# 磁気単極子に類似な量子力学的渦線

阪大・工　一　柳　正　和

（1978年12月14日受理）

## § 1. はじめに

通常の流体中の渦線は，その端を流体中に持ち得ない（Kelvin の定理）。一方，液体 He Ⅱ の渦線は，$2\pi\hbar/m$ の整数倍の circulation をもつ（$m$：He 原子の質量）。このことは，液体 He の超流動性が，量子力学的効果に起因することを示す根拠とされることを意味する。

この小論の目的は，量子流体に対しても，Kelvin の定理は，無条件に成立つかどうかを論じ，ある特別な場合には，確かにこの古典的定理からはずれた渦線が存在することを示すことである。我々の手法は，Dirac が磁気単極子を予見するに用いたものと類似のものである。

液体 He Ⅱ の量子効果は，order parameter $\Psi$ の性質によるとされている。$\Psi$ は複素量であって，その一般形は

$$\Psi = \sqrt{\rho_s}\exp[i\varphi] \tag{1}$$

である[1)]。ここに $\rho_s$ は，超流動体密度であって，絶対 0 度では全粒子密度であり，転移温度以上の温度では，消滅する。液体 He Ⅱ の超流動性は，$\Psi$ の位相の long-range coherence[2)] に起因すると説明される。この巨視的な波動函数の波動方程式は，まだ知れていない。Gross[3)] と Pitaevskii[4)] は $\Psi$ を Bose-Einstein 凝縮の状態と同定して，Hartree 近似の波動方程式を提案している。

一方，凝縮密度は，10％以下であることが実験的に明らかになってきた。従って，凝縮体以外の効果を取り込んだ波動方程式を見出すことが，一つの大きな仕事となっている。この小論では，先の著者の提案した手法をもとに，よりすすんだ議論を展開する。

## § 2. Non-integrable phase

先の論文[5)] の核心は，Gross-Pitaevskii 方程式に対する「変分原理」を措定し，凝縮体

以外の効果を，速度場(depletion velocity field)でとり込むことであった。すなわち，次の作用函数の存在を仮定した：

$$\mathscr{L}=-\frac{i\kappa}{2}(\partial_t\Psi^*\cdot\Psi-\mathrm{c.c})-\frac{1}{2m}|\nabla\Psi|^2-\mu|\Psi|^2+\frac{g}{2}|\Psi|^4, \tag{2}$$

$$\nabla=\kappa\frac{\partial}{\partial x}-imA(x,t),\quad(A\ ;\ \text{non-integrable}). \tag{3}$$

但し，$\mu$は系の化学ポテンシャル，$g$は相互作用の強さである。

量$A(x,t)$は，depletion velocity fieldである。この速度場を導入した理由は，一つには，渦線の芯の構造を調べることであり，もう一つには，order parameter $\Psi$の作り出す運動エネルギー（あるいは，相関エネルギーの方がよい）を，渦線の遠方で打消す為である。後者は，また，流れのある超流体の状態は，準平衡状態にあることを示す上で大切な点である。先の論文[5]では，この機構を，場の理論との類似から，Higgsの機構とよんだ（注）。

このモデルでは，circulation $\Gamma$は，

$$\Gamma=\oint A(x,t)\,ds\qquad(ds\ ;\ \text{線素}) \tag{4}$$

と定義することになる。circulationの量子化は，従って，Higgs機構を通じて発生する，局所的ゲージの不変性の結果として説明されるのであった。我々の考えでは，order-parameter の位相のlong-range coherenceは，Higgs機構の根拠となる速度場と$\Psi$との強い相互作用の結果であるということになる。読者は，超電導の場は，秩序度の位相をコントロールするのは，磁束であったことを思いおこしていただきたい。§1で，$\Psi$の位相に局所的に勾配が生ずるとき，超流動の流れの状態が必然的に実現されるといったが，位相の勾配は，Higgsの機構を通じて，コントロールされるというのが，我々の考え方である。

## §3. 環帯での超流体の永久流動

環帯での超流動He II の振舞は，超電導体の場合に類似する側面を示す。環帯での非

（注） 超電導現象でのMeissner効果に類似の機構であることはすぐ知れる。

回転的流動は，超電導体環の場合と全く同様の仕組みで量子化された流れである。多重連結系なら，超流体の流れの境界に作り出すcirculationは，$2\pi\hbar/m$ の単位で量子化されている。この節では，二重連結系のcirculationの量子化を，少しことなる視点から論ずる。

