超流動状態と局所ゲージ不変性

阪大・工　一 柳 正 和

（1979年7月16日受理）

§1. はじめに

環状の超流動体での永久流 (persistent flow) を，超電導体での磁束量子化の現象との類似で論ずるとき， phase memory が重要な概念となっていることに気付く。一方，超電導体での磁束の量子化は，系の局所ゲージ不変性を一つの根拠としている。従って，上の二種類の超流動現象を平行して扱うとき，電磁場のベクトル・ポテンシャルに相当する実体を，超流動ヘリウムのなかにもち込むこととなる。先の報告[1]では，その実体をdepletion速度場と同定することを提案した。その報告では，depletion速度場の特殊な発現の形態の解明を目的とし，(1) 局所ゲージ不変性と二重連結系での超流動現象の関係と，(2) Dirac単極子に類似の励起が予想されること，の二点を示した。その後，著者は，上述の(2)の一般形として，両端が液体中につかった渦線の存在する可能性に気付いた。この様な渦線は，単極子対に類似のものであり，単極子ー反単極子対に対比されるべき実体である。

この様に，局所ゲージ不変性を仮定するとき，種々の可能な特殊形態を，超流動の一般方程式（Gross-Pitaevskii 方程式）から解析することができる。しかしながら，こうした理論は，仮に予測された実体が実験的にたしかめられ得たとしても不満足なものであろう。現時点では，上述のような実体を観測する手段も不明なので，ことの他，我々の仮定は，不満足に思えるであろう。何故ならば，予言される各々の実体は，各々に固有の構造を有すのであり，超流動現象と，直接的な共通性を示し得ないであろうからである。従って，理論的研究の展開は，一般方程式のうちから，特殊形態をとりだすという方向ではなく，一般方程式（GP方程式）自体のうちに超流動現象の諸契機をさぐるという方向である。

この報告の目的は，こうした諸契機を理論的に解析することである。以下で我々は，多体系が，Galilei対称性を自発的に破っている限り，局所ゲージ場の導入は必然的であることを示す。

§2. Galilei 不変性

Landau の超流動理論は，体系の Galilei 不変性を一つの根拠として作り上げられていることはよく知られている[2]。この理論は，大きな成功を修めているのであるが，Bose 凝縮の現象と無関係であるという点を特徴としており，超流動現象と Bose 凝縮の関係に一つの問題を提起することになった。Landau 理論は，Bose 凝縮を否定しているというのではなく，Bose 凝縮が仮に存在したとしても，この理論は，何ら修正を受けないというのである。一方，非相対論の範囲では，有限密度の多体系は常にGalilei 対称性を自発的に破らざるを得ない[3]。このことは，体系の基底状態 $|0>$ は，特別の Galilei 座標系で定義されざるを得ないことの直接的反映である。従って，我々は，Landau の方法と Galilei 対称性の破れとの関連をまず第一に扱わなくてはならない。

Sen ら[4]は，臨界速度を決める Landau の方法は，純粋に "kinematical" なものであることに注目し，次の様な結論を得ている。Landau の示した準粒子のエネルギー(E)と運動量($\boldsymbol{p}$)に対する Galilei 変換則は，Galilei 変換群の zero-mass 可約表現と同一の性質を示すものであり，従って，Landau 理論の結果は，kinematical な根拠をもつ。さらに彼らは，「局在状態の実現と Galilei 変換群の既約表現とは両立できない」という定理[5]より，Landau の臨界速度の条件は，群表現を可約にすることによる局在状態の発生の条件と同等であることを示した。すなわち，多体系での phonon 型の準粒子は，$E+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ はパラメター) が負の値をとらない限り空間的に局在した状態を実現することがないというのである。この結論は，Bose 粒子系での Bogolon の存在を仮定する限り，Bose 粒子系での超流動の根拠を示している。Landau 理論は，こうした種類の準粒子の集団として液体ヘリウムを描くのである。

次に，Landau model から離れて超流動現象を Bose 粒子 (質量 m) の集合とする model では，Galilei 不変性はどのように発現するかを論ずる。体系のハミルトニアン H は

$$H=\frac{1}{2m}\int d^3x\,\nabla\psi^+\cdot\nabla\psi+\frac{g}{2}\int d^3x\,\psi^+\psi^+\psi\psi \tag{1}$$

