンの上向きか下向きかで1または0の値をとる。 $0 \leq DYD < 1$ 。

であらわすと，経験分布をあらわすグラフにはスピン系の空間的なずらしに対する不変性をあらわす特徴的なくりかえし構造がみとめられる。また各サイトのスピンは独立ではなく，一定のフェロマグネチックな相互作用エネルギーを持っており，その大きさは，サイト間の距離のほぼ指数関数として減少して行くことがわかる。もちろん，これらの相互作用をパラメータとして作ったギブス分布は経験分布を十分な精度で再現する。

さらに，このようにして得た経験分布からスピン1個あたりのエントロピーを計算することができる。これはスピン系の空間的なずらしに対応するローレンツ系の時間発展についてのコルモゴロフエントロピーに相当する。その値はスピン間に相関があるため，無相関の時の値  $\log 2$  より少し小さな値となる。また，対応する相空間の軌道の指數的拡大率は，こうしてもとめたエントロピーに非常に近く，そしてそれより小さくない値を

とる。

以上のことから、ローレンツアトラクターの不規則運動は、相互作用に一定の特性距離を持ったイジング系のギブス分布で記述され、したがってその時間相関函数には一定の特性時間が存在すると結論できる。ローレンツ系に臨界状態が存在するか？という問題はこのような方法で調べることのできる興味深い問題である。

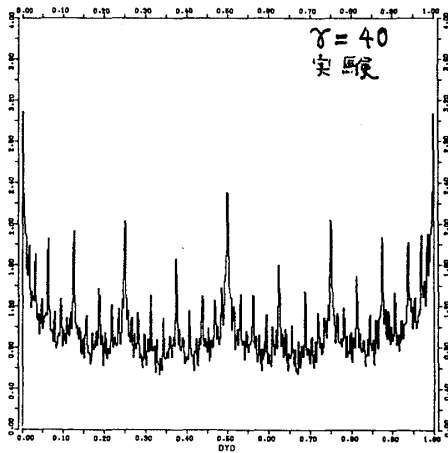


図 1

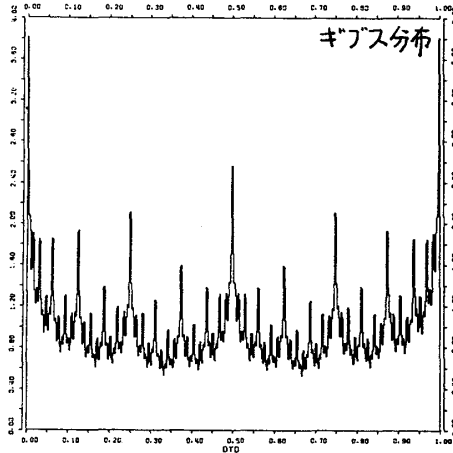


図 2

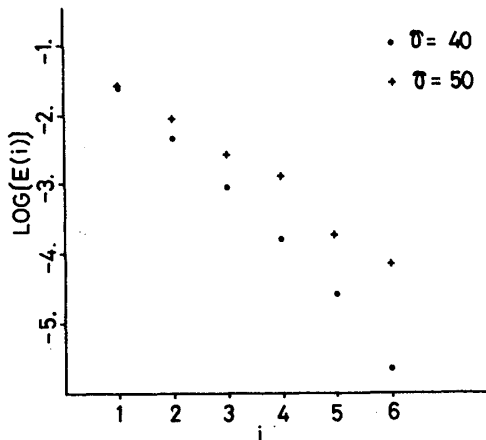


図 3

Lyapleight,	entropy per spin	Lyapou. c. n. per p. map
40	0.687	0.688
50	0.683	0.684

表 1