

---

 特別講義
 

---

## ハミルトン力学系の乱雑挙動

早大理工 齋藤信彦 教授

本講義録は、6月29日から7月1日にわたって京都大学物理学教室において行なわれた講義をもとに木立英行氏が作成し、さらに齋藤先生が目を通されたものです。  
(編集部)

## § 0 序

## 講義の計画

1. パイの変換
2. 誘導現象
3. KAM理論
4. 撞球問題(於 京大物理教室談話会)

講義の目的は、本来決定論的かつ可逆的な力学系が、なぜ、統計的に取扱われねばならぬような乱雑な挙動を示すか、ということ論ずるところにある。その為には、次の問題がもっとも簡単に適切な例題となる。

## § 1. パイの変換 (Baker's transformation)

パイの変換( $T$ )とは Fig. 1 のように正方形を横を2倍に伸ばし縦を $1/2$ に縮め、中央を縦に切って右側を左側の上へのせる変換である。面積は変らないから保測的である。これを式であらわせば、

$$\begin{aligned}
 T(x_0, y_0) &= \left( 2x_0, \frac{1}{2}y_0 \right) & 0 \leq x_0 < \frac{1}{2} \\
 &= \left( 2x_0 - 1, \frac{1}{2}(y_0 + 1) \right), & \frac{1}{2} \leq x_0 < 1
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

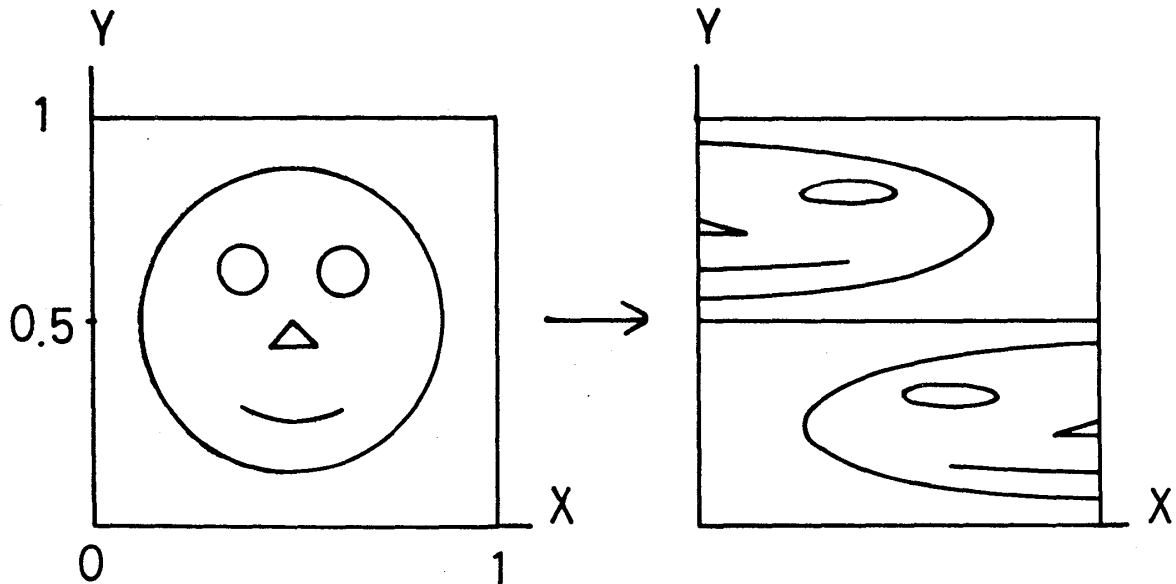


Fig. 1

ねり粉からパイ皮を作る様に類似していることから、この名前がある。この変換は可微分性を持たない点で、ハミルトン系と異なる。この変換によって点がどのように振舞うか調べることにする。二次元空間 ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ) 上の分布関数  $f_n(x, y)$  を考えよう。

この中の点は前述の変換に従って動くから、それに伴って点の分布は次の様に変化してゆく。初期分布  $f_0(x, y)$  から、 $n$  回の変換によって生じた分布を  $f_n(x, y)$  とすると、(1.1) の関係から

$$\begin{aligned}
 f_n(x, y) &= f_{n-1}\left(\frac{x}{2}, 2y\right), \quad 0 \leq y < \frac{1}{2} \\
 &= f_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}, 2y-1\right), \quad \frac{1}{2} \leq y < 1
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

変換  $T$  の逆変換は Fig. 1 と逆に、 $y$  方向には 2 倍に伸ばし、 $x$  方向は  $1/2$  にちぢめ、 $y \geq \frac{1}{2}$  の部分を右下の  $1/2 \leq x < 1$  の位置にもどせばよい。 $f_n$  の変化も点の変換同様可逆であり、決定論的 (deterministic) である。情報量を減少し変換  $T$  の性質を見易くするために  $y$  について両辺を積分する。

$$\begin{aligned}
 W_n(x) &\equiv \int_0^1 f_n(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{1/2} f_{n-1}\left(\frac{x}{2}, 2y\right) dx dy \\
 &\quad + \int_{1/2}^1 f_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}, 2y-1\right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[ W_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) + W_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$f_{n-1}$  が与えられると  $f_n$  が定まり、逆も可能であるが、 $W_n$  については  $W_{n-1}$  から  $W_n$  は求められるが、逆は可能でない。また (1.3) 式は確率的な解釈を許す。この事実、力学変数の一部を消去すると、残余の変数に対する方程式が不可逆、確率的になることの一例となっている。

$W_n(x)$  のこの変換は下図の様なものである。

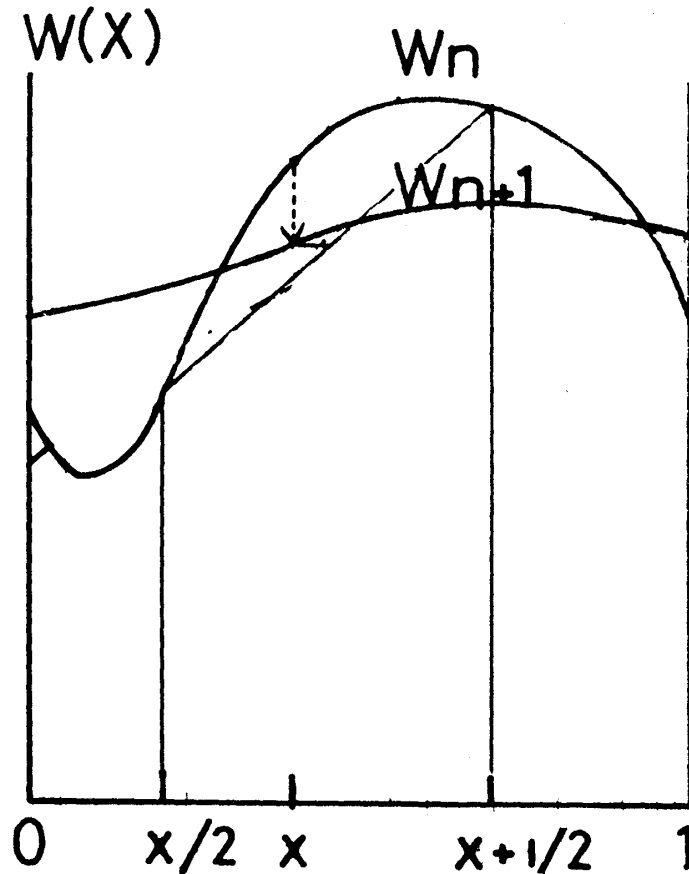


Fig. 2

斎藤信彦

これから  $W_n(x)$  の分布は、平均化する方向、即ち  $n \rightarrow \infty$  で、 $W_n(x) \rightarrow$  定数となることが推測できる。実際に  $W_\infty(x) = 1$  はこの方程式の規格化された解である。ここで、これと似た形の方程式が拡散方程式となることに留意するとよい。

$$W_n(x) = \frac{1}{2} [W_{n-1}(x+\Delta) + W_{n-1}(x-\Delta)]$$

$$\stackrel{\Delta \rightarrow 0}{\simeq} W_{n-1}(x) + \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_{n-1}$$

もう少し詳しく解析してみよう。

$0 \leq x \leq 1$  で定義される  $W_n(x)$  を周期が 1 の周期関数とみなし、次の様にフーリエ展開する。

$$W_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_n(k) e^{-2\pi i k x} \tag{1.4}$$

$$\bar{W}_n(k) = \int_0^1 W_n(x) e^{2\pi i k x} dx$$

この展開式を方程式 (1.3) に代入し若干の計算によって容易に次の関係式が得られる。

$$\bar{W}_n(k) = \bar{W}_{n-1}(2k) = \dots = \bar{W}_0(2^n k) \tag{1.5}$$

即ち、方程式 (1.3) の解は次のとおりである。

$$W_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_n(k) e^{-2\pi i k x} = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_0(2^n k) e^{-2\pi i k x} \tag{1.6}$$

ここで初期分布として十分性質のよいものを用意することによって

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\bar{W}(k)|^2 = \int_0^1 W_0^2(x) dx < \infty \tag{1.7}$$

を仮定することにする。つまり、十分大きい  $|k|$  に対しては  $\bar{W}_0(|k|) = 0$  と考えてよい。

(初期分布に  $\delta$  関数を含むときはこうはならない。

$$\delta(x-a) \pmod{1} = \sum_k e^{-2\pi i k a} e^{-2\pi i k x}$$

となるからである)

従って(1.4)より  $n \rightarrow \infty$  の時  $|k| = 0$  以外の成分はすべて0となり、予想どおり分布は一様な分布に漸近することが判る。このことから、パイの変換  $T$  によって移される正方形の中の点の運動の彷徨性の程度をうかがい知ることができる。

パイの変換と同型なベルヌイ変換について言及することにして、この章を終えることにする。先の点  $(x_0, y_0)$  ( $x_0, y_0$  はそれぞれ  $0 \leq x_0, y_0 \leq 1$  の2進有理数以外の点) に対して、次の両側に無限に続く数列を対応させる。即ち

$$\begin{aligned}
 & a_i, b_i = 0 \text{ か } 1 \text{ として} \\
 x_0 &= 0 . a_1 a_2 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n \\
 y_0 &= 0 . b_1 b_2 b_3 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \tag{18}
 \end{aligned}$$

から

$$\cdots b_3 b_2 b_1 . a_1 a_2 a_3 \cdots$$

への対応は、可算個でそれ故測度0の集合を除いて同型対応である。パイの変換  $T$  はこの対応によってベルヌイ変換  $(B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$  に変換される。なぜならば

$$\begin{aligned}
 T(x_0, y_0) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n, \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} b_m\right) \\
 &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(n-1)} a_n, \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-m} b_m + \frac{a_1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

から

$$T(\cdots b_3 b_2 b_1 . a_1 a_2 a_3 \cdots) = \cdots b_3 b_2 b_1 a_1 . a_2 a_3 \cdots$$

が導びかれるからである。ベルヌイ変換は  $\{0, 1\}$  2元からなる集合の無限個の直積空間の元

$$(\cdots b_3 b_2 b_1 . a_1 a_2 a_3 \cdots)$$

をその小数点を一つ左にづらした元に対応させる変換だからである。ベルヌイ変換はエルゴード的な抽象力学系であって今までに、深い研究がなされている。

以上、実際のハミルトン系を学ぶ前にいささか抽象的な力学系について説明したのは、このパイの変換が、微分不可能な集合（測度0）を持ってはいるが、保測性を有するという点では前者の抽象化と考えられ、さらには統計力学の観点から見て興味深い、エルゴード的な力学系の一つのひな型とみなせるからである。

決定的、可逆的な力学系が、射影（又は平均操作など）によって変数を減少させたとき、確率的、不可逆的な力学系に変わることは重要である。エルゴード性は力学量の長時間平均と、相空間での平均の等しいことをいうが、ここにも平均が登場し、その結果統計力学が成立するのである。

次の章では、もっと具体的な系について論ずる。

## § 2. 非線型格子の誘導現象

固体の比熱理論等では、格子振動の調和近似によって理論がたてられているが、暗黙のうちに系は小さな非線型項の存在によってエネルギーが各モードに分配されて熱平衡状態に到達していることを仮定する。しかし純力学的な問題として考えると、事態はさほど簡単なことではない。というのは、有名な Fermi-Pasta-Ulam の数値実験が示している様に、十分なエネルギー分配がおこらないどころか再帰現象まで起るからである。この章では、非線型格子のエネルギーの分配について論ずる。

Fermi-Pasta-Ulam (F.P.U) はよく知られているように、開発されたばかりの高速電子計算機 (Maniac I) で次の非線型振動子系の数値実験を行なった。彼らは、ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} p_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)^2 + \frac{\lambda}{3} \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)^3 \quad (2.1)$$

の系について、最低振動数のモードにエネルギーを与えた場合、各モードのエネルギーの時間変化を調べたのである。モードのエネルギーは、 $\lambda$ の項を摂動項とみたときの非摂動ハミルトニアンについて定義してある。

この結果から、各モードへ十分なエネルギーがゆきわたらず、かつ最低振動数のモードの周期で158周目に系はほとんど初期の状態に戻ることが判る。この性質は「計算時間の不足による見せかけのものである。」という説明も考えられたがその後の計算でもF.P.Uの結果を裏づけるものが得られている。Tuckの計算によれば $16 \times 158$ 周期

