臨界振幅比 $R_{\chi}$ の1/n展開による $O(1/n^2)$ の計算

奥通敬

# §1. 序

準安定状態を伴わない第二種相転移においては、転移温度*T*。近傍で長波長ゆらぎが増 大し、相関距離 $\xi \rightarrow \infty$ の結果、一般に比熱、帯磁率(圧縮率)などに発散が観測され、*T*<sub>c</sub>近 くの系の振舞いを記述する臨界指数、臨界振幅比, scaling 関数などは、系の詳細によら ず(従って micro な量子効果も現れず)、系の空間次元 d、 order parameter の数 n、相互 作用 range(短距離、長距離、双極子 etc.)、系の対称性(等方、異方、etc.)、のみに より定まる。これが臨界現象におけるUNIVERSALITYの概念である。又、関数論的には *T*<sub>c</sub> は free energy の二次導関数の特異点である。これらの諸量の研究には、厳密解の求ま る場合が現状では極めて少数の model に限られているため、平均場近似や  $\epsilon$ , 1/*n*, 高 (低)温などの摂動展開が使われる。本研究では n-vector modelを用い阿部により開始さ れた<sup>1)</sup> 阿部・氷上の 1/*n* 展開理論<sup>2)</sup>をO( $1/n^2$ ) に拡張した状態方程式<sup>3)</sup>を使って、臨界 振幅比 *R*<sub>x</sub> (Critical Amplitude Ratio) を三次元等方短距離系につきO( $1/n^2$ )まで計算し、 他の理論や実験と比較した<sup>4)</sup> その結果O(1/n)の計算では任意の spin 次元*n*に対し*R*<sub>x</sub><1 であったが<sup>2)</sup>  $\epsilon$ 展開<sup>5)</sup> 級数展開<sup>5)</sup>及び EuO, Ni などの実験はいずれも*R*<sub>x</sub> > 1であり<sup>5)</sup> 1/*n* 展開でもO( $1/n^2$ )まで進めると数値が改善されることが分る。

§ 2.  $R_{\gamma} OO(1/n^2)$ までの一般的表式

状態方程式<sup>3)</sup>によると、本質的に温度の逆数であるKは、逆帯磁率rと磁化Mの関数 K(r, M)である。 $T = T_c$ でr = 0, M = 0だから $T_c$ からの温度のずれを

 $t = K_{c} - K = K(0, 0) - K(r, M)$ (2.1)

とし

$$T > T_{c} \ \mathcal{C} \ k \sharp \ r^{-1} = \Gamma t^{-r}, \ M = 0 \qquad \& \ \vartheta \ K (0, 0) - K (r, 0) = (\Gamma r)^{1/r} \qquad (2.2)$$
$$T < T_{c} \ \mathcal{C} \ k \sharp \ r = 0, \ M = B (-t)^{\beta} \& \ \vartheta \ K (0, M) - K (0, 0) = (M/B)^{1/\beta} \qquad (2.3)$$

 $T = T_c \text{ cit } t = 0, \ H = DM^{\delta} = rM \text{ L} \ 9 K(0, 0) - K(r, M) = 0 \qquad (2.4)$ ここで  $\beta$ , r,  $\delta$  は臨界指数, B,  $\Gamma$ , D は臨界振幅, H は外部磁場であ 9, (2.4) が  $T_c$ 

### 奥 通敬

における $r \ge M$ の関係を与える。又 $R_r$ は、次式で定義される。

$$R_{\chi} = \Gamma DB^{\delta^{-1}}$$
(2.5)  
(2.2)~(2.4)及びscaling則 $r = \beta(\delta - 1)$ により(2.5)は条件(2.4)のもとに  
$$R_{\chi} = [\overline{K}(r, M)/\overline{K}(0, M)]^{r}$$
(2.6)

となる。但し便宜上 $\overline{F}(r, M) = [F(r, M) - F(r, 0)]/M^2$ ,  $\widetilde{F}(r, M) = \overline{F}(r, M) - \overline{F}(0, M)$ の記法を用いる。