とする。g は，粒子間相互作用定数であり，$\psi^+(\boldsymbol{x})$，$\psi(\boldsymbol{x})$ は Bose 粒子の場の演算子である。

多体系での Galilei 変換は，体系の重心座標を生成子とする：

$$G_\alpha = \int_{R>|x|} d^3x \; x_\alpha \psi^+(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x}) \qquad (\alpha = x,\ y,\ z) \tag{2}$$

この生成子は，Hとは可換ではないが，運動方程式を不変にする。G_αに対する次の式は容易に証明できる。

$$<0|[G_\beta, j_\alpha(\boldsymbol{y})]|0> = \delta_{\alpha\beta} <0|\psi^+(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})|0> = \delta_{\alpha\beta}\,\rho \neq 0 \tag{3}$$

ただし

$$j_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2im}[\nabla_\alpha \psi^+ \cdot \psi - \psi^+ \nabla_\alpha \psi] \tag{4}$$

$|0>$ は体系の基底状態である。$\rho \neq 0$は体系の粒子密度（$\times m$）である。

Swieca ［3］が証明したように，（3）式は体系のGalilei対称性の自発的破れの条件式である。すなわち，$\rho \neq 0$ である限り，多体系はこの対称性の破れを必ず示す。この対称性の破れに係わって，Goldstone mode が少なくとも一個現われることになる。我々の考え方では，（Bose 粒子系の場合の）Feynman spectrum がこの mode に対応する。[*] この理由は，次の通りである。（1）式は

$$<0|j_\alpha(\boldsymbol{y})|0> \neq 0 \tag{5}$$

を意味しており，明らかに体系の密度のゆらぎと結びつくmodeの生成が結論されるが，これはFeynman spectrumで表現されるmodeである。次の節で，この点は再度考察されることになるのであろう。(5)式は，Galilei不変でないことはいうまでもないことである。

§3.　局所ゲージ場の必要性

前節で，Galilei変換との関連で，Feynman spectrumの物理的意味について簡単にふれたが，この節では，この集団運動の記述の仕方について述べる。我々は，体系の dynamical な性格に主な興味があるので，Feynman spectrum の集団運動的側面に特に重点を置くのである。この点は，Landau の臨界速度に関する条件式が kinematical な性質によるものであったことと対比して強調しておきたい。

Bogoliubov ［6］は，一般に連続の対称性が自発的に破れた系では，この対称性の破れ

〔*〕 Bose 凝縮を仮定するときは，Bogolonの spectrum と一致する。§5 を参照されたい。

を無限小の外場の効果として扱えることを示している。この考え方に従って，我々は，Galilei 対称性の破れを次の無限小の外場として扱う：

$$H_{\mathrm{ext}} = \int d^4 x j_\alpha(x) \delta u_\alpha(x), \quad x = (\boldsymbol{x},\ t), \tag{6}$$

ここで $\delta v_\alpha(x)$ は無限小の摂動パラメターである。この外場による体系の応答は，次の式で与えられる。

$$<0|j_\alpha(x)|0> = \rho\delta v_\alpha(x) + \frac{1}{\rho}\int d^4 y \Pi_{\alpha\beta}(x-y) <0|j_\beta(y)|0>, \tag{7}$$

ただし，$\Pi_{\alpha\beta}(x-y)$ は current-current 相関函数である。

（7）式は，H_{ext} によって摂動を受けた体系の真空 $|0>$ と test 粒子との間の相互作用が

$$\int \rho^{-1} j_\alpha(x) <0|j_\alpha(x)|0> d^4 x \tag{8}$$

と与えられることを示している。このことはまた，ベクトル場 $A_\alpha(x)$ を

$$\rho^{-1} <0|j_\alpha(x)|0> = A_\alpha(x), \quad (\alpha = x,\ y,\ z) \tag{9}$$

と定義できることを示す。（8）式に（7）式を代入すれば，H_{ext} の表式では短距離力が仮定されているのだが，系と test 粒子との相互作用は相関函数 $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ の性質の反映として長距離秩序を生みだすことを示しているのが知れる。