1図に示した環帯での流れを考える。今，内側の境界で，$\Gamma_{\mathrm{I}}$ なるcirculationが実現されているとする。これを，case I とよぶ。この場合の order-parameter を $\Psi_{\mathrm{I}}$ と書くことにする。次に，内側の境界のcirculationが $\Gamma_{\mathrm{II}}$ になった場合 [case II] を想定し，そのときの order-parameter を $\Psi_{\mathrm{II}}$ と書く。我々は，次の様な性質を示すgauge変換を見出したいのである；

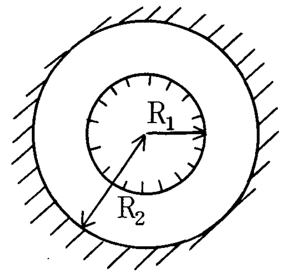

図 1.

$$\Psi_{\mathrm{II}} = \Psi_{\mathrm{I}} \ \exp(\ i\alpha\ ), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} - \frac{\hbar}{m}\frac{\partial\alpha}{\partial x} \ . \tag{6}$$

但し，$\alpha$は，空間座標のみの函数である。このとき，位相$\alpha$は，単価函数であるが，その値は，内側の環帯を一周するごとに

$$\triangle\alpha = \oint [\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\ ]\, d\boldsymbol{s} = \frac{m}{\hbar}(\ \Gamma_{\mathrm{II}} - \Gamma_{\mathrm{I}}\ ) \tag{7}$$

だけ変化することが知れる。しかしながら，もし

$$\Gamma_{\mathrm{II}} - \Gamma_{\mathrm{I}} = (\ 2\pi\hbar/m\ ) \times 整数 \tag{8}$$

を満たすならば，位相$\alpha$の変化$\triangle\alpha$は，$2\pi$の整数倍となり，$\alpha$が単価であるにもかかわらず，位相因子 $\exp(\ i\alpha\ )$は一価函数となり得るのである。

このことは，case I と case II とは，互に，gauge変換可能であることを示しており，二つの場合の超流体の超流動状態は区別できないことを意味するのである。

次の二点について，注意しておきたい。第1に，ここでの議論は，環帯にある超流体が，vortex（渦線でも渦輪でもよろしい）を含む場合でも，このまま成り立つことである。この様な場合には，速度場$\boldsymbol{A}(\ x,\ t\ )$が，そのことを表現してくれるであろう。第2には，理論が，gaugeを対象として構成されたものであるが故に，$(\ \hbar/m\ )$ grad $\alpha$ は，測定可

能な粒子速度であるが必要がなくなっている点である。従ってここでの位相$\alpha$は，order-parameter の位相とは係りをもたない実体を表わしている。

この節の結論は，次の様に整理できる。環帯領域での液体He II の永久流は，非可積分な速度場とorder-parameter の gauge 不変性の発現である。この結論自体は，何も新しい結果を予言するものではないが， gauge 変換を決める位相$\alpha$の増分$\triangle\alpha$は，一部分は，体系の表現のちがいにもよるが，考察している体系自体のダイナミックスによって決まる点は注目すべきことである。上の考察によれば，内側の環の境界に存在するcirculationは，速度場に直接作用し，その形態を決める。その結果，$\boldsymbol{A}(x, t)$と$\Psi$との強い相互作用の発現(注) として， Higgsの機構が働き，環帯の超流動状態が決まることになる。非可積分な速度場$\boldsymbol{A}(x, t)$の存在の必要性は，この様に強調されるのである。 order-parameterの位相は， Higgsの機構を介して内側の境界に現れたcirculationによって，コントロールされるのである。

［毛管での超流動現象を環帯領域での超流動現象と同定する考え方があるが，我々の立場から見ると，その様な同定は根拠をもたないもののように思える。毛管での超流動現象については，文献(2)を参照されたい。］

## § 4.　$2\pi\hbar/m$ の半分の単位をもつ渦動

今までに行ってきた議論は，一つの説明としてしか意味がないように見えるかも知れない。我々の提案する変分原理と非可積分な速度場に係わる機構が，正当化される為には，明らかに新しい現象の解明の可能性を示さなくてはならない。この節では，その事をこころみるのである。

§ 3 で導入した非可積分な速度場は，電磁場のベクトル・ポテンシャルと類似のものであることはすぐ気づくところである。 Dirac[6]の磁気単極子の理論が， 我々の考え方の手本となる。以下では，Dirac の monopole に対応する実体の超流動He II での存在の可能性を論ずる。