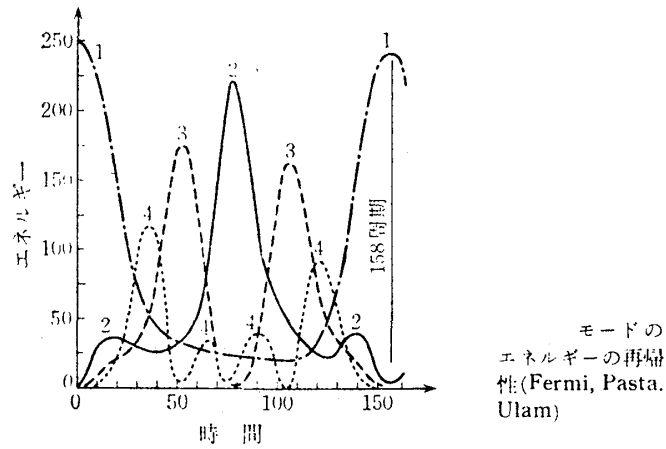


Fig. 3

の大きな再帰現象も発見されている。

この初期の計算機実験の結果は、それ以前の素朴な、エネルギーの分配、熱平衡の容易な達成、の予想を裏切るものであったが、この結果は Fermi の死後初めて発表された。ところでその後この仕事から二つの方向へ研究が発展していった。一つは、なぜこの系が周期的に振舞うのかを追求する方に、他の一つは、エネルギー分配が起るためには、どのような条件が満たされねばならぬかを究める方向へ進んだのである。前の方向の研究は、F.P.U 系からある近似のもとで KdV 方程式が得られることが判り、この方程式のもっているソリトン解はソリトン研究の端緒となったが、その後、厳密解としてソリトン解を持つ非線型格子(戸田格子)が提出されるなどこの方面の研究は大いに進んだことは周知の事と思う。

一方、後者の方向は正に本講義の目的とする所に一致するもので、やや詳しく論ずることとする。

一部のモードに与えられたエネルギーが、速やかに各モードに流れこむための条件は各モードの振動数が共鳴条件を満たすことである。ところが F.P.U 系の各モードの振動数は

$$\omega_k = 2 \sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

斎藤信彦

であり、低振動数モード間では

$$\omega_k \approx \frac{\pi k}{N}$$

となるから、共鳴条件が満たされやすいが、低振動数モードと高振動数モードの間では一般に満たされにくいと言える。このために F.P.U 系では低振動数モードに与えられたエネルギーは、十分高振動数側に分配されなかったと言ってもよいだろう。そこで、共鳴条件を満たしやすい系、または状況を考えてやればエネルギー分配は容易に達成されると考えられる。たとえば、二次元の非線型格子では二つのモードの振動数が殆んどひとしいことがありうるし、また一次元の格子でも二つの隣接した高いモードの振動数は近似的にほぼ等しく、共鳴条件が満たされる。

そこで次のハミルトニアンで記述される系を考える。

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} (x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{\lambda}{4} (x_{i-1} - x_i)^2 \right] \quad (22)$$

この系は四次ポテンシャルのせいで、大振幅の場合でも系は安定となるのは長所であるが、対称性が良くなってモード間のエネルギーの流れのうち禁制されるものがでてきてしまうので、ここでは次の様に定義した奇数番目のモードのみを閉じた系と考えることにする。まず次の様に基準座標を定義する。

$$x_j = i \sum_{k=-N}^N \left( \frac{a_k}{\omega_k} \right) \exp \left( -\frac{i \pi j k}{N} \right) \quad (23)$$

$$\omega_k = 2 \sin \left( \frac{\pi k}{2N} \right) \quad a_0 = 0, \quad a_k = a_{-k} \quad (24)$$

この変換によって  $\{a_k\}$  に対する方程式は

$$\ddot{a}_k = -\omega_k^2 a_k - \lambda \omega_k^2 \sum_{\substack{k', k'', k''' \\ \pm N}}^N a_{k'} a_{k''} a_{k'''} D(k+k'+k''+k''') \quad (25)$$

$$D(0) = D(\pm 4N) = -D(\pm 2N) = 1 \quad (26)$$

$$D(\text{otherwise}) = 0$$

と書くことができる。(25)式の右辺第二項はモード間の相互作用をもたらす、また、 $D(k)$ はその相互作用の選択律を支配する。たとえば、 $N=16$ の時、初期条件を次の様



にとるとすれば

$$a_{k_0} \neq 0 \quad a_k = 0 \quad \text{for} \quad k \neq k_0$$

$k_0$  によって直接励起されうるモードは,

$$k + (\pm k_0) + (\pm k_0) = 0, 2N, 4N$$

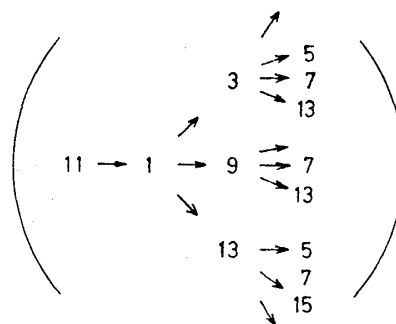
をみたす  $k$  となる。例えば,  $k_0 = 11$ , と

するとこの  $k$  は  $1(-1)$  のみである。次に

$k = 1$  と  $k_0 = 11$  で励起されるモードは

$$-9 + 11 + (-1) + (-1) = 0$$

となり  $-9(9)$  が励起される。この様にカスケード的に励起されてゆくが, その順序は次の図のとうりである。



Pathway of energy flow for  $N=16, k_0=11$ .

Fig. 4

特別の例としては  $k_0 = 8$  とすると, このエネルギーは他には行きわたらない。さらに同様の考察によって, 偶数番目のモードのエネルギーは, 偶然番目のモードのみ

に流れてゆく。ここでは前述のように  $k_0 = 11$  の場合を調べてみよう。まず始めに, 各モードのエネルギーの時間的変化を見てみよう。次図はその一例である。

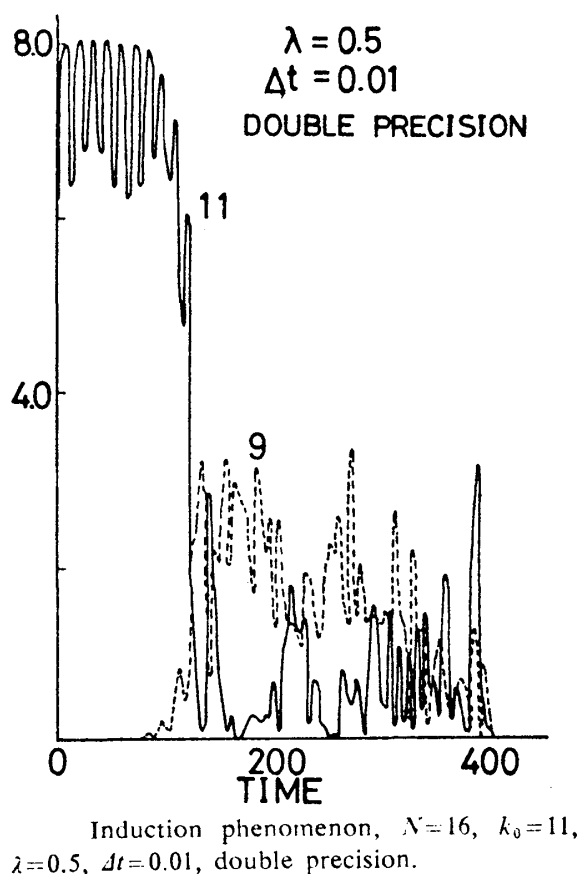
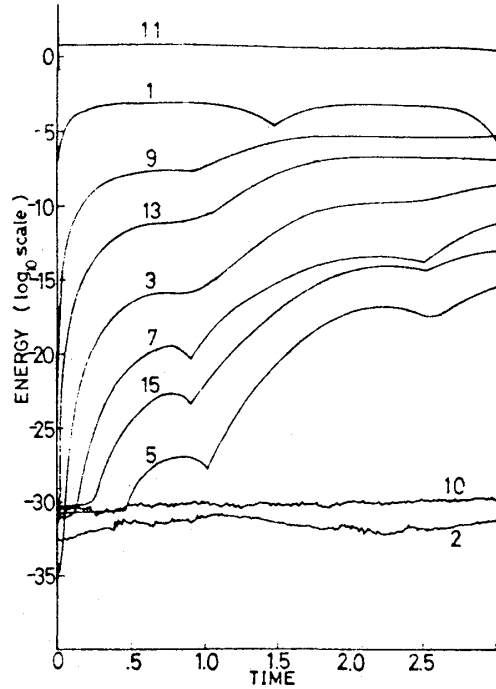


Fig. 5

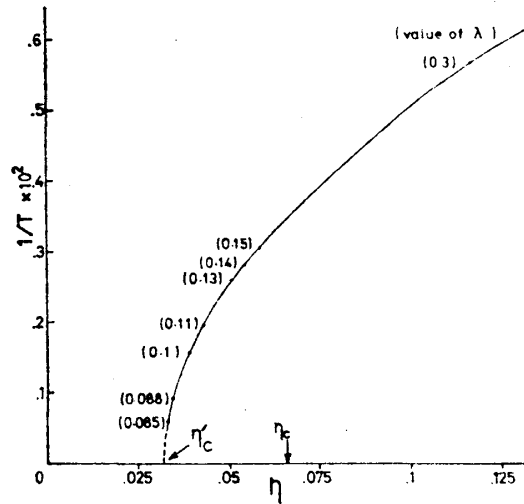
この図から 11 番目のモードのエネルギーはある時間経過すると、急激に減少し、その頃から他のモードのエネルギーが増えはじめていることがわかる。11 番目のモードをみている限り、途中まで進行したとき、更に実験をつづけたときに、同じことがくり返されると考えられ、上述のようなドラマチックな変化がおりうとは思われない。事実、場合によってはいくらつづけても(?)同じことがくり返されるような場合もある。これを区別するのは、11 番目以外のモードのエネルギーをみることである。Fig. 6 からわかるように 11 番目のモードのエネルギーの挙動は殆んどかわらないにも拘らず、ほかのモード、特に 1, 9, 13 などが次第に増えているのである。そして急激な変化をおこす準備をしている。恰もはげしい化学反応をおこす前のしばしの静寂に似ている(線香花火をみよ)。そこでこれを誘導現象と名付け、それに要する時間を誘導期間と呼ぶ。



Initial behavior of excitation of the normal modes  $N=16, k_0=11, \lambda=0.5$ .

Fig. 6

この誘導期間  $T(\lambda, a)$  は非線型結合の強さを表わす  $\lambda$  と、  $k_0$  モードの初期の (11 番目のモードの振幅  $a$ ) に依る。今  $a$  を固定して  $\lambda$  のみの関数とみた時の結果を次に示す。縦軸は  $T^{-1}(\lambda)$  横軸は  $\eta = \lambda a^2$  である。



$1/T$  vs  $\eta$ . Fig. 7

$T^{-1} \sim 0$  の所までは実際に求めることは不可能であるが、外挿すると  $\lambda_c > 0$  が存在するように見える。即ち、 $\lambda_c > \lambda$  の結合定数のときには、エネルギーは他のモードにはほとんど行きわたらず、系は周期的に振舞うのである。この現象が見いだされた時、これは計算機にはつきものの誤差の集積によるものではないかという批判が出た。それは、実は、理論的にはこの場合には決してエネルギーがゆきわたらないはずの偶数番目のモードも、長時間計算を行なうとエネルギーを持ってしまふことがあるからである。これはまさに誤差のなせるわざである。そこで、誤差の検討をここで簡単にしておくことも有益なことであろうと思う。

微分方程式を計算機で解く時に生ずる誤差は二種類ある。i) 微分を差分で置換えることによって生ずる誤差 (truncation error) ii) ある桁以下を常に打切ることによって生ずる誤差 (round off error) である。ii) については倍精度・四倍精度法を採用することによって、誤差を小さくすることができるから、i) の方が重大なものとなる。我々の採用した Runge-Kutta-Gill の方法による微分方程式の解法ではこの誤差は差分のキザミを  $\Delta t$  とすると、一ステップあたり  $(\Delta t)^5$  程度になる。例えば 100秒間を  $\Delta t = 0.01$  秒キザミで計算したとすると  $10^{-6}$  程度になる。この種の誤差の見積もりは、計算を行なう時には必須のものであるが、微分方程式を解く場合にはどの程度逆行可能か、即ち終端時間の値を初期値とし計算を逆行させ、最終的に、はたしてもとの初期値に戻るかを調べることも、簡単でかつ見やすい方法である。

この様な誤差の検討、ならびに偶数モードの励起は誘導期間の後になって起ることなどから、この誘導現象は決して計算誤差によるものではなく、この系それ自身が持つ性質と結論できる。次に誘導現象を詳しく調べよう。

まず  $k = k_0$  モードにのみエネルギーを与えたとすれば、初期の段階では次の方程式系が近似的になりたつ。

$$\ddot{a}_{k_0} + \omega_{k_0}^2 a_{k_0} + 3\lambda\omega_{k_0}^2 a_{k_0}^3 = 0 \quad (2.7)$$

$$\ddot{a}_k + (\omega_k^2 + 6\lambda\omega_k^2 a_{k_0}^2) a_k = f_k(t) \quad k \neq k_0 \quad (2.8)$$