次の点に注意することはまた肝心なところである。仮に無限小場 $\delta_\alpha \boldsymbol{v}(x)$ が渦なしのときでも，$\Pi_{\alpha\beta}(x)$ が長距離秩序を生みだす限り，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は rotational 運動を記述することになる。この可能性は，明らかに phonon 型の準粒子の存在に関連する[7]。すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ は，体系の "dynamical" な性質の反映として要求されるのである。有限密度の Bose 粒子系は，Galilei 対称性を自発的に破るのでベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ は，破られた対称性をとりもどす実体として有効ハミルトニアンのなかに現れるわけである。従って，Bose 粒子系の有効ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\widetilde{H} = &\frac{1}{2m}\int d^3 x (\nabla^+ + im\boldsymbol{A}(x))\psi^+ \cdot (\nabla - im\boldsymbol{A}(x))\psi \\ &+ \frac{g}{2}\int d^3 x \psi^+ \psi^+ \psi \psi - \frac{m}{2}\int d^3 x A^2(x)\psi^+ \psi,\end{aligned} \tag{10}$$

と書けることがわかる。

このようにして，我々は Galilei 不変性との関連でゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ の必要性を理解することになったが，Bose 凝縮との関係はまだ論じていない。相関函数 $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ にとって支配的な phonon 型の素励起子の存在は，体系の密度のゆらぎと結びつき，液体ヘリウムでの Feynman spectrum の存在は，ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ にとって重要な条件となる。

この節での結論： ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$（速度場）は，自発的に破れた Galilei 変換の不変性を修復する Goldstone mode の場である。従って，ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ は，体系の集団運動を記述する場の一種である。

§4. 局所ゲージ不変性

前節で示した様に，ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ の導入は多体系にとって全く必然的である。体系が量子効果を示すかどうかは，相関函数 $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ の性質に直接反映する。すぐわかるように，もし

$$\int d^4x\Pi_{\alpha\beta}(x)=0 \tag{11}$$

ならば (7)式は，古典的な Galilei の原理を示すことになる。従って，我々は

$$\int d^4x\Pi_{\alpha\beta}(x)\neq 0, \quad (\alpha\neq\beta) \tag{12}$$

をもって，量子液体を特徴づけることができる。(12)式は，超流動成分の密度を ρ_s とするとき，

$$\rho_s\neq 0 \tag{13}$$

を意味している[8]。

一方，体系のハシルトニアン (10)は，明らかに局所ゲージ変換

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi(x)\exp[i\alpha(x)],\\&\psi^+(x)\to\psi^+(x)\exp[-i\alpha(x)],\\&\boldsymbol{A}(x)\to\boldsymbol{A}(x)+\frac{1}{m}\nabla\alpha(x),\end{aligned} \tag{14}$$

のもとで不変である（局所ゲージ不変性）。$\alpha(x)$は，スカラー函数である（$\nabla^2\alpha(x)=0$）。この事実は，先の報告でふれた重要な部分であることはいうまでもない。繰返しを避けるが，結論は次の通りであった[1]。

二重連結系における循環の量子化は，Bose粒子系の局所ゲージ不変性の発現に他ならない。

§5.　Bose凝縮との関係

前二つの節で述べた事柄は，体系のBose凝縮の仮定とは無関係であった。しかし，条件式(12)がBose凝縮の仮定を不要としているかどうかは未解決である。　Baym [8]が示しているように，(12)式は超電導体でのMeissner効果に類似する内容を示しており，この式自体は，凝縮層からのphonon型の素励起の存在によって条件付けられているのである。従って，我々は，体系がBose凝縮しているということと局所ゲージ場の導入とが矛盾せず，互に両立するものであることを示さねばならなくなった。このことは，容易に証明できる。その為には，Bose凝縮はゲージ対称性の自発的破れの現象として表現できることを知れば十分である。よく知られている如く，（定）ゲージ変換の生成子は

$$G' = \alpha \int d^3x \psi^+ \psi \tag{15}$$

である。αは任意の定数とする。この生成子は，Galilei変換の生成子と明らかに可換であり，Bose凝縮とGalilei不変性の破れとは両立できる。

次に，Bose凝縮の役割について考えてみることにする。すでに何度か強調したように体系はGalilei不変性を常に破ることで，我々は，Bose粒子系の記述を複素スカラー場とゲージ場（ベクトル）の相互作用の形式でまとめることになる。[この相互作用の強さが，粒子の質量mと関係するというのは，今一つの仮定である。]　従って，スカラー場とゲージ場との相互作用において，ゲージ対称性が自発的に破れるとどうなるであろうかというのが我々の中心課題である。第一の点は，$\Pi_{\alpha\beta}(x)$の性質が大きく変り，長距離力をスカラー場の間に生みだすことになる。このとき，ゲージ場の方は，体系の秩序度の波動函数の位相の空間的変化を漸近的に打ち消す実体として現れるのである（Meissner効果に類似する現象[9]：Higgsの現象）。　ここで，凝縮層からの素励起（Bogolonである）が，相関函数の性質に支配的に反映していることを今一度強調しておきたい。

