超流動 ^{3}He−A相における **d**−texture

東北大学理学部　芦田　正己

（1979年7月7日受理）

Introduction

^{3}Heの超流動状態はP波tripletのCooper pairsで特徴づけられ，A相の order parameterは次式で表わせる。

$$A_{\mu j} = \Psi \frac{1}{\sqrt{2}} d_\mu (\phi_{1j} + \phi_{2j})$$

ここでΨは amplitude, ϕ_1とϕ_2はpairの軌道状態を表わす単位ベクトル，$\boldsymbol{d}$はpairのスピン状態を表わす単位ベクトルである。従ってΨ= const. という条件の下でも$A_{\mu j}$は様々な空間的構造 (texture) を作り得る。ϕ_1，ϕ_2の作るtextureは super current の安定性の問題と関係し，多くの人々によって研究されている。[1)] ここではϕ_1，ϕ_2 = const. として$\boldsymbol{d}$の作る texture について調べる。そのような系は図1のような geometry を持つときに実現される。Ambegaokar, de Gennes, Rainer[2)]によれば$\boldsymbol{\ell} = \phi_1 \times \phi_2$は境界面に垂直になろうとする。$\boldsymbol{\ell}$の変化のスケールは$\xi_d \sim 10^{-3}$cm程度なので系の厚さ$L_z$を$\xi_d$より小さくすれば$\boldsymbol{\ell}$は$z$軸方向に固定される。さらに系内に current が存在しない場合を考えるとϕ_1，ϕ_2 = const. となる。

この系は$\boldsymbol{d}$の変化のスケールξ_dより薄いので$\boldsymbol{d}$はz軸方向には変化しない。従ってこの系は実質的に2次元系である。textureに関係する free energy の主要項は2次の gradient energy なのでスケール変換に対して不変である。このことが実現される texture の性質に大きく影響する。

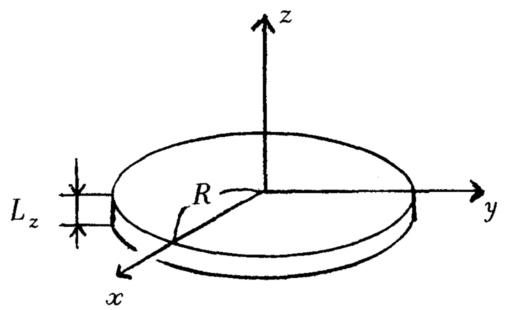
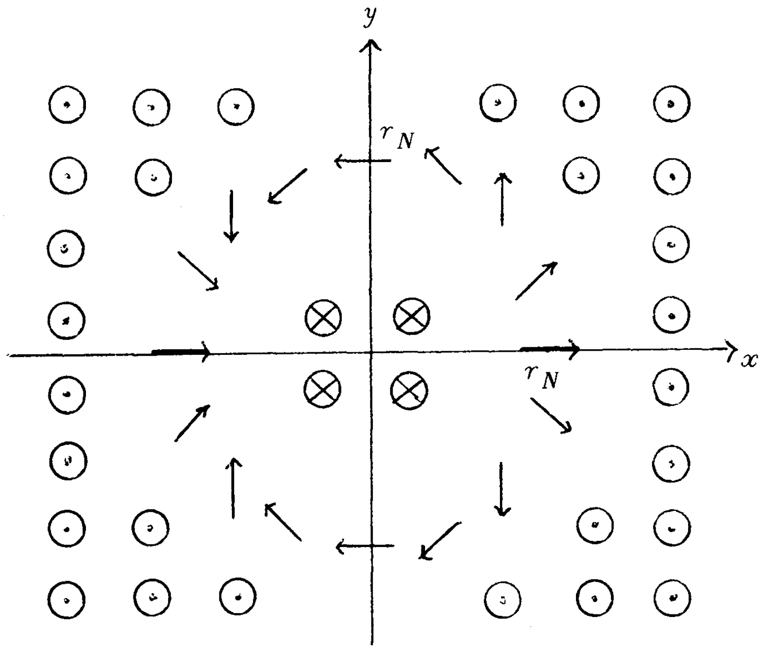


