臨界振幅比R_χの$1/n$展開によるO($1/n^2$)の計算

奥 通 敬

§ 1. 序

準安定状態を伴わない第二種相転移においては，転移温度T_c近傍で長波長ゆらぎが増大し，相関距離$\xi\to\infty$の結果，一般に比熱，帯磁率(圧縮率)などに発散が観測され，T_c近くの系の振舞いを記述する臨界指数，臨界振幅比，scaling 関数などは，系の詳細によらず(従って micro な量子効果も現れず)，系の空間次元 d，order parameterの数n，相互作用range(短距離，長距離，双極子etc.)，系の対称性(等方，異方，etc.)，のみにより定まる。これが臨界現象におけるUNIVERSALITYの概念である。又，関数論的にはT_cは free energy の二次導関数の特異点である。これらの諸量の研究には，厳密解の求まる場合が現状では極めて少数のmodel に限られているため，平均場近似やϵ，$1/n$，高(低)温などの摂動展開が使われる。本研究ではn-vector modelを用い阿部により開始された[1] 阿部・氷上の$1/n$展開理論[2]をO($1/n^2$)に拡張した状態方程式[3]を使って，臨界振幅比R_χ (Critical Amplitude Ratio) を三次元等方短距離系につきO($1/n^2$)まで計算し，他の理論や実験と比較した。[4] その結果O($1/n$)の計算では任意のspin次元nに対し$R_\chi<1$であったが，[2] ϵ展開，[5] 級数展開[5]及び EuO, Ni などの実験はいずれも$R_\chi>1$であり，[5] $1/n$展開でもO($1/n^2$)まで進めると数値が改善されることが分る。

§ 2. R_χのO($1/n^2$)までの一般的表式

状態方程式[3]によると，本質的に温度の逆数であるKは，逆帯磁率rと磁化Mの関数$K(r,M)$である。$T=T_c$で$r=0$，$M=0$だからT_cからの温度のずれを

$$t=K_c-K=K(0,0)-K(r,M) \tag{2.1}$$

とし

$$T>T_c \text{ では } r^{-1}=\Gamma t^{-\gamma},\ M=0 \text{ より } K(0,0)-K(r,0)=(\Gamma r)^{1/\gamma} \tag{2.2}$$

$$T<T_c \text{ では } r=0,\ M=B(-t)^{\beta} \text{ より } K(0,M)-K(0,0)=(M/B)^{1/\beta} \tag{2.3}$$

$$T=T_c \text{ では } t=0,\ H=DM^{\delta}=rM \text{ より } K(0,0)-K(r,M)=0 \tag{2.4}$$

ここでβ，γ，δは臨界指数，B，Γ，Dは臨界振幅，Hは外部磁場であり，(2.4)がT_c

における r と M の関係を与える。又 R_χ は，次式で定義される。

$$R_\chi = \Gamma D B^{\delta-1} \tag{2.5}$$

（2.2）～（2.4）及びscaling則 $\gamma=\beta(\delta-1)$ により（2.5）は条件（2.4）のもとに

$$R_\chi = [\overline{K}(r, M)/\overline{K}(0, M)]^{\gamma} \tag{2.6}$$

となる。但し便宜上 $\overline{F}(r, M)=[F(r, M)-F(r, 0)]/M^2$, $\widetilde{F}(r, M)=\overline{F}(r, M)-\overline{F}(0, M)$ の記法を用いる。

（2.6）に状態方程式の $O(1/n^2)$ までの結果[3]

$$K(r, M)=\frac{1}{N}\sum_q g(q, r)+M^2+\frac{1}{n}K_1(r, M)+\frac{1}{n^2}K_2(r, M)+O(1/n^3) \tag{2.7}$$

で代入し，（2.4）により M^2 を $O(1/n)$ まで展開した

$$M^2=M_0^2+\frac{1}{n}[K_1(0, 0)-K_1(r, M_0)]+O(1/n^2) \tag{2.8}$$

$$M_0^2=M_0^2(r)=\frac{1}{N}\sum_q[g(q, 0)-g(q, r)] \quad (g(q, r):\text{propagator}) \tag{2.9}$$

を用いて，R_χ の最終的な表式が得られる。

$$R_\chi^{1/\gamma}=\lim_{r\to 0}\Big\{1+\frac{1}{n}\widetilde{K}_1(r, M_0)+\frac{1}{n^2}\Big[\widetilde{K}_2(r, M_0)+\widetilde{K}_1(r, M_0)\frac{K_1(r, M_0)-K_1(0, M_0)}{M_0^2}\Big]$$
$$-\frac{1}{n^2}\frac{K_1(r, M_0)-K_1(0, 0)}{M_0^2}\frac{\partial}{\partial M_0^2}[K_1(r, M_0)-K_1(0, M_0)]\Big\}+O(1/n^3) \tag{2.10}$$

§3.　R_χ（$d=3$）の計算

三次元短距離系では（2.9）より $M_0^2=\sqrt{r}/4$ であり，$\vec{q}$ を $\sqrt{r}\vec{q}$ とscaleして（2.10）の K_1 が関係する部分を求めると

$$R_\chi^{1/\gamma}=1+\frac{1}{n}g_1+\frac{1}{n^2}g_4(g_1-g_2-g_3)+\frac{1}{n^2}(3g_1-g_2-g_3)L+\frac{1}{n^2}\lim_{r\to 0}\widetilde{K}_2(r, M_0)$$
$$+O(1/n^3) \tag{3.1}$$