この近似では  $k_0$  に対する他のモードの反作用は省略されていることに注意しよう。この近似は後に  $\lambda \sim \lambda_c$  近傍での解析に於いて、訂正を余儀なくされる。さて、 $k_0$  モ

ードについては閉じた方程式となるので、完全に積分できるが、今近似的に次のように置く

$$a_{k_0}(t) = a_{k_0}(0) \cos(\omega_{k_0} t)$$

これを  $k$  モードの方程式の右辺に代入し、時間をスケールすると ( $\omega_0 t = \tau$ )

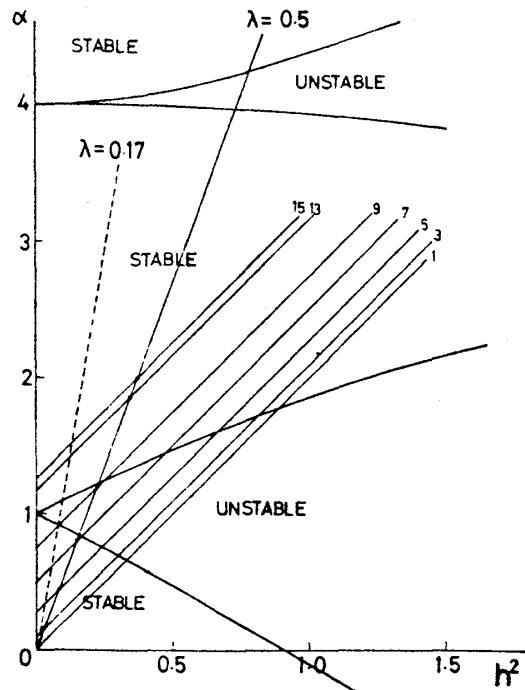
$$\frac{d^2 a_k}{d\tau^2} + [\alpha_k + 2h_k^2 \cos(2\tau)] a_k = g_k(\tau) \quad (2.9)$$

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_k}{\omega_{k_0}}\right)^2 (1 + 3\lambda a_{k_0}^2(0)) \quad (2.10)$$

$$h_k^2 = \left(\frac{\omega_k}{\omega_{k_0}}\right)^2 \frac{3\lambda a_{k_0}^2(0)}{2}$$

となる。もし右辺  $g_k(t)$  項を省略すれば、この方程式は有名な Mathieu 方程式と呼ばれるものになる。 $g_k(t)$  項は、 $k$  以外のモードと  $k_0$  モードのみを含んでいる。この方程式系の解の定性的な様子は、その齊次方程式、即ち Mathieu 方程式の安定性を調べることで判る。つまり、ある  $k$  モードの Mathieu 方程式が不安定な解を持てばそれは  $k_0$  モードによってこのモードが励起され十分な大きな振巾（エネルギー）を持ちうることを示すからである。

Mathieu 方程式の安定性はよく知られたように  $h_k^2, \alpha_k$  で決まる。図 8 に不安定領域が示されている。 $h_k^2, \alpha_k$  は  $\eta = \lambda a^2, (\omega_k/\omega_{k_0})^2$  を可変な変数とみると、同図上の二直線の交点として与えられる。つまり



Stable and unstable regions of Mathieu functions.

Fig. 8

$$\alpha_k = \left( 2 + \frac{2}{3\lambda a^2} \right) h_k^2 \quad (2.11)$$

$$\alpha_k = \left( \frac{\omega_k}{\omega_{k_0}} \right)^2 + 2h_k^2 \quad (2.12)$$

$\eta \equiv \lambda a^2$  は非線型項の大きさを表わす変数である。

$\eta, \omega_k/\omega_{k_0}$  が適当な関係にあると、 $k$  は  $k_0$  によって励起されてこのモードへのエネルギー分配は期待できるが、その条件を満さないモードには、たとえ選択則(2.6)によって励起されても十分エネルギーが流れないだろう。 $\eta$  を変化していくと、励起されるモードは次々に交替してゆくが、この図のうえから判ることは  $\eta_c(\lambda_c)$  の存在である。 $\eta_c > \eta$  では交点は不安定領域に決して入らないからである。また、今は F.P.U 系とは異なり高い振動数のモードを励起したのであるが、もし  $k_0$  が小さいものであれば、 $\omega_k/\omega_{k_0} \gg 1$  となる故、高振動数モードに対しては、 $(\alpha_k, h_k^2)$  は不安定領域に入りにくくなる。F.P.U はもっぱら低振動数モードからのエネルギーの分配を調べたのであるが、それが期待通りにはならなかったのはこのためである。

この Mathieu 方程式の安定性を解析することによって、エネルギー分配の可能性を調べてゆくと、一般に  $k_0$  を高く、 $N$  を大きくすれば、前述のモード毎の  $(\alpha, h^2)$  の値が不安定領域に属する可能性が大きくなり、誘導されやすく、すなわちエネルギーが各モードにゆきわたりやすくなるのである。

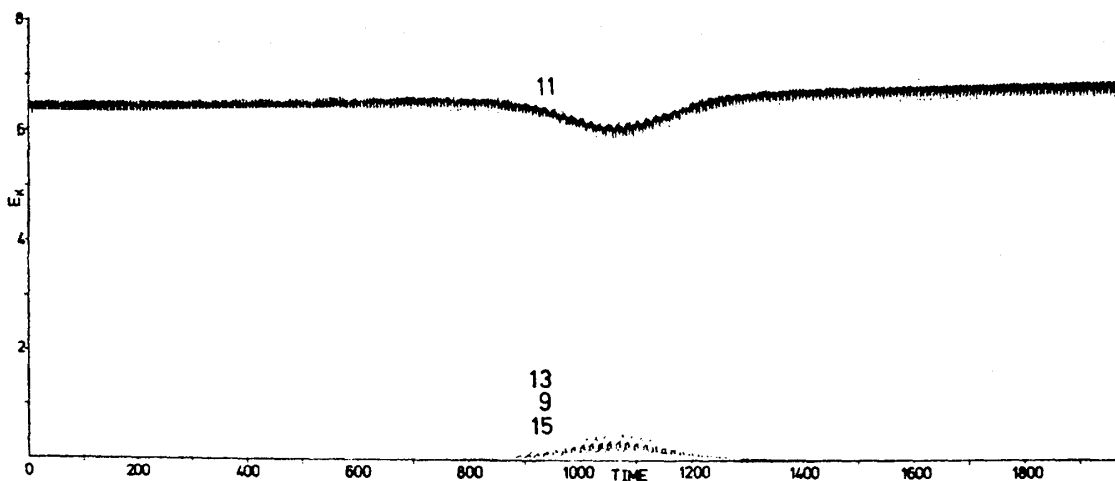
またこの時の解の挙動の特徴を述べておこう。不安定領域のモードは指数関数的に増大してゆくモードであるから、二つの接近した初期条件に対応する二つの解の距離はやはり指数関数的に増大してゆくはずである。そこで

$$\begin{aligned} \Delta x &= |x(t) - x'(t)| \\ \Delta \dot{x} &= |\dot{x}(t) - \dot{x}'(t)| \\ \Delta &= (\Delta x^2 + \Delta \dot{x}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

とする。計算機で  $\log \Delta$  を求めると予想通り時間に比列していることが判る。こういった性質を持つ力学系は C-力学系と呼ばれ、現在知られているうちでは最も彷徨

的で、もちろんエルゴード的な力学系<sup>\*</sup>)である。我々が扱った系は完全ではないが、少なくともエルゴード的な成分を持った系であることは間違いない。このことについてはKAM理論の後に言及する。

$\eta \geq \eta_c$  の場合について補足しておこう。この時の各モードのエネルギーの振舞いは、先の解析では不安定領域に入るにも関わらず、誘導現象は起らない。むしろ各モードは同期している様に見える。Fig. 7で  $[\eta'_c, \eta_c]$  の部分はこの現象の起っているところである。



Normal mode energies of the full system for  $N=16$ ,  $k_0=11$ ,  $\eta=0.034$  ( $\lambda=0.088$ ).  $T$  is estimated as 1068.

Fig. 9

しかしこの同期の周期は $\eta$ を大きくしていくと誘導期間に連続していく。直観的に説明すると、 $\eta_c$  近傍では  $k_0$  モードのエネルギーが他のモードに流れることによって減り、 $\eta$  が実質的に減少し  $\eta_c$  以下になってしまう。そうするともはや  $k_0$  モードの

\* ) C力学系とは、その任意の点における接空間が、2つの接超平面の直和となり、その接超平面の1つは伸長的（接近する2点の距離が指数関数的に増大）であり、他方は縮小的（接近する2点の距離が指数関数的に減少）であるものをいう。数値実験では、殆んどつねに指数関数的に増大する。二次元では、二つの接超平面とは二つの方向となる。

斎藤信彦

エネルギーはそれ以上流れなくなってしまう。つまり、先の近似で無視した他のモードの  $k_0$  モードへの影響がきいてくる現象で、11, 1, 9 のモードのみの関与する現象とすることになる。しかし1のモードのエネルギーはいつも小さい。そこで、11モードと9モードでエネルギーをやりとりできるよう9モードの影響が11モードに及ぶような近似を採用する。

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{11} + \omega_{11}^2 (1 + 3\lambda a_{11}^2 + 6\lambda a_9^2) a_{11} &= 0 \\ \ddot{a}_9 + \omega_9^2 (1 + 3\lambda a_9^2 + 6\lambda a_{11}^2) a_9 &= 0 \end{aligned} \quad (213)$$

この結合した非線型振動子系を次の初期条件でといたものが図10である。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.624 & \dot{a}_{11} &= 0 \\ a_9 &= 0.273 & \dot{a}_9 &= 0 \\ \eta &= 0.117 & (\eta > \eta_c = 0.066) & \end{aligned} \quad (2.14)$$

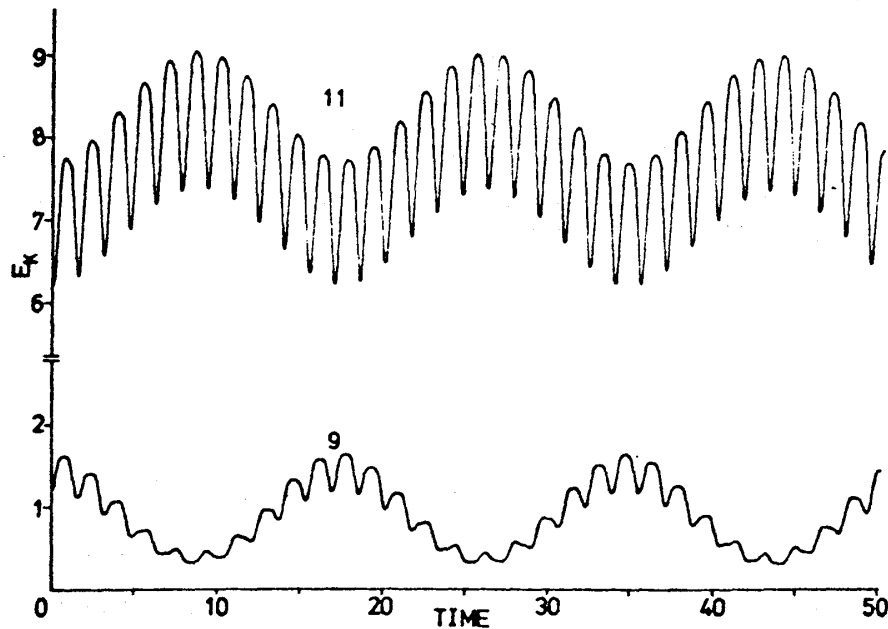


Fig. 6. Normal mode energies of the 9-11 system for  $N=16$ ,  $a_{11}^2=0.624$ ,  $a_9^2=0.273$ ,  $\eta=0.117$  ( $\lambda=0.3$ ).