図1　系の形　　$L_z \leq \xi_d \ll R$

$\boldsymbol{d}$は単位ベクトルなので単位球の表面の点で表わせる。従って系全体の$\boldsymbol{d}$が単位球をちょうどN回被う（写像度N）のような texture が topology 的に安定である。Cheche-tkin[3] は図２のような写像度Nの ring 状 texture が２次の gradient energy を極小にする



矢印は$\boldsymbol{d}$の方向を表わす。

$\boldsymbol{d} \simeq -\boldsymbol{e}_z$ for $r \simeq 0$

$\boldsymbol{d} \simeq \boldsymbol{e}_z$ for $r \gg r_N$

図 2.　$N=2$ の ring 状 texture

ことを指摘した。彼の計算によると，一次の摂動 energy である dipole energy は $N=1$ のとき対数発散し，$N \geq 2$ では ring の半径 r_N の２乗に比例する。従って r_N はどんどん小さくなり，最終的には原点に singularity ができてしまう。また $N=1$ の ring が２個存在する系では，a を ring 間距離とすると，$a \to 0$ では ring 間に a^4 に比例する引力 potential が，$a \to \infty$ では $a^{-2} \ln a$ に比例する斥力 potential が働くという。

この論文では，一次の摂動 energy として４次の gradient energy を付け加えることにより $N \geq 2$ の ring 状 texture が安定化されること，磁場によって ring の大きさ r_N を調節できること，ring のまわりに spin current が存在すること，$N \geq 2$ の ring が２個存在する系では $a \to 0$ で a^4 に比例する引力 potential が働き，$a \to \infty$ では $N=2$ のとき $a^{-2} \ln a$ に，$N \geq 3$ のとき a^{-2} に比例する斥力 potential が働くことを示す。ここでは詳しい計算を省略するが，Progress に投稿する予定なので興味のある方はそれを参照して頂きたい。

§1　Free energy

実現する texture は free energy を極小にするものでなければならない。　texture に関

係する energy としては次のものがあげられる。(1) order parameter $A_{\mu i}$ の空間的な変化に伴う gradient energy F_{grad}。(2) 原子の持つ spin の間の相互作用による dipole energy F_{dip}。(3) 磁場と spin の相互作用による magnetic energy F_{mag}。

先ず F_{grad} は，転移温度近傍に注目して $A_{\mu i}$ の2次まで近似し，$A_{\mu i}$ の変化のスケールが coherence length $\xi_0(\equiv\hbar v_F/k_B T_C\sim 800$ Å) に比べて充分長い場合を考えて微分の2次までで近似すると一般に次式で表せる。[4)]

$$F_{\text{grad}}=\frac{1}{2}\sum_{\mu i j}\int d\boldsymbol{r}\left[K_1\nabla_i A_{\mu j}^*\nabla_i A_{\mu j}+K_2\nabla_i A_{\mu j}^*\nabla_j A_{\mu i}+K_3\nabla_i A_{\mu i}^*\nabla_j A_{\mu j}\right]$$

特に今考えている系では $\boldsymbol{d}$ だけが変化するので次式となる。

$$F_{\text{grad}}=\frac{K}{2}\int d\boldsymbol{r}\sum_{\mu}|\nabla d_\mu|^2$$

$$K\equiv\Psi^2(K_1+\frac{1}{2}K_2+\frac{1}{2}K_3)$$

次に，spin 間相互作用のうち texture に関係する部分だけを取り出して F_{dip} と定義すると，F_{dip} は次式で表わされる。[5)]

$$F_{\text{dip}}=-\frac{1}{2}g_D(T)\int d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\ell})^2$$

$$g_D(T)=\frac{3}{5}\pi(2\mu\Psi)^2\sim\frac{3}{5}(1-T/T_c)\times10^{-3}\ \text{erg/cm}^3$$