(2.6)に状態方程式の $O(1/n^2)$ までの結果<sup>3)</sup>

$$K(r, M) = \frac{1}{N} \sum_{q} g(q, r) + M^{2} + \frac{1}{n} K_{1}(r, M) + \frac{1}{n^{2}} K_{2}(r, M) + O(1/n^{3})$$
(2.7)

で代入し、(2.4)により $M^2$ をO(1/n)まで展開した

$$M_{0}^{2} = M_{0}^{2} + \frac{1}{n} [K_{1}(0,0) - K_{1}(r,M_{0})] + O(1/n^{2})$$
(2.8)

$$M_0^2 = M_0^2(r) = \frac{1}{N} \sum_{q} \left[ g(q, 0) - g(q, r) \right] \quad (g(q, r): \text{ propagator}) \quad (2.9)$$

を用いて、 $R_{\chi}$ の最終的な表式が得られる。

$$R_{\chi}^{1/r} = \lim_{r \to 0} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \widetilde{K}_{1}(r, M_{0}) + \frac{1}{n^{2}} \left[ \widetilde{K}_{2}(r, M_{0}) + \widetilde{K}_{1}(r, M_{0}) \frac{K_{1}(r, M_{0}) - K_{1}(0, M_{0})}{M_{0}^{2}} \right] - \frac{1}{n^{2}} \frac{K_{1}(r, M_{0}) - K_{1}(0, 0)}{M_{0}^{2}} \frac{\partial}{\partial M_{0}^{2}} \left[ K_{1}(r, M_{0}) - K_{1}(0, M_{0}) \right] + O(1/n^{3})$$

$$(2.10)$$

§ 3.  $R_{\chi}(d=3)の計算$ 

三次元短距離系では(2.9)より $M_0^2 = \sqrt{r}/4$ であり、 $\vec{q} \ge \sqrt{r q} \ge \text{scale} \ \text{LT}(2.10) \ \text{oK}_1$ が関係する部分を求めると

$$R_{\chi}^{1/r} = 1 + \frac{1}{n} g_1 + \frac{1}{n^2} g_4 (g_1 - g_2 - g_3) + \frac{1}{n^2} (3 g_1 - g_2 - g_3) L + \frac{1}{n^2} \lim_{r \to 0} \widetilde{K}_2 (r, M_0) + O(1/n^3)$$
(3.1)

但し $g_1 \sim g_4$ は数値積分で $g_1 = -0.956$ ,  $g_2 = 0.190$ ,  $g_3 = -0.862$ ,  $g_4 = -0.634$ であ

り, 
$$L \mathrel{\rm th} L = \frac{1}{\pi^2} \lim_{r \to 0} \ln \frac{\pi \Lambda}{4\sqrt{r}} (\Lambda: \text{ upper-cutoff of momentum}) の対数発散項を示す。$$

臨界振幅比 $R_{\chi}$ の1/n展開による $O(1/n^2)$ の計算

(3.1)に残った $\widetilde{K}_2$ 中の $K_a \sim K_{d2}$ の各項の発散を高々対数発散に押えるため $\beta^{6}$ や $r^{7}$ に類似の関数 $B(r, M_0)$ を加減した後、数値積分を実行すると、

$$\lim_{r \to 0} \widetilde{K}_{2}(r, M_{0}) = [2.81 \pm 0.03] + (-3g_{1} + g_{2} + g_{3}) L$$

$$(3.2)$$

$$\geq t_{3} \leq (3.1), (3.2) \neq 0$$

$$R_{\chi}^{1/r} = 1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3)$$
(3.3)

(3.3)のrとして1/n展開の結果<sup>1)</sup>を使うと、次の結果が導かれる。

$$R_{\chi_a} = \left[1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3)\right]^{2-24/n\pi^2}$$
(3.4 a)

$$\approx R_{\chi_{b}} = \exp\left[-\frac{1.912}{n} + \frac{7.40}{n^{2}} + O(1/n^{3})\right]$$
 (3.4b)

$$\simeq R_{\chi_{c}} = 1 - \frac{1.912}{n} + \frac{9.22}{n^{2}} + O(1/n^{3})$$
 (3.4 c)