但し g_1～g_4 は数値積分で $g_1=-0.956$,[2] $g_2=0.190$，$g_3=-0.862$，$g_4=-0.634$ であり，L は $L=\frac{1}{\pi^2}\lim_{r\to 0}\ln\frac{\pi\Lambda}{4\sqrt{r}}$（$\Lambda$：upper-cutoff of momentum）の対数発散項を示す。

(3.1)に残った$\widetilde{K}_2$中の$K_a \sim K_{d2}$の各項の発散を高々対数発散に押えるためβ[6]やγ[7]に類似の関数$B(\gamma, M_0)$を加減した後，数値積分を実行すると，

$$\lim_{\gamma\to 0} \widetilde{K}_2(\gamma, M_0) = [2.81 \pm 0.03] + (-3g_1 + g_2 + g_3)L \qquad (3.2)$$

となる。(3.1)，(3.2)より

$$R_\chi^{1/\gamma} = 1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3) \qquad (3.3)$$

(3.3)のγとして$1/n$展開の結果[1]を使うと，次の結果が導かれる。

$$R_{\chi_a} = [1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3)]^{2-24/n\pi^2} \qquad (3.4a)$$

$$\simeq R_{\chi_b} = \exp[-\frac{1.912}{n} + \frac{7.40}{n^2} + O(1/n^3)] \qquad (3.4b)$$

$$\simeq R_{\chi_c} = 1 - \frac{1.912}{n} + \frac{9.22}{n^2} + O(1/n^3) \qquad (3.4c)$$

§4. 結　論

Ref.5)にならい，(3.4a)～(3.4c)の近似過程に由来する不確かさを考慮に入れ，R_χのより信頼できる値として，それらの平均値をとる。しかし，その場合でも$1/n$と$1/n^2$の係数がcomparableなため，及び$1/n$展開のγの値が$n=1, 2$では1以下になるため[1] $n=1, 2$の結果は満足すべきものではない。だが$n=3$程度だと，信頼度も増し，他の方法と比較し得る結果が得られる。下に結果をまとめておく。

n	R_{χ_a}	R_{χ_b}	R_{χ_c}	R_χ (average)	R_{χ_s}		R_χ $(n=3)$
3	1.02	1.20	1.39	1.20 ± 0.15	1.02	$1/n$	1.20 ± 0.15
4	0.91	0.98	1.10	1.00 ± 0.08	—	ε	1.33 ± 0.01
10	0.89	0.89	0.90	0.89 ± 0.005	—	series	1.23
2	—	—	2.35	—	1.37	EuO, Ni	1.6 (1.4～1.7)

R_{χ_s}は(3.3)のγとして級数展開の値$\gamma=1.38$ $(n=3)$，1.32 $(n=2)$を用いたもの。EuO, Niは，かなり理想的な三次元Heisenberg modelであるが，双極子相互作用も入っているため，実験材料としてはHeusler合金の方が適当であると考えられる。[8]

参 考 文 献

1) R. Abe, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 113.
2) R. Abe and S. Hikami, Prog. Theor. Phys. **57** (1977), 1197.
3) Y. Okabe, M. Oku and R. Abe, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 1825.
4) M. Oku and Y. Okabe, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), No. 2.
5) A. Aharony and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **B13** (1976), 3081.
6) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1277.
7) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1287.
8) R. M. Suter and C. Hohenemser, Phys. Rev. Letters **41** (1978), 705.

不純物効果の $1/n$ 展開

出 浦 一 夫

近年，臨界現象に於ける不純物効果の問題が，注目されるようになった。ここでは，不純物効果の問題として，Weakly Random spin system の $1/n$ 展開について述べる。

取り扱うモデルは，ハミルトニアンが，$-\beta\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum K_{ij}(1-aP_i)(1-aP_j)\sigma_i(m)\sigma_j(m)+h\sum(1-aP_i)\sigma_i(m)$ で与えられる古典的 n-vector model とし，その quenched case を考える。（P_i：random parameter，$\overline{P_i}=P$，a：small parameter）このハミルトニアンにより，通常の $1/n$ 展開の方法を実行する。ここで，$n\to\infty$，$O(a^2)$ までの状態方程式はすでに求められていて，[1)2)] その結果，ランダムネスは，臨界指数に寄与しないことがわかっている。そこで，$n\to\infty$，$O(a^3)$，$O(1/n, a^2)$ までの指数を計算してみた。結果は，$n\to\infty$，$O(a^2)$ の場合と同様に臨界指数へのランダムネスの寄与はない。まず，$n\to\infty$，$O(a^3)$ あるいは，$O(1/n, a^2)$ までの状態方程式および相関関数を求める。

$n\to\infty$，$O(a^3)$ では，

状態方程式

$$K=(\text{pureな時の項})-K^2a_2\frac{1}{N}\sum\frac{J_M(q)}{\nu_M^2(q)}-K^3a_3\{K_1+K_2\}$$