Fig. 10

エネルギーの交換は予想通り同期的である。この方程式を  $\lambda$  を摂動パラメータとする摂動解を求めると



$$\begin{aligned}
 a_{11} = & A \cos \omega_1 t + \lambda A' \cos (2 \omega_2 + \omega_1) t + \lambda A'' \cos (2 \omega_2 - \omega_1) t \\
 & + \lambda A''' \cos 3 \omega_1 t + O(\lambda^2)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 a_9 = & B \cos \omega_2 t + \lambda B' \cos (2 \omega_1 + \omega_2) t + \lambda B'' \cos (2 \omega_1 - \omega_2) t \\
 & + \lambda B''' \cos 3 \omega_2 t + O(\lambda^2)
 \end{aligned}$$

となる。但し

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 = & \omega_{11}^2 \left( 1 + \frac{9}{4} \lambda A^2 + 3 \lambda B^2 \right) \\
 \omega_2^2 = & \omega_9^2 \left( 1 + \frac{9}{4} \lambda B^2 + 3 \lambda A^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$A^{(i)}, B^{(i)}$  等は  $A, B, \omega_{11}^2, \omega_9^2$  の関数として求めることができる。これは Fig. 10をよく再現する。実際には、9, 11モード以外のものもこの現象に関与する。9-モードが安定領域に入るとき、13モードが不安定領域に入る。これらは同時におこるので、現象は同期的に進行するのである。(Fig. 9)

このように、F.P.Uに端を發したエネルギー分配、熱平衡の達成の問題は、不安定性から理解されることがわかった。このためには適当な大きさのエネルギー、結合定数の場合でなければならないことは今まで見てきたとうりである。しかし、これらの条件が満されている時の解の性質については、C力学系的であると言えるだけで、これ以上のくわしい事を知るためには様々な準備が要る。次の章では数学的な観点に立って、今までに得られた重要な理論であるKAM理論を紹介しよう。

### § 3. KAM理論

#### 1) 積分系と安定性

積分系とは  $f$  自由度を持つハミルトニアン系で、 $f$  個の一価の積分  $F_i$  ( $i=1, \dots, f$ ) を持つものを言う。 $F_i$  のうち一つはハミルトニアン自身であるが、それらは互いに包含関係になければならない。即ち、すべての  $m, n$  に対して

$$\{F_m, F_n\} \equiv \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_n}{\partial q_j} - \frac{\partial F_m}{\partial q_j} \frac{\partial F_n}{\partial p_j} \right) = 0 \tag{3.1}$$

とする。 $F_i$  は一定の値をとるから

$$F_i(p, q) = k_i = \text{const} \quad i = 1, 2, \dots, f$$

とおく。いま2つのベクトル

$$\mathbf{V}_i = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial q}, \frac{\partial F_i}{\partial p} \right\},$$

斎藤信彦

$$U_i = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial p}, -\frac{\partial F_i}{\partial q} \right\}$$

を定義する。明らかに  $V_i$  と  $U_i$  は直交し、

$$(U_i, V_i) = 0$$

包含関係は

$$(U_m, V_n) = 0$$

である。軌道ののっている空間(多様体)を  $M$  とすると、 $M$  の上では  $F_m = k_m$  をみだす。 $V_m$  は  $F_m = k_m$  の面に直交するからすべての  $U_n$  は  $F_m = k_m$  の面に接する。それ故  $M$  はすべてのベクトル場  $U_m$  に接している。 $M$  は有界であるとする、これは  $M$  がトーラスであることを示している。すると適当な正準変換によって  $(p, q) \rightarrow (k, \varphi)$ ,  $H(p, q)$  を  $k$  のみの関数  $H(k)$  とすることができる。 $H(k)$  は  $\varphi$  を含まないから、これで積分が求められる。この軌道は  $f$  次元のトーラスの上にある。トーラスには連続的な変化で消滅させることの出来ない閉曲線が  $f$  種類ある。その曲線を  $\tau_i$  として

$$J_i = \frac{1}{i\pi} \int_{\tau_i} (\sum p_i dq_i), \quad i = 1, 2, \dots, f$$

によって作用変数を定義する。連続的な変化で消滅させられるような(単連結の面内の)閉曲線に対してはこの積分は0であり、 $J_i$  は  $k$  のみの関数で表わされ一定である。 $J_i$  に対する角変数  $\theta_i$  は

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \omega_i \quad (\text{一定})$$

$$\theta_i = \omega_i t + \delta_i$$

又  $\theta$  は  $2\pi$  を周期とするから  $p, q$  も周期関数であり

$$p_i = \sum p_{im}(J) e^{i \sum_k m_k (\omega_k t + \delta_k)}$$

$$q_i = \sum q_{im}(J) e^{i \sum_k m_k (\omega_k t + \delta_k)}$$

と表わされる。 $M$  の上で軌道は準周期的である。もし周期  $\tau_i = 2\pi/\omega_i$  の比が有理数で

あれば適当な  $T$  をとると

$$\theta_i(T) = \theta_i(0) + 2\pi \times \text{整数}$$

となる。このときは軌道はすべて閉曲線になる。

一般の系はもちろんこの様な単純な可積分系ではないが、その時、系の挙動はどのようなのであろうか。その為に例えば積分系に小さな、一般的な摂動項が加った系を考えてみよう。この時、摂動項の存在によってどのくらいもとの積分系と様子が変わるであろうか。これに答えるのが、この章の標題に掲げた KAM (Kolmogorov-Arnol'd-Moser) 理論である。

Kolmogorov は理論のあらましを 1954 年 Moskova の国際数学会議で発表したか、くわしい報告は出さなかった。その後 Arnol'd と Moser は独立にその証明を与えた。

この理論に入る前に、Poincaré 写像の方法と Poincaré-Birkhoff の不動点定理をのべておこう。

## 2) Poincaré 写像と Poincaré-Birkhoff の定理

Poincaré 写像の考えは 2 自由度系に限らないが、視覚に訴える意味で理解しやすいので 2 自由度系に話しを限ろう。エネルギーは保存されるから運動は三次元の中に限られる。適当に定義した二次元平面のある領域の点から出発したすべての軌道が、またこの平面に交わるようにすることができる。図を参照してほしい。この面を Poincaré の cross section と呼ぶ。面  $P$  の一点に対して、この点から出発した軌道が次にこの面  $P$  に交わる点を対応させる変換を考えることができるが、この変換は Poincaré mapping と呼ばれている。これを  $T$  と表わすと、 $x_0 \in P$  から出発した軌道は次々に  $T(x_0)$ ,  $T^2(x_0) \dots, T^n(x_0) \dots$ , の点で  $P$  に交わることになる。Poincaré map. の性質を知ることはもとの力学系の性質を知る有力な手段となることは言うまで

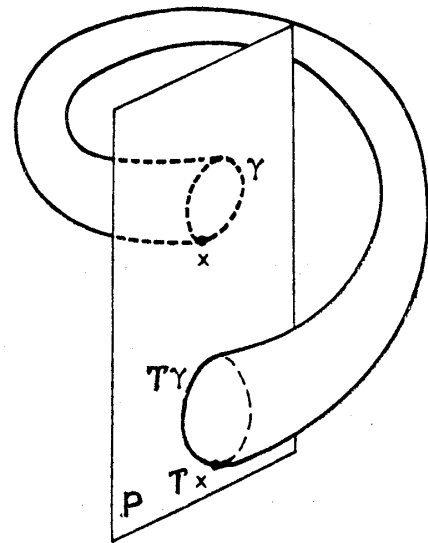


Fig. 11

斎藤信彦

もない。また Poincaré-Cartan によって証明された様に、ハミルトン力学系の Poincaré-mapping は可微分で、保測変換であるという都合のよい性質がある。保測な変換のもつ一般的な性質を調べることが、ハミルトニアン力学系の性質を定性的に知ることになるとされるのはこの理由からである。

Poincaré 写像は軌道の出発点を同時刻にとっても、写像点は同時刻の点ではなく微分方程式に従う連続的な変化の結果によるものである。しかし、これを一般化し次に一般に離散的な保測変換として  $T$  の性質を調べてみよう。 $T$  が不動点、 $T(x_0) = x_0$  を持つとしてこの回りでの変換の様子を調べる。線型変換  $M$  は次の様に定義される。

$$\begin{aligned} T(x_0 + \delta x) &= T(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_0} T \delta x + O(\delta x^2) \\ &\equiv x_0 + M \delta x + O(\delta x^2) \end{aligned}$$

$T$  は保測な変換であったから、 $M$  も保測な変換でなければならない。従って  $|\det M| = 1$  を満たす。そこで  $M$  の一般形は次の様になる。

$$M := \begin{pmatrix} a+d & c+b \\ c-b & a-d \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$a^2 - d^2 - c^2 + b^2 = 1 \quad (3.3)$$

変換  $M$  に対して次の二次曲線  $\phi$  は不変である

$$\begin{aligned} \phi &= (b-c)x^2 + 2dxy + (b+c)y^2 \\ \phi(M(x, y)) &= \phi((x, y)) = \text{一定} \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。この不変曲線群  $\phi$  は  $a, b, c, d$  値によって次の様に分類される。二次曲線  $\phi$  の楕円率  $E$

$$E = \frac{b^2 - c^2 - d^2}{b^2 + c^2 + d^2} = \frac{1 - a^2}{b^2 + c^2 + d^2} \quad (3.5)$$

によって

$E > 0$	楕円	$E < 0$	双曲線
$E = 1$	円	$E = 0$	放物線

となる。さらに剰余 (Residue)  $R$  を  $R = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Tr} M = \frac{1}{2} (1-a)$  と定義すると,  $M$  の固有値は

$$\lambda = 1 - 2R \pm \sqrt{R(R-1)} \tag{3.6}$$

となる。  $R$  と  $E$  の関係は

$R$	$R < 0$	$R = 0$	$0 < R < 1$	$1$	$1 < R$
$E$	$E < 0$	$E = 0$	$E > 0$	$0$	$E < 0$

となる。

$0 < R < 1$  の時不変二次曲線は楕円となり, この時固有値は互いに共役な複素根となる。これは, 位相点が楕円の周上を周回することを意味する。前節の可積分系の不変トーラスの切口に対応するこの場合のみ詳しくしらべよう。  $a = \cos 2\pi\omega_0$  において一般性を失わない。

$$\begin{aligned}
 M^S &= \underbrace{M \cdot M \cdots M}_{S \text{ 個}} \\
 &= \frac{\sin 2\pi S\omega_0}{\sin 2\pi\omega_0} \begin{pmatrix} \sin 2\pi\omega_0 \cot 2\pi S\omega_0 + d, & b+c \\ b-c, & \sin 2\pi\omega_0 \cot 2\pi S\omega_0 - d \end{pmatrix} \\
 S\omega_0 &= 1 \text{ の時} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

となる。即ちこの様な  $a = \cos 2\pi\omega_0$  に対しては, 楕円の周上の位相点は全て  $S$  周期点であり, その他の  $a$  に対しては, 軌跡は稠密にこの楕円の周を埋めつくす。このようにして  $T$  の楕円型不動点のまわりには線形近似によれば楕円の不変曲線が存在し, 変換  $M$  に含まれるパラメーター  $a$  の値が特別な場合には, その不変曲線はすべて多周期の不動点となっている。二自由度系を考えると, 可積分系では  $T$  自身によって二次元トーラスが出来る。したがって Poincaré mapping では不変曲線族が常に存在する。上にみたようにその族の一つの曲線上では一般には準周期的であるが, 丁度周期的になる不変曲線も散在する。この事情は線形近似による場合と異なる。( Fig. 12 )

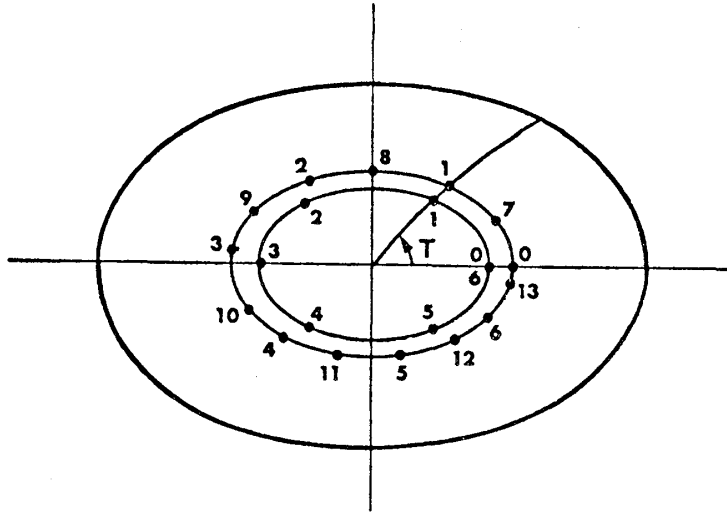


Fig. 12

さて、ここで記号をあらためていままでの可積分な変換を  $T_0$  とし、これに小さな摂動の加わった変換を  $T$  とかくことにする。Fig. 11 において  $\Gamma$  は  $T_0$  による丁度周期的な不変曲線とする。 $\Gamma$  上では、その上の任意の1点  $0$  から出発すると  $T_0$  の変換によって  $1, 2, 3, \dots$  と写像がえられ、たとえば丁度  $n$  回目にもとの点  $0$  に一致する。 $\Gamma^+$  では  $T^n$  の不動点はないから、 $T^n$  に対し  $\Gamma^+$  は、例えば Fig. 13 のように左に回転してゆく点からなる不変曲線であり、 $\Gamma^-$  は右に回転してゆく点からなる不変曲線となる。次に  $T_0$  に小さな摂動がかかった変換  $T$  を考える。すると変換  $T$  に対して  $\Gamma$  はもはや不変曲線ではなくなる。しかし、 $\Gamma^-$  近傍の点は  $T^n$  によって右に、 $\Gamma^+$  近傍の点は左に回転するという性質は、摂動が十分小さければ変らない。 $T$  の不動点を原点とし、そこから伸ばした半径上の点の集合  $(e)$  からの  $T^n$  写像点は、 $\Gamma, \Gamma^+, \Gamma^-$  との交点の近傍では図の  $T^n(e)$  なる曲線となり、 $T$  が連続な写像であるから必ず半径と交わる点  $q$  が一つ存在する。 $q$  の原像  $p$  はもちろん半径上にあり  $q = T^n(p)$  である。この点だけは  $T^n$  によって同じ半径上を動くのである。さて、角  $\varphi$  を連続的に変えてゆくことによって、各半径上の点  $p, q$  も連続的に変化してゆき、それぞれ曲線  $r$  と  $r'$  を定義する。 $T^n(r) = r'$  の関係があることは言うまでもない。同時に閉曲線  $r$  で囲まれた領域は、閉曲線  $r'$  に囲まれた領域に写像されるが、特に  $T$  の性質からこの領域の面積は相等しいことに着目すると  $r$  が完全に  $r'$  に取まかれることもないし、その逆もないことが判る。すなわち閉