但し μ は ^{3}He 原子の magnetic moment である。今考えている系では常に $\boldsymbol{\ell}=\boldsymbol{e}_z$ なので，$\boldsymbol{d}$ は z 軸方向（または反対方向）を向こうとする。F_{grad} と F_{dip} の比で決められる特徴的な長さ ξ_d は次式で定義され，温度に依存しない。

$$\xi_d\equiv\sqrt{K/g_D(T)}\quad\sim\xi_0\times10^2$$

系に静的な磁場をかけると帯磁率は $\boldsymbol{d}$ の方向に依存する異方性を持つ。この異方性 energy を F_{mag} と定義する。[5)]

$$F_{\text{mag}}=\frac{1}{2}\chi_N\alpha(T)\int d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H})^2$$

$$\chi_N\alpha(T)\sim8(1-T/T_c)\times10^{-7}\ \text{erg/cm}^3\ \text{Gau B}^2$$

$F_{\rm dip}$ と $F_{\rm mag}$ の比で特性磁場 H_D を定義する。

$$H_D \equiv \sqrt{g_D(T)/\chi_N \alpha(T)} \qquad \sim 30 \text{ Gau B}$$

ところで今考えている系では $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_z$ なので，z 軸方向に一様な磁場をかければ $F_{\rm dip}$ と $F_{\rm mag}$ が符号を除いて全く同じ形になる。そこで $\widetilde{F}_{\rm dip} \equiv F_{\rm dip}+F_{\rm mag}$ によって effective な dipole energy を定義しよう。

$$\widetilde{F}_{\rm dip} = -\frac{1}{2}\widetilde{g}_D \int d\boldsymbol{r}\, d_z^2$$

$$\widetilde{g}_D \equiv g_D(1-H^2/H_D^2)$$

すると H の大きてを調節することによって effective な dipole energy の大きさと符号を自由に変えることができる。$H<H_D$ ならば texture に及ぼす磁場の効果は変化のスケール ξ_d を effective なスケール $\widetilde{\xi}_d$ で置き換えるだけである。

$$\widetilde{\xi}_d = \sqrt{K/|\widetilde{g}_D|} = \xi_d/\sqrt{1-H^2/H_D^2}$$

$H>H_D$ のときは $\widetilde{F}_{\rm dip}$ の符号が変わるので d が $x-y$ 平面に存在する方が energy 的に有利である。従って $H<H_D$ のときの texture を $x-y$ 平面内の任意の軸を中心に 90°回転した texture が実現する。特別な場合として $H=H_D$ のときは $\widetilde{F}_{\rm dip}=0$ となるので，texture に関係する energy は $F_{\rm grad}$ だけになる。

§2.　Ring 状 texture

ベクトル $\boldsymbol{d}$ は自由度 2 なので 1 つの複素数で表わすことができる。図 3 によって w を定義すると次の関係式が成立する。[3),6)]

$$w = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} \tag{1-a}$$

$$d_z = \cos\theta = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \tag{1-b}$$