まず，我々の理論では，渦線のcirculationは，速度場$\boldsymbol{A}$で定義され，渦線の中心では，

（注）この相互作用が「強い」という意味は，渦線の芯の方向に沿った局所的gaugeの不変性が十分保証されていることである。Bose-Einstein 凝縮は自発的 gauge 対称性の破れであり，Goldstoneモードが渦線芯の方向にかたよって存在するのである。

order-parameter $\Psi$は消滅している。渦線の中心では$\Psi$はsingularなのである。古典的流体では，Kelvinの定理が，渦線の形態を完全に説明する。すなわち，古典的渦線は，液体の内部でその端（一方，もしくは両端）をもつことは不可能である。量子化された渦線に対しても，この定理はあてはまるものであろうか。このことを調べるには，まず第一に，我々のモデルでは，vorticity $\xi$は，速度場$\boldsymbol{A}$で定義され，微視的な芯の半径内でだけ，ゼロでない値をもつことに注意する必要がある。完全な理論を作るには，速度場$\boldsymbol{A}$のもつ，場のエネルギーを決定する作用函数を定めなければならない。今までのところ，この作用函数を定めることは，（まだ不十分であるが，一つの可能な形として，先の論文で予想したものしかない）一つの課題である。しかしながら，我々の目的にとっては，速度場$\boldsymbol{A}$は連続の方程式に現れた速度とは異なることを認めるだけで十分である(注)なぜなら，このことを認めさえすれば，vorticity $\xi$に対するKelvinの定理の必要条件がみたされなくなるからである。

この最後の結論は，量子力学的渦線は，その端（一方でも両方でも可）を超流動体の内部にもち得ることを示す。量子力学的渦線は，order-parameter $\Psi$のsingular lineになっているが，このsingular line自体は，超流動体内部に端をもち得るのである。端のある渦線の可能性をここに見るのである。前の節で，境界に存在するcirculationが，$\Psi$の位相をコントロールするといった。このことは今の場合，vorticity $\xi$によって$\Psi$の位相がコントロールされるという表現にかわる。従って，我々の主題は，超流動体内部に端をもつ渦線があるとすれば，それはどんなものかを解析する事である。

我々の行う解析は，Diracの手法と全く同一のものなので，詳細は，Diracの論文をみていただくことにする。Diracの理論での波動函数のnodal lineが，我々の場合の渦線に対応しており，磁束が我々の系のcirculationに対応することは自明である。今，体系の内部で閉じた曲線とその上にはった膜面を考える。この場合，渦線の数が問題となるが，§3のgaugeの扱いによる結果から，$\Psi$の位相に見られる変化は，閉曲線を一周する毎に

$$2\pi n+(m/\hbar)\int rot\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{9}$$

（注）Kelvinの定理は，vorticity $\xi$の定義と連続の方程式だけで証明される。すなわち，単位質量当りのvorticity，$\xi/\rho$，（$\rho$；全質量密度）の時間変化は，純粋にkinematicalにもとまるのである。
［Lamb. Hydrodynamics, p. 203 を見よ］

である。但し，$n$ は上で定義した膜面を貫通する渦線の数（符号をもつ）である。$d\boldsymbol{S}$ は面素である。

(9)式をある任意の閉曲面に適用すると，全変量（位相の）は消えなくてはならない。従って，一本の渦線が，二度相対する点で閉曲面を貫通するときは，$\Psi$ の位相は，変化し得ないことが知れる。しかし，渦線の一方の端が閉曲面の内部にあるときは，異なった結果を得る。今，仮にこの様な端の点が一個だけ閉曲面の内部にあったとすると，(9)式より

$$\oint rot\,\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{S} = 2\pi\hbar/m\,. \tag{10}$$

を得る。ここで，電磁気学との類似によって，次の結果を得る：(10)式より

$$2\kappa = 2\pi\hbar/m\,, \tag{11}$$

$$rot\,\boldsymbol{A} = \frac{\kappa}{2\pi}\,\frac{\boldsymbol{x}}{x^2}\,. \tag{12}$$

すなわち，超流動体の内部でその端（一方でも，両方でも可）をもつ量子力学的渦線は，$1/2\times(2\pi\hbar/m)$ の強さで量子化される。

この様な単極子に類似の渦線の具体的形態を決めることは，のこされた問題である。$\Psi$ の波動方程式は，Diracの場合と異なり，非線型であるので解析的な解が求まる見こみは少ない。また，新型の渦線を認知する実験はどうなるのだろうか。読者諸氏の御批評を希望するものです。

## 参 考 文 献


1) O. Penrose, Phil. Mag. **42** ('51) 1373
2) T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. **31** ('64) 313
3) E. Gross, Nuovo Cim. **20** ('61) 454
4) L. P. Pitaevskii, JETP **13** ('61) 451
5) M. Ichiyanagi, J. Phys. Soc. Japan **43** ('77) 1125
6) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A133** ('31) 60