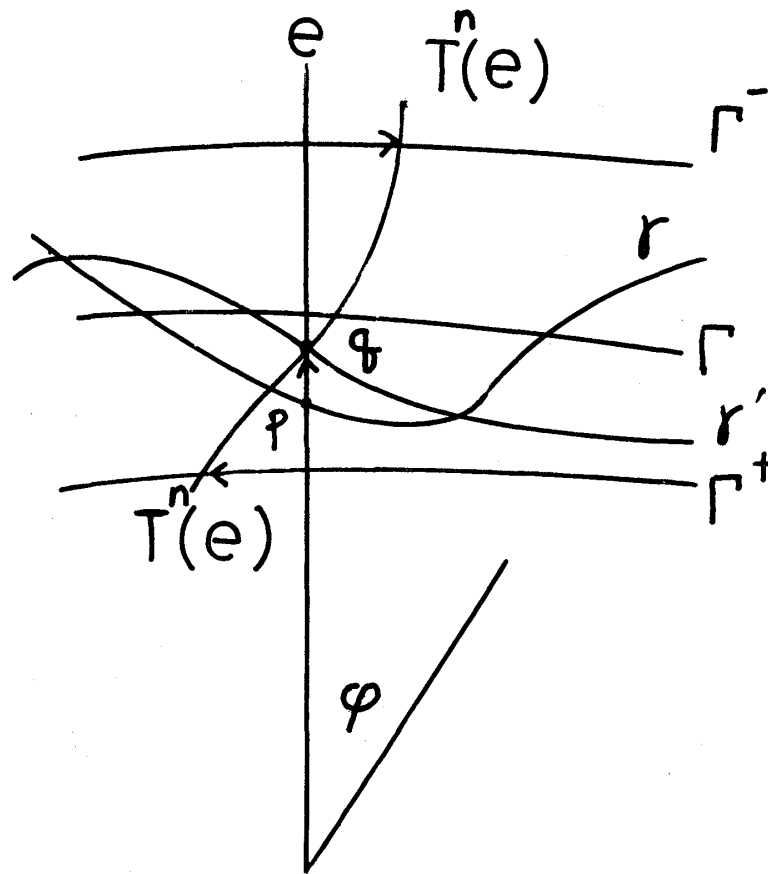


Fig. 13

曲線  $r$  と  $r'$  は交わっていなければならない。この時偶数個の交点を持つことは自明である。この偶数個の交点は、それぞれ同じ半径の上の  $r$  上の点でもあり  $r'$  上の点でもあるから、 $T^n$  の不動点である。さらに、指数をしらべることによってこのうちの半分は楕円的であり残りは双曲的となることが判っている。また、楕円的な不動的の  $T$  による軌道(写像点)は  $x, Tx, \dots, T^{n-1}x$  でこれまたすべて楕円的な  $T^n$  の不動点となるから、もし  $k$  個の軌道があるとすると、 $T^n$  の不動点は  $2kn$  個あることになる。その様子を Fig. 14 に書く。これら双曲的・楕円的不動点は交互に配置されていることがわかる。以上で Poincaré-Birkhoff の定理の解説を終える。

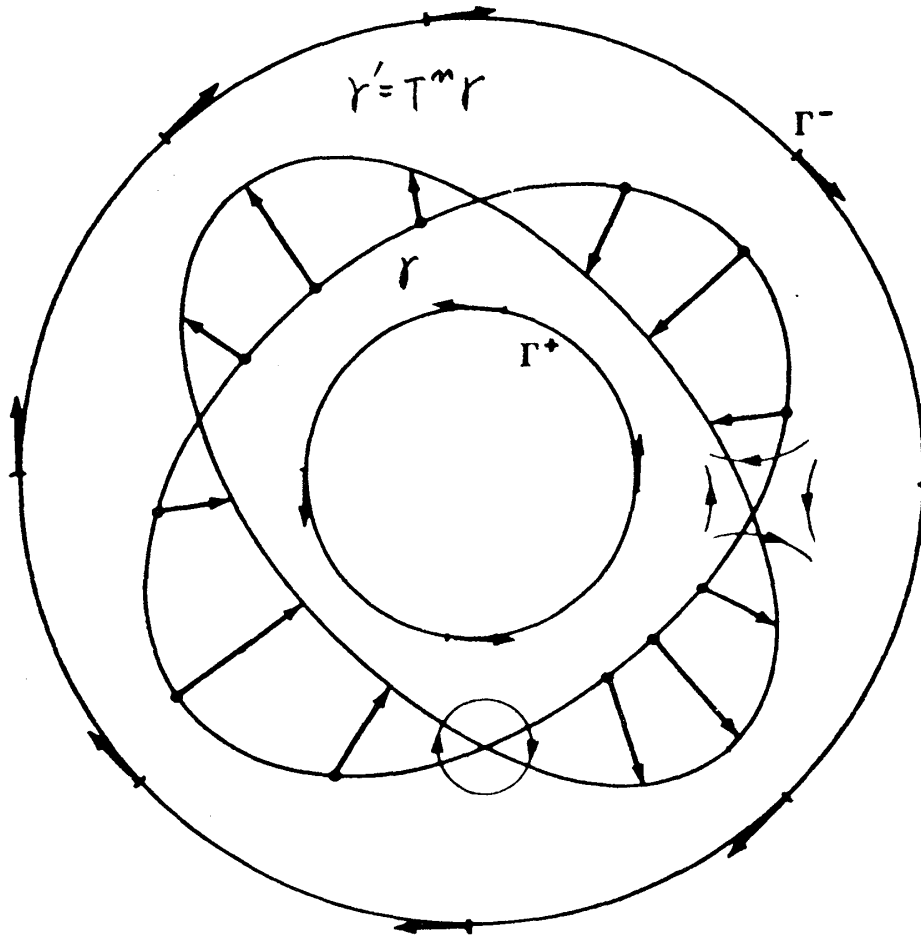


Fig. 14

### 3) KAM理論

作用積分  $J$  と、角変数  $\varphi$  で表わされる  $f$  自由度の系でハミルトニアンは二つの部分に分れるとする。

$$H(J, \varphi) = H_0(J) + \varepsilon V(J, \varphi) \quad (3.12)$$

$\varepsilon$  は小さな摂動パラメータである。 $J, \varphi$  はそれぞれ  $f$  個の  $J_i, \varphi_i$  をまとめて表わしたものである。ハミルトニアン  $H_0$  は不変トーラスをもっている。この不変トーラスは、Poincaré 写像に対しては Poincaré-Birkhoff の考えたような非線形変換  $T_0$  による不変曲線に対応するものである。従ってヘシアンは



$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right| \neq 0 \quad (3.13)$$

であるとする。上にみたように、微小な摂動が加わると、 $H_0(J)$  による不変トーラスのまわりに  $n$  周期解の存在することを Poincaré は証明したが、この不変トーラス自身はどのようになるだろうか。これが KAM の定理の関与する問題である。

今正準変換  $W(J', \varphi)$  によって、正準変数  $(J, \varphi) \rightarrow (J', \varphi')$  と変換され、同時にハミルトニアン  $H$  は  $H'(J', \varphi')$

$$H = H'_0(J') + \varepsilon^2 H_2(J', \varphi') \quad (3.14)$$

と変換されるような正準変換を作ったとしよう。この正準変換を次々に構成してゆくことができるならば、最後にハミルトニアンは  $H = H_0^\infty(J^\infty)$  となり系は可積分系であることを示すことができる。即ち  $J^\infty(J, \varphi) = \text{一定なる積分が存在する}$ 。そしてこの不変なトーラスは非摂動系のトーラスを少しゆがめたものになるだけなのである。そこで、この様な正準変換  $W$  を次の形で求めてみよう。

$$W(J', \varphi) = J' \varphi + \varepsilon S(J', \varphi) \quad (3.15)$$

$$\text{とおくと } J = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = J' + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

$$\varphi' = \frac{\partial W}{\partial J'} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial J'} \quad (3.16)$$

である。 $S$  は  $\varphi$  について周期 1 の周期関数であるとして

$$S(J', \varphi) = \sum_{k \neq 0} S_k(J') e^{2\pi i \{k, \varphi\}} \quad (3.17)$$

$$\{k, \varphi\} \equiv \sum_{i=1}^f k_i \varphi_i$$

$V(J, \varphi)$  も同様に展開できるとして

$$V(J, \varphi) = V_0(J) + \sum_{k \neq 0} V_k(J) e^{2\pi i \{k, \varphi\}} \quad (3.18)$$

とする。先の変換された変数  $(J', \varphi')$  をもとのハミルトニアンに代入すると

$$\begin{aligned}
 H &= H_0(J) + \varepsilon V_0(J) + \varepsilon \sum_{k \neq 0} V_k(J) e^{2\pi i \{k, \varphi\}} \\
 &= \overbrace{H_0(J') + \varepsilon V_0(J')} + \varepsilon \left[ \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial J'}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right\} + \sum V_k(J') e^{2\pi i \{k, \varphi\}} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^2 [\dots] + \dots
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

となる。 $\partial H_0 / \partial J'_i = \nu_i(J')$  として、 $\varepsilon$  の一次の項を 0 とするように  $S_k$  を決めてやる。(3.13) の条件から  $\nu_i$  は一般に  $J'$  の関数であり、これが後の解析に必要であることがわかるだろう。

$$\begin{aligned}
 \left\{ \nu, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right\} + \sum_{k \neq 0} V_k(J') e^{2\pi i \{k, \varphi\}} &= 0 \\
 \therefore [2\pi i \{ \nu, k \} S_k(J') + V_k(J')] e^{2\pi i \{k, \varphi\}} &= 0 \\
 \therefore S_k(J') &= \frac{i V_k(J')}{\{2\pi \nu, k\}}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。ところで、こうして求めた  $S$  はあくまでも形式解であって、その収束性が保証されなければなんの役にも立たない。残念な事に、 $S_k$  の分母は  $\{2\pi \nu, k\} = \sum 2\pi \nu_i k_i$  の形をしており、一般にいくらでも小さくなりうる。この為  $S$  は一般的には収束しないのである。この困難は「小さな分母の問題」と呼ばれている。ところが、Kolmogorov-Arnol'd-Moser は  $|\{2\pi \nu(J'), k\}|$  に有限の下限を与える  $J'$  が位相空間の中で有限測度存在することを指摘し、従って十分小さな  $\varepsilon$  に対して位相空間の中に先の  $S$  を収束させる有限測度を持つ領域 ( $J'$ ) があることを主張した。たとえば簡単な二自由度の場合に見てみよう。まず、適当な  $K, \mu$  に対して、いかなる  $k_1, k_2$  に対しても

$$\left| \alpha - \frac{k_2}{k_1} \right| > \frac{K}{k_1^\mu} \quad \alpha = \frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{3.21}$$

を満す  $\alpha$  が存在するとすれば、この  $\alpha(\nu_1, \nu_2)$  に対しては、

$$\begin{aligned}
 |S| &\leq \sum_k \left| \frac{h_k(J')}{2\pi \{ \nu, k \}} \right| = \sum_{k_1 k_2} \left| \frac{h_k(J')}{2\pi \nu_2 k_1 \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \frac{k_2}{k_1} \right)} \right| \\
 &< (2\pi \nu_2 K)^{-1} \sum_{k_1 k_2} |h_k(J')| k_1^{\mu-1}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

となり、この右辺の最後の和は  $k_k$  が  $|k| = |k_1| + |k_2| \rightarrow \infty$  の時十分速やかに 0 に近づくとするれば、(このことは、摂動項があまり特異なものでないことを仮定している) 収束することは容易に判る。そこで、 $\nu_1 \leq \nu_2$  として一般性を失わないから、 $[0, 1]$  区間にこの様な  $\alpha$  がどの程度存在するかしらべてみよう。 $\mu = 4$  のとき、

$$\left| \alpha - \frac{k_2}{k_1} \right| \leq \frac{K}{k_1^\mu} \quad \text{となる } \alpha \text{ は}$$

$$k_1 = 1 : k_2 = 0, k_2 = 1 \quad \text{の時それぞれ}$$

$$|\alpha| < K \quad |\alpha - 1| < K$$

$$k_1 = 2 : k_2 = 0, k_2 = 1, k_2 = 2 \quad \text{の時それぞれ}$$

$$|\alpha| < \frac{K}{2^\mu}, \quad \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| < \frac{K}{2^\mu}, \quad |\alpha - 1| < \frac{K}{2^\mu}$$

.....  
 $k_1 = n : k_2 = 0, k_2 = 1 \dots k_2 = n \quad \text{の時それぞれ}$

$$|\alpha| < \frac{K}{n^\mu}, \quad \left| \alpha - \frac{1}{n} \right| < \frac{K}{n^\mu}, \quad \dots \quad |\alpha - 1| < \frac{K}{n^\mu}$$

となる。図示してみると Fig. 15 の太線部となる。この太線部の全部の和 I の測度は、

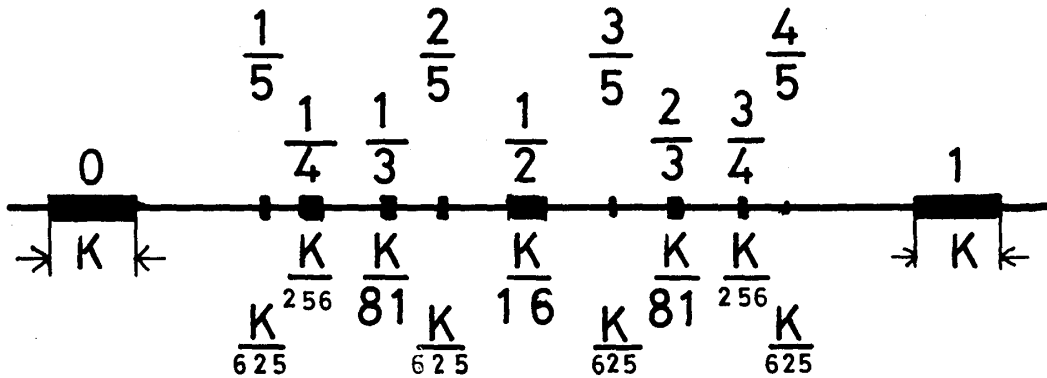


Fig. 15

$$|I| < \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{K}{k_1^\mu} \quad k_1 = K \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^{\mu-1}} = K \cdot C(3) \quad (3.33)$$

斎藤信彦

と評価できる。(  $\mu = 4$  )

$C(3) = \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{-3}$  は有限となるので  $K$  を適当に決めれば,  $|I| < 1$  とできる。これから, あらゆる  $k_1, k_2$  に対して

$$\left| \alpha - \frac{k_2}{k_1} \right| > \frac{K}{k_1^\mu}$$

を満たす  $\alpha$  の集合の測度は 0 ではない。以上が, KAM 理論の荒筋である。大切なことは今の例について述べると, 少なくとも閉区間  $[0, 1]$  で稠密な, 有理数全体 ( $0 \leq Q \leq 1$ ) は  $I$  に含まれる, 即ち有理比の関係にある振動数の組に対しては  $S$  は収束しないことになるのである。つまり, 摂動に対して, 変形はするものの保存される不変トーラスは連続的に変化する族をつくらないことである。即ち可積分系は小さな摂動に対し安定ではあるが, この様にきわめて複雑な性格を持っているのである。さらに双曲的不動点のまわりの挙動の複雑は敬嘆すべきものがある。次にそれをみよう。

#### 4) 双曲的不動点のまわりの不安定性

最後に Poincaré 写像における双曲的不動点の回りの解の動きをみてみよう。双曲的不動点の近傍の点の運動は Fig. 16 のようになっている。

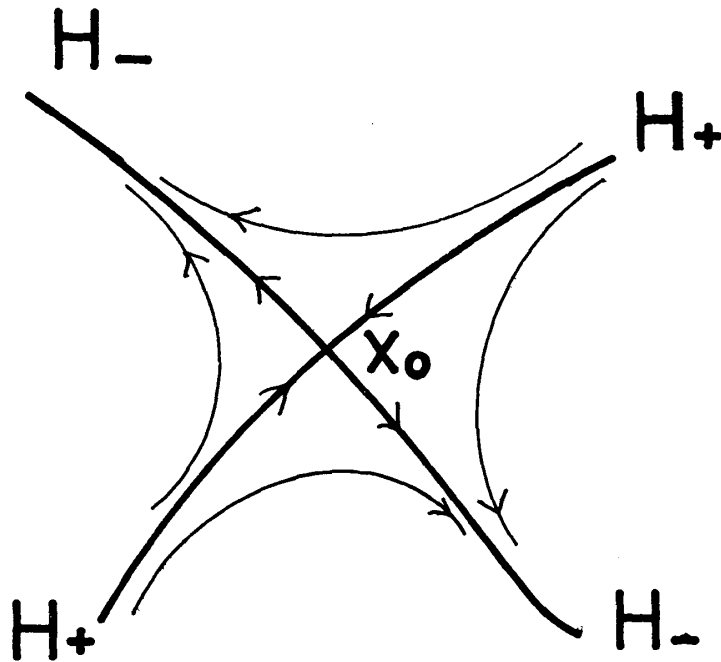


Fig. 16

双曲的不動点は、いわゆる鞍点であって、そこから離れてゆく点の軌跡  $H_- = \{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(x) = x_0\}$  と近づいてくる点の軌跡  $H_+ = \{x \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} T^n(x) = x_0\}$  の二種類の枝が出ている。<sup>\*</sup>異なる双曲的不動点  $p_1, p_2$  から出た  $H_+, H_-$  は交わることがありうる (Fig.

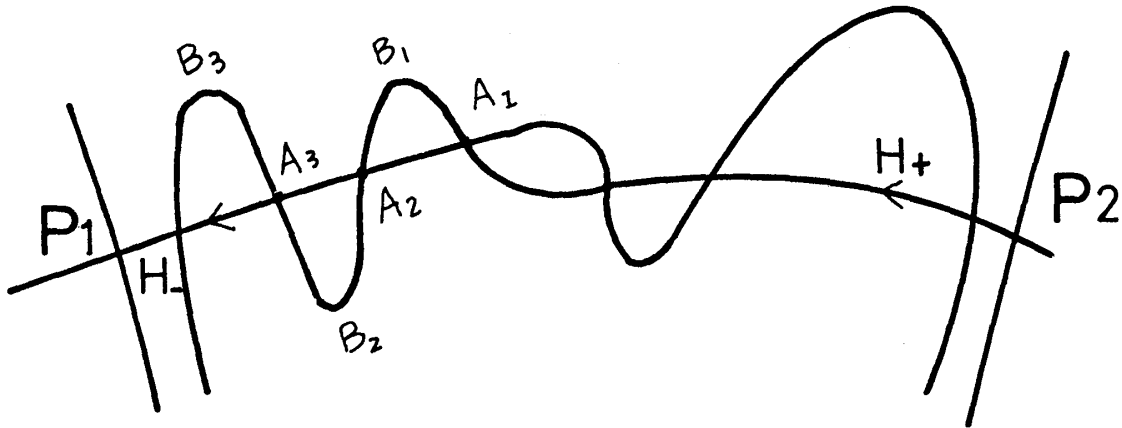


Fig. 17

17)。この異種の二枝の交点を Heteroclinic point と呼ぶ。Heteroclinic point は一つあれば、実は無数にあることは  $T$  が連続な写像であることから容易に判る。

Fig. 17 において  $p_1$  に入る  $H_-$  と  $p_2$  から出る  $H_+$  を考えよう。この二つの不変曲線が  $A_1$  で交わったとしよう。  $A_1$  は  $H_-$  上の一点と考えれば  $H_-$  上を  $p_1$  に向って、  $A_2, A_3, \dots$  と写像される。また  $A_1$  を  $H_+$  上の一点とすれば、  $A_2, A_3, \dots$  は  $H_+$  上になければならない。従って  $H_+$  の軌道は図のように  $H_-$  の曲線上を折りたたまれる。またこの変換は保測的であるから、  $H_+$  と  $H_-$  でかこまれる面積すなわち  $A_1 B_1 A_2, A_2 B_2 A_3,$

<sup>\*</sup>) この二種類の枝  $H_+$  と  $H_-$  は夫々  $n \rightarrow \infty$  又は  $n \rightarrow -\infty$  で不動点  $x_0$  に到達する。  $H_+$  又は  $H_-$  は軌道の一意性と直続性からそれ自身と交わることはない。たとえば  $H_+$  が Fig. 16 のように  $X$  で交わったとしよう。この  $X$  は  $x_0$  に最も近いものとする。  $X$  の写像  $X'$  は  $X$  と  $x_0$  の中間にあり、ループの上の一点  $X_1$  の写像点  $X'_1$  は  $H_+$  の上で  $X'$  の手前である。ところが  $X$  に近い  $X_2$  は、  $X_2 X_1 X$  とループをつくるのでその写像点  $X'_2$  は  $X'_1$  よりもっと手前になければならない。しかし  $X_2$  を十分  $X$  に近づけてとれば  $X'_2$  と  $X'$  は十分近くなければならない。これは矛盾である。

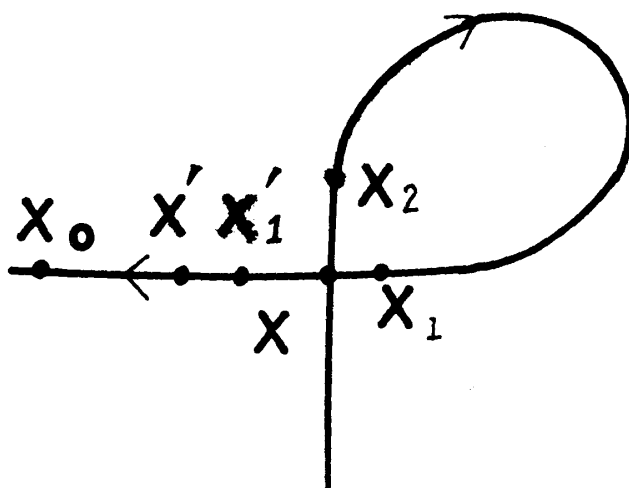


Fig. 18

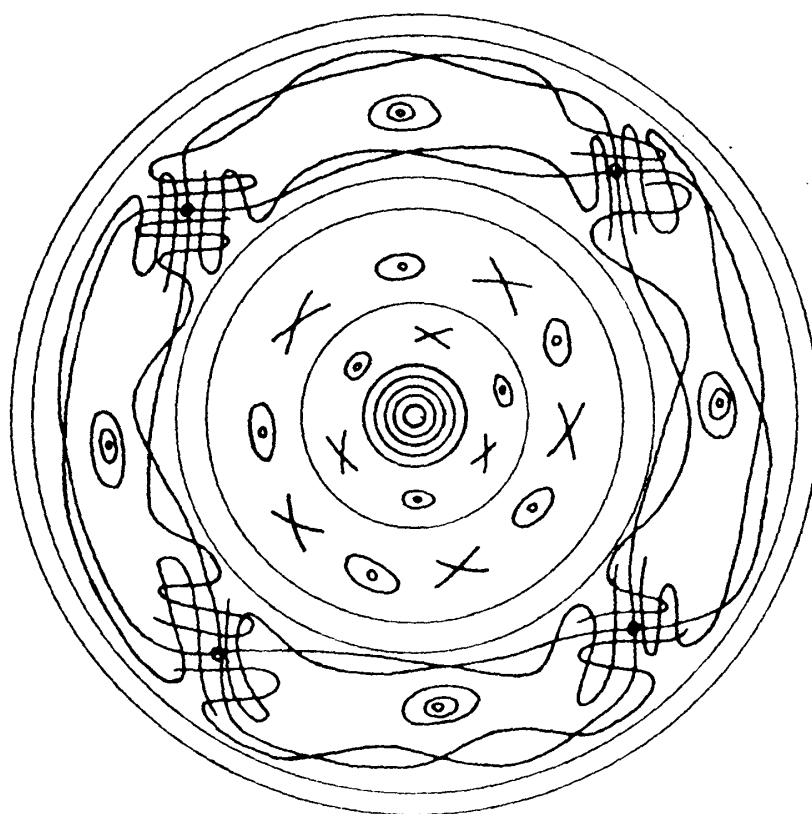


Fig. 19

$A_2 B_2 A_3, A_3 B_3 A_4, \dots$  等はひとしい。ところが,  $A_1, A_2, \dots$  は無限回くり返して  $p_1$  に到達するから,  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$  の長さは段々と短くなり従って, 折れたたみがはげしくなると同時に,  $H_+$  の弧は細長く伸びることになる。この様子を書いたものが, Fig. 19である。

結局以上のことから, 摂動によって破壊された不変トーラスの後には楕円的不動点のまわりにはヒエラルキー的な構造が現われ, その中の双曲的不動点のまわりには Heteroclinic point が存在し得て, この時にはきわめて複雑な挙動をする位相点の領域があることになる。そして摂動が大きくなるにつれて, この領域 (Stochastic region) も広がってゆき, 実際数値計算でも容易にとらえられるようになるであろう。この事情がよく現われている有名な Hénon-Heiles 系を紹介しよう。

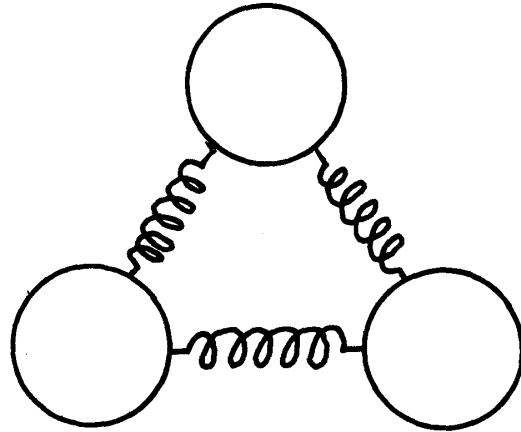


Fig. 20

Hénon-Heiles は銀河系の星の運行を調べるために, 次のハミルトニアンで記述される系を考え, 数値計算を行なった。

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + 2x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

J. Ford によれば, この系は図の様な円周上の非線型振動子と等価である。但し, 一様な回転を表わす自由度は運動の恒量であるからこの自由度を分離するために, 次の線型な変数変換を行なう。

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} (x_3 - x_1)^2 - \frac{\alpha}{3} (x_2 - x_1)^3 - \frac{\alpha}{3} (x_3 - x_2)^3 - \frac{\alpha}{3} (x_1 - x_3)^3$$

斎藤信彦

は変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

によって

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2) + (3\alpha/\sqrt{2})(y_2 y_3^2 - \frac{1}{3} y_2^3)$$