$$d_x + i d_y = \sin\theta\, e^{i\phi} = \frac{2w}{|w|^2+1} \tag{1-c}$$

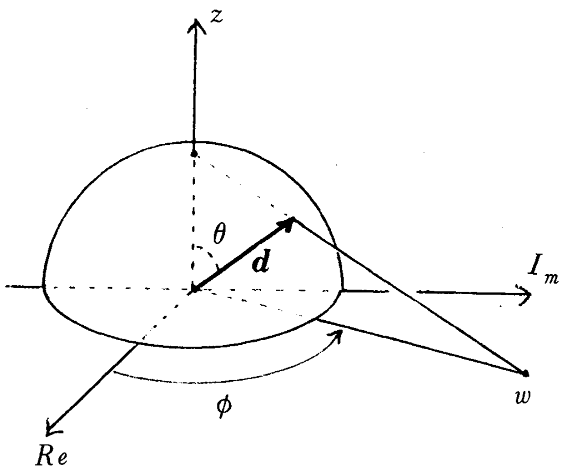


図 3.　$\boldsymbol{d}$ と w の関係。複素平面の実軸はスピン空間の x 軸と，虚軸は y と一致させる。

従って w の pole で $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_z$，$w=0$ で $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{e}_z$，$|w|=1$ で $\boldsymbol{d}$ は $x-y$ 平面内にある。便宜上 $x-y$ 平面を複素平面と見做し $z\equiv x+iy$ と定義しておく。$\boldsymbol{d}$ は系内で一意的に定まらねばならないので，w は z の一価関数でなければならない。

free energy の主要項は 2 次の gradient energy である。energy を $4\pi L_z K$ で，長さを ξ_d でスケールして無次元の量にすると次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
F_{\text{grad}} &= \frac{1}{8\pi}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} dx\,dy \sum_{\mu} |\nabla d_\mu|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{|Z|\leq R} dx\,dy \frac{\nabla w^*\cdot\nabla w}{(|w|^2+1)^2} \\
&= \gamma(w)+\frac{2}{\pi}\iint_{|Z|\leq R} dx\,dy \frac{\left(\frac{\delta w}{\delta z^*}\right)}{(|w|^2+1)^2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

但し R は系の大きさを ξ_d でスケールしたもの，z^* は z の複素共役数である。F_{grad} に含まれる特徴的な長さは R だけなので，$R\to\infty$ とすると F_{grad} はスケール変換に対して不変になる。従って $R\to\infty$ で F_{grad} を極小にするような texture には特徴的な長さが現われない。以下では特にことわらない限り $R\to\infty$ の極限を考れる。$\gamma(w)$ は次式で定義されており，写像度 N の texture では $\gamma=N$ となる。

$$
\gamma(w)\equiv-\frac{1}{4\pi}\iint dx\,dy\ \boldsymbol{d}\cdot(\nabla_x\boldsymbol{d}\times\nabla_y\boldsymbol{d})
$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\iint dx\,dy\,\frac{(\nabla w^{*}\times\nabla w)\cdot \boldsymbol{e}_z}{(|w|^2+1)^2} \tag{3}$$

従って写像度Nを与える texture の中では(2)式の第２項を０にするものが最も energy を低くする。そのようなwはzの正則関数（又は有理型の関数）である。実際，F_{grad} を極小にするための Euler Lagrange 方程式を作ると

$$\nabla^2 w-\frac{2w^{*}}{|w|^2+1}\nabla w\cdot\nabla w=0 \tag{4}$$

この方程式はwがz（又はz^{*}）の正則関数であれば満たされる。ところでwの pole は $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_z$ となることを表わしているだけであり，物理的には何の特異性も持たない。従ってzの有理型の関数も解になる。例えば $\gamma=N$ となる一般解は次式で与えられる。

例 1.

$$w=\frac{\prod_i(z-a_i)^{n_i}}{\prod_j(z-b_j)^{m_j}}\times\text{const.}$$

$$n_i>0,\quad m_j>0$$

$$\gamma=\max\left[\sum_i n_i,\ \sum_j m_j\right]=N$$

なお，γが系の大きさRに依存し，$R\to\infty$ で$\gamma=$不定　になるような解も考えられる。

例 2.

$$w=e^{i(z/a)^N}$$

Chechetkin が考えた ring 状　texture　は次式で与えられる。

$$w=\left(\frac{z}{r_N}\right)^N \tag{5}$$

r_Nは ring の大きさを表わす任意パラメータであり，摂動 energy を極小にするように決められる。このとき明らかに

$$F_{\text{grad}}=\gamma(w)=N \tag{6}$$

なので，F_{grad} は topology number Nによって量子化される。ring が多数個存在する系のwは次式で与えられる。

$$w=\prod_i (z-a_i)^{n_i} \qquad n_