### §4. 結 論

Ref.5)にならい、(3.4a)~(3.4c)の近似過程に由来する不確かさを考慮に入れ、  $R_x$ のより信頼できる値として、それらの平均値をとる。しかし、その場合でも1/nと1/n<sup>2</sup> の係数が comparableなため、及び1/n展開の r の値が n = 1, 2では1以下になるため<sup>1)</sup> n = 1, 2の結果は満足すべきものではない。だがn = 3程度だと、信頼度も増し、他の 方法と比較し得る結果が得られる。下に結果をまとめておく。

n	$R_{\chi_{a}}$	R <sub>xb</sub>	$R_{\chi_{c}}$	$R_{\chi}$ (average)	$R_{\chi_{\rm S}}$		$R_{\chi} (n=3)$
3	1.02	1.20	1.39	$1.20\pm0.15$	1.02	1/n	$1.20 \pm 0.15$
4	0.91	0.98	1.10	$1.00\pm0.08$		ε	$1.33 \pm 0.01$
10	0.89	0.89	0.90	$0.89\pm0.005$		series	1.23
2			2.35		1.37	EuO, Ni	1.6 ( 1.4 ~ 1.7 )

 $R_{\chi_s}$ は(3.3)のrとして級数展開の値r=1.38(n=3), 1.32(n=2)を用いたもの。 EuO, Niは、かなり理想的な三次元 Heisenberg model であるが、双極子相互作用も入っ ているため、実験材料としてはHeusler 合金の方が適当であると考えられる<sup>8)</sup> 奥 通敬

#### 参考文献

1) R. Abe, Prog. Theor. Phys. 49 (1973), 113.

2) R. Abe and S. Hikami, Prog. Theor. Phys. 57 (1977), 1197.

3) Y. Okabe, M. Oku and R. Abe, Prog. Theor. Phys. 59 (1978), 1825.

4) M. Oku and Y. Okabe, Prog. Theor. Phys. 61 (1979), No. 2.

5) A. Aharony and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. B13 (1976), 3081.

6) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. 60 (1978), 1277.

7) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. 60 (1978), 1287.

8) R. M. Suter and C. Hohenemser, Phys. Rev. Letters 41 (1978), 705.

# 不純物効果の1/n展開

出浦一夫

近年,臨界現象に於ける不純物効果の問題が,注目されるようになった。ここでは、 不純物効果の問題として, Weakly Random spin system の1/n展開について述べる。

取り扱うモデルは、ハミルトニアンが、 $-\beta \mathcal{X} = \frac{1}{2} \sum K_{ij} (1-aP_i) (1-aP_j) \sigma_i(m)$  $\sigma_j(m) + h \sum (1-aP_i) \sigma_i(m)$ で与えられる古典的 n-vector model とし、その quenched case を考える。( $P_i$ : random parameter,  $\overline{P_i} = P$ , a: small parameter)このハミルトニ アンにより、通常の1/n展開の方法を実行する。ここで、 $n \to \infty$ ,  $O(a^2)$ までの状態方 程式はすでに求められていて<sup>1)2)</sup>その結果、ランダムネスは、臨界指数に寄与しないこと がわかっている。そこで、 $n \to \infty$ 、 $O(a^3)$ ,  $O(1/n, a^2)$ までの指数を計算してみた。結 果は、 $n \to \infty$ ,  $O(a^3)$ の場合と同様に臨界指数へのランダムネスの寄与はない。まず、  $n \to \infty$ ,  $O(a^3)$ あるいは、 $O(1/n, a^2)$ までの状態方程式および相関関数を求める。  $n \to \infty$ ,  $O(a^3)$ では、

状態方程式

K=(pureな時の項)-K<sup>2</sup>a<sub>2</sub> 1/N 
$$\sum \frac{J_M(q)}{\nu_M^2(q)} - K^3 a_3 \{K_1 + K_2\}$$