$q_1$  は運動の恒量であるから、これを無視すると、Hénon-Heiles 系と一致することが判る。

この系の Poincaré 写像は Fig. 21 であってエネルギーが小さいときは(a) KAM 理論の不変曲線で覆われている。エネルギーが次第に大きくなると(c),  $T^5$  の不動点があられ、島構造が見える。不変曲線以外の部分の点は1つの初期点からの写像点であって、不規則な挙動を示している。

このような不規則領域はエルゴード的であろうか、これをみるためにこの系を少し変形して

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2 + \frac{1}{3} x_2^3 (1 - 2\varepsilon)$$

なる系を考えると、これは  $\varepsilon = 1$  で Hénon-Heiles 系と一致し、 $\varepsilon = 0$  で可積分系となる。可積分系に近い程不規則領域にも可積分系の痕跡があられその構造が明らかになるであろう。しかし  $\varepsilon = 0$  にあまりに近すぎると、不規則領域は小さくなりすぎて、観察に不便である。そこで  $\varepsilon = 0.5$  の系をしらべることにしよう。Fig. 22 はその Po-



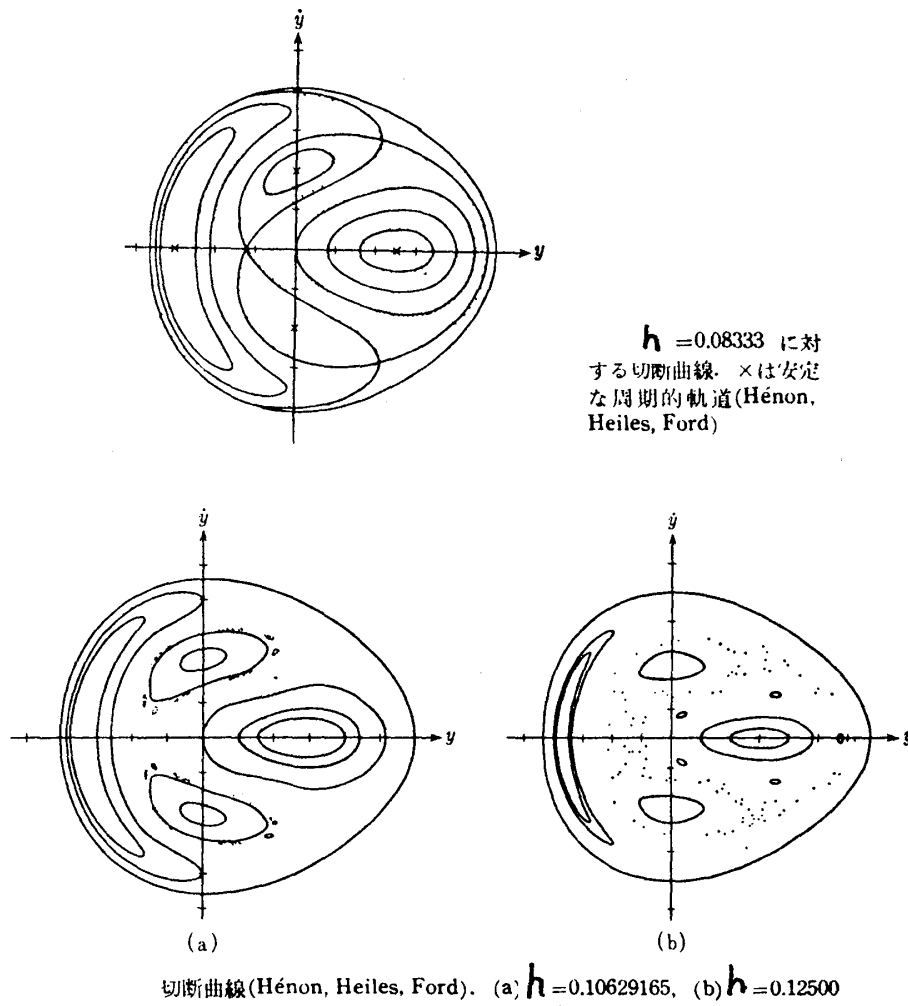
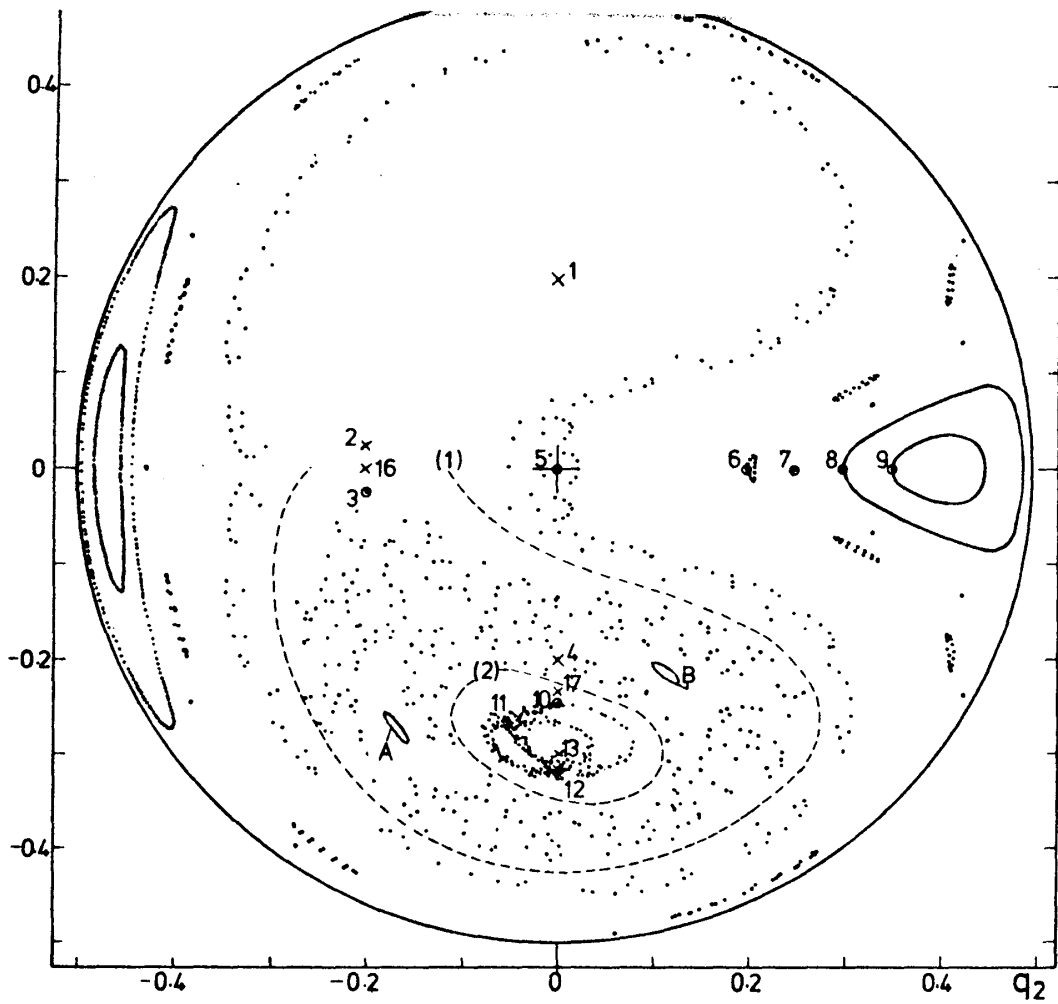


Fig. 21

incaré 写像の一つである。図中の3から出発した写像点は、(1)と(2)の点線ではさまれた領域の中に限られ、(2)の点線の中の一点10から出発すると図のような写像点の分布がえられるが、その抜けている領域の点17からの写像はその空白の領域を埋める ( Fig. 23 )。このようにしてこの乱雑な領域は、一つにつながってはず、準周期的な軌道の走る不変トーラスで隔てられていることが明瞭に察せられる。

さらに、この領域の中に入れこ状のヒエラルキー的な構造があることも判る。



Poincaré map of the system  $H_{1/2}$ ,  $h=0.125$ . The numbers  $1, 2, \dots, i, \dots$  stand for the starting points  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$  in the text. But only the mapped points starting from the initial points  $P_3, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$  and  $P_{10}$  are illustrated.

Fig. 22

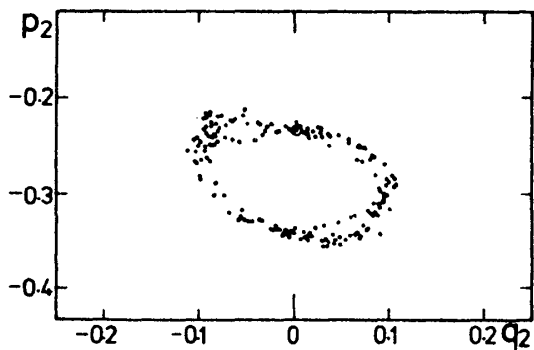


Fig. 23

Poincaré map of the system  $H_{1/2}$ ,  $h=0.125$  for the initial point  $P_{17}$ .

この乱雑領域の一つ一つを, Stochastic component, 又は Ergodic component と呼ぶ。この領域から出発した軌道は, この領域内を恐らくエルゴード的に埋めつくすであろうが, 決して領域外には出ない。したがって系全体としては「測度的可遷性」を持たないから, 本当の意味のエルゴード系ではない。しかし Hénon-Heiles 系でエネルギーを増していけば判るように, この Ergodic component はそれにつれて増大してゆきかつ融合して一つになってゆく傾向がある。

最後に戸田格子の可積分性について調べた例に言及しておこう。この場合の Poincaré map は Fig. 24 の様になった。a, b は共に 2 自由度系であるが境界条件が異っている。a は両端を固定した 2 自由度系, b は Fig. 20 の J. Ford の系である。どちらも相当高いエネルギーを与えても Hénon-Heiles 系の様に Stochastic region を持つことがなかった。Ford らは計算機を使って多数の不動点を求め, その点の剰余 R の値を調べた所, すべて 0 であった。これは可積分系であることを示唆するものであり, これが契機

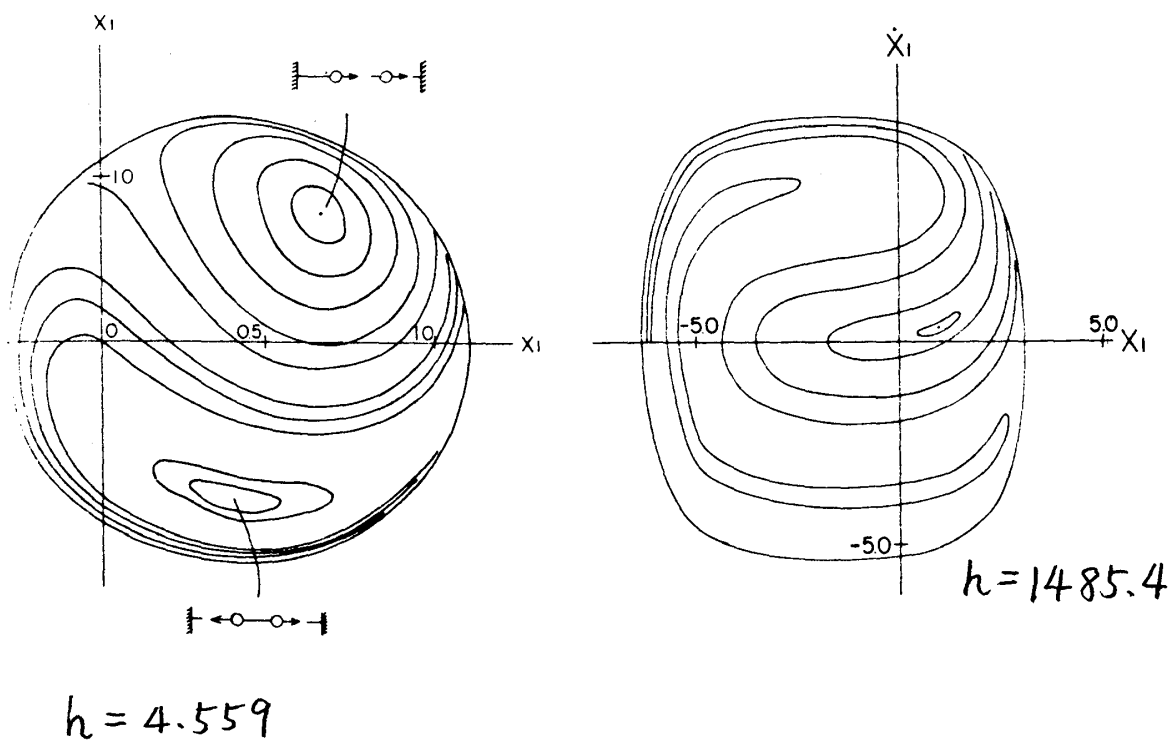


Fig. 24 a

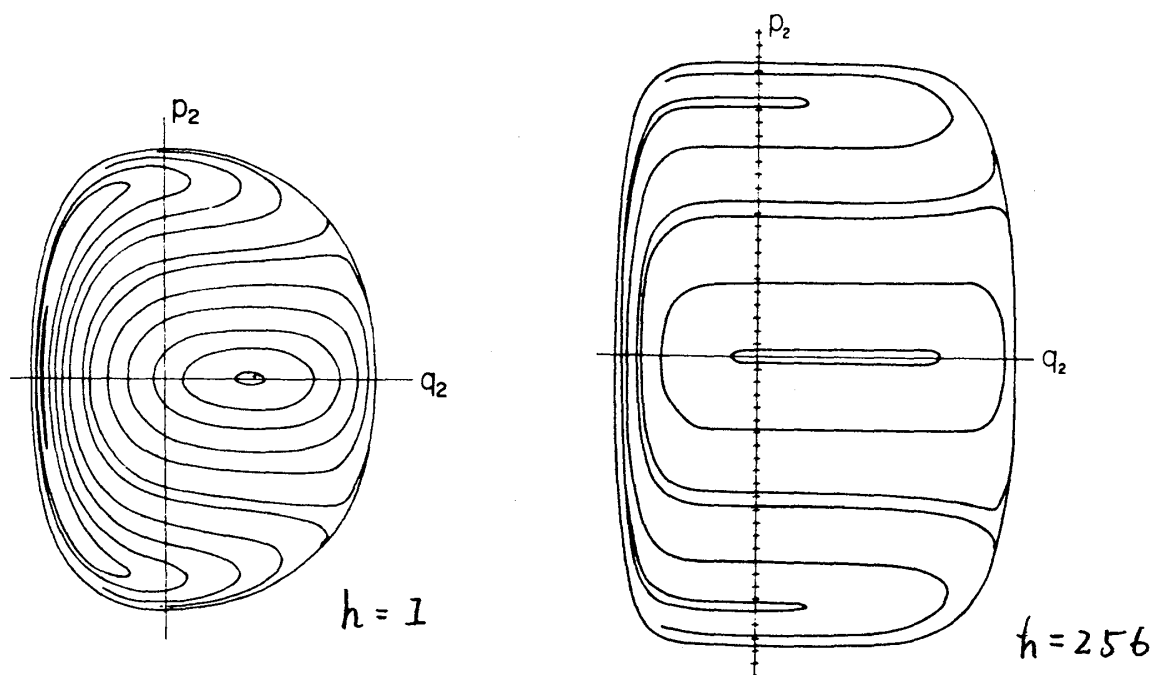


Fig. 24 b

となって、後に Hénon 自身、又 Flaschka によって  $n$  自由度系に対し  $n$  個の積分が求められるに至った。

#### 5) 土星の環の間隙と KAM理論

最後の節で KAM 理論で説明できる興味深い話題を紹介しておこう。何故土星だけに環が存在する理由は不明であるが<sup>\*</sup>、それが土星の引力による潮汐力によってその内部にある衛星は破壊されてしまう有名な Roche limit (土星の中心から 152,300km) の内側にあることから、この限界内に入り込んだ天体の残骸とも考えられる。土星には環以外に、三つの衛星、Enceladus, Mimas, さらに最近発見された Janus (1967) がある。それらの配置は Fig. 25のとおりである。Janus は辛じて Roche limit の外側にある。

---

\* ) 最近 (1977年) 天王星にも環が発見された。この環の成因は土星とは全く異なるものらしい。

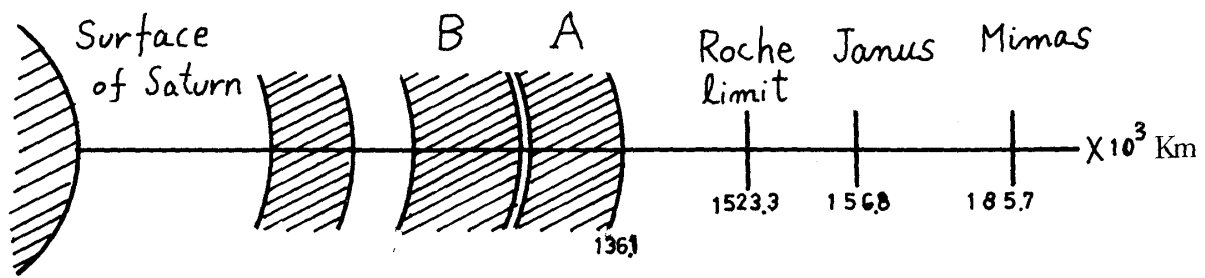


Fig. 25

問題は環に図のごとく、Cassini-divisionを始め間隙があることである。ところで、環を構成している小粒子の一つ一つと、土星、衛星のうちの一つ Mimas は三体問題(制限)と考えることができる。土星をめぐる、小粒子は試粒子とみなせて、この存在が土星はもちろん Mimas の運動に反映することがないと考えてよいからである。また Mimas を、土星の回りを周行する小粒子に対する摂動と見なせる。そうすると KAM 理論から小粒子のうち、その周期が Mimas の周期と有理化の関係になるような位置にあるものは不安定であり、そうでないところでは安定な軌道があつて環をつくることが判る。Mimas の振動数  $\omega$  の有理数倍となる軌道はそれぞれ

$$Q = 2\omega, \quad 116.9 \times 10^3 \text{ km}$$

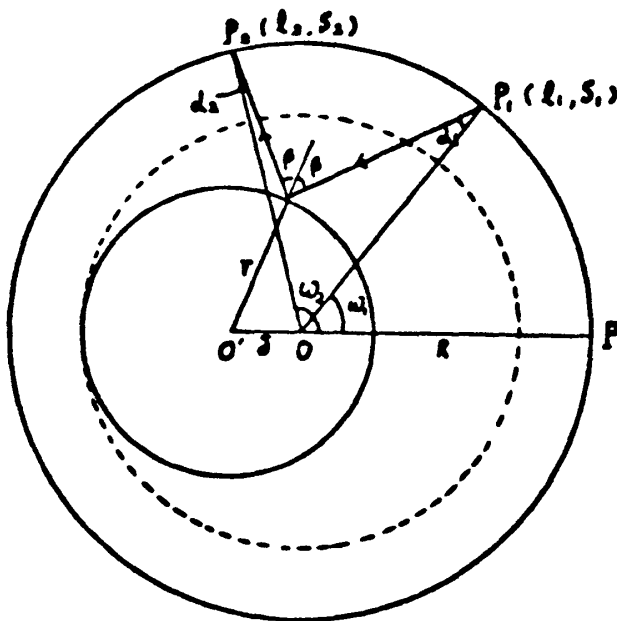
$$Q = 3\omega, \quad 89.2 \times 10^3 \text{ km}$$

$$Q = 3\omega', \quad 114.5 \times 10^3 \text{ km}$$

但し最後  $\omega'$  は衛星 Enceladus の振動数。実際に土星の中心からこの距離ところに、間隙のあることは前図でみたとうりである。 $116.9 \times 10^3 \text{ km}$ ,  $114.5 \times 10^3 \text{ km}$  は Cassini division の内側の ring B の中に入っているが、Franklin によれば環 B をつくる粒子の質量の影響を考えると(土星の質量が少し増したことに相当する) Cassini division の中に入るといふ。同様な現象は、地球の回りの小惑星の運動にも現われるが、やはり KAM 理論によって理解することができる。また、最近では量子力学の問題、原子・分子の振動にも KAM 理論の考え方を適用する動きがある。

撞 球 問 題

1961年 Sinai は二次元トーラスの中で、なめらかな境界をもつ凸領域を有限個抜いた領域の内部を質点が壁面で完全衝突を行うときはこの系はエルゴード性があり、K-系であることを証明した。すると、この条件に合わない系をしらべることは意味があるだろう。ここで考える問題は二つの中心のはずれた円の間を質点が運動をするときの問題である。外側の円は凸形でないから、Sinai の条件にあてはまらない。この領域の中の運動を記述するのに便利な座標は外側の円周上の一点から測った弧の長さと、衝突の入射角を  $\alpha$  の  $\text{sine } s = \sin \alpha$  である。 $l$  は円周の長さで割ってあるとし  $|l| \leq 0.5$ ,  $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$  とする。質点は外側の円に当る度に  $(l_1, s_1), (l_2, s_2), \dots$  の値を与える。 $(l, s)$  平面上での点の動きは1つの写像  $T$  で表わされる。この写像は面積を保存



the coordinate system  $(l, s)$  in the two eccentric circles centered at  $O$  and  $O'$ , where  $s = \sin \alpha$

Fig. 26

する (Birkhoff)。このことは上の簡単な場合には計算で直接証明することが出来るし、もっと美しい証明は Poincaré-Cantani の定理からも与えられている。(Arnold, Aver, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Appendix 31 をみよ)。

外側と内側の円の半径を夫々  $R, r$  とし, 2つの円の中心間の距離を  $\delta$  とする。  $r' = r/R, \delta' = \delta/R$  とおく。  $0$  を中心とし半径  $r + \delta$  の円を画くとこの円に接する軌道の  $\alpha$  を  $\alpha_0 (s_0 = \sin \alpha_0)$  とすると  $s > s_0$  では,  $l$  にかかわらず  $s$  は一定に保たれる。 Fig. 27 は  $\delta' = 1/4, r' = 1/2$  に対する写像である。 ここには4つの領域 A, B, C,

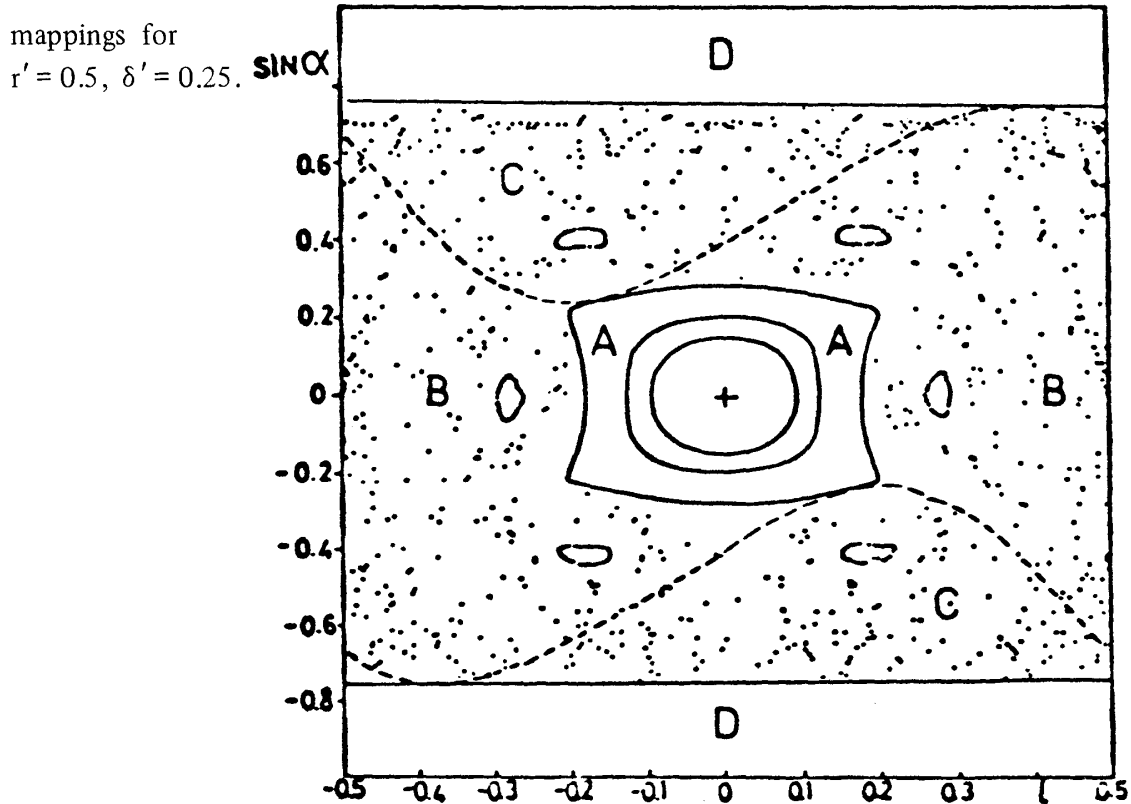


Fig. 27

Dがある。領域Dは上にのべた  $s > s_0$  の領域である。Aでは  $T$  に対する不動点  $(0, 0)$  のまわりに不変曲線がある。この不変曲線は原点の近くでは楕円であるが, 原点からはなれるにつれてひずんで来る。BCの領域の境界は, 内部の円と丁度接するような軌道となる  $(l, s)$  の値で定まる。Aの領域はこの境界に接し, Aでは必ず二つの円と交互に衝突するような  $(l, s)$  の組である。この領域の不変曲線は一つの積分であると思われる。

領域Cでは質点は内側の円にあたらないうで再び外側の円に衝突する。それ故このとき

斎藤信彦

は $\alpha$ は変らない。 $(l, s)$ の図では横軸に平行にすすむことになる。もしその点がCの領域から外れてBの中に入ると、次には内側の円と衝突する。Bの領域の中の写像はAと同様、不変曲線の上を動き、Cに入ると、写像点は平行移動し再びBの領域に入ったときは、前と異なる不変曲線上を動く。こうしてCの領域を通して不変曲線の間を転移する。これが図にあらわれる写像点の乱雑な分布の原因である。

不動点は $(0, 0)$ のほかに $(1/2, 0)$ があるが、この点は不安定である。図にはそのほか6つの安定な不動点があり、そのまわりに島が出来ていることが示されている。

この構造は、Hénon-Heiles系と同様に見えるが全くちがう。Hénon-Heilesの不変曲線はKAM理論のそれであり、連続的に存在するものではない。

衝突によって一つの不変曲線(積分)から他の不変曲線へ転移する例はこのほかにもある。この種の系の乱雑挙動とエルゴード性は、しかしまだ十分しらべられていない。