この節での結論を要約すれば次の様になる。

［A］　Bose 凝縮の存在しない Bose 粒子系：

Galilei 不変性の破れの必然的結果として，ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ が必要である。場 $\boldsymbol{A}(x)$ は Feynman 型の素励起（密度のゆらぎ）を表現する。

［B］　Bose 凝縮の存在する系：

凝縮体（スカラー場）とゲージ場との相互作用の結果，系は Higgs の現象を示す。Higgs の機構によって，我々は循環の量子化の根拠を知ることになる。

以上のように，Bose 粒子系では，Galilei 不変性の他にゲージ対称性が同時に自発的破れを示し得ることを示したことは，超流動現象での Bose 凝縮の役割を知る上で重要なことである。Bose 凝縮の存在は，相関函数 $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ の dynamical な性質を左右し，ゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ の性質を決定する要因なのである。換言すれば，Bose 凝縮が，水先案内役となって超流動現象をひきおこすのである。この意味で，ゲージ場を depletion 速度場とよぶのである。

Bose 凝縮の仮定なしに，相関函数 $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ の期待される性質が導出できるかどうかは，残された課題の一つである。current の間に長距離秩序が存在して

$$\lim_{q\to 0}\Pi_{\perp}(q,0)\neq\lim_{q\to 0}\Pi_{/\!/}(q,0) \tag{16}$$

となることを示す上で，Bose 凝縮の仮定がどうしても必要であるように思える。

§6.　結　論

この報告の主な目的は，超流動の微視的理論を局所ゲージ不変性の原理のもとで構成することの重要性を念頭に置きながら，一般方程式（GP 方程式である）自体のうちに超流動現象の諸契機を解明することであった。

我々は，Galilei 変換の群論的性質に注目しながら，Landau の現象論は phonon 型の準粒子が存在する限り，多体系は空間的に局在した状態をとれないということと同一の内容をもち，暗に逆空間での局在性（Bose 凝縮）を表現していることを指摘した。次に depletion 速度場は有限密度の多体系での Galilei 不変性を修復する Goldstone の場であることを示した。Bose 粒子系は，Galilei 不変性の他に，ゲージ対称性を自発的に破る可能性があり，この場合には，凝縮層とゲージ場 $\boldsymbol{A}(x)$ との相互作用の結果，Higgs の機構

が働き，体系の循環が量子化される。すなわち，我々の考え方では，素励起に関する（従って熱力学的性質）事柄の説明には，Galilei 不変性の破れのみで十分かも知れないが，循環の量子化という超流動の本質的な部分の理論には，Bose 凝縮の仮定（従って，Higgs の機構）は不可欠である。この結論を得る上で，Goldstone 場である速度場（depletion 速度場）が重要な契機となっていることは，大切な点である。

従来の超流動理論では，gauge 対称性の破れの方のみに重点が置かれていたが，この報告で示したように多体系にとって必然的な Galilei 不変性の破れとそのことに伴う実体（速度場 $\boldsymbol{A}(x)$）が，超流動現象出現の大切な礎石となっていることを最後に強調する。

参 考 文 献

1) 一柳：物性研究 31-(4)（'79）223.
M. Ichiyanagi: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) No. 3.
2) L. Landau: J. Phys. USSR **5** (1941) 71.
R. P. Feynman: Phys. Rev. **94** (1954) 262.
3) J. A. Swieca: Commun. math. Phys. **4** (1967) 1.
4) R. N. Sen and D. Zahavi: Physica **59** (1972) 379.
5) J. Levy-Leblond: J. math. Phys. **4** (1963) 776.
6) N. N. Bogoliubov: Physica **26** S1 (1960).
7) $\Pi_{\alpha\beta}(x)$ については，例えば De Pasquale and E. Tabet: Ann. Phys. **51** (1969) 223. を参照されたい。
8) G. Baym: Mathematical methods in solid state and superfluid theory (1967, Oliver) p. 149.
9) M. Ichiyanagi: J. Phys Soc. Japan **43** (1977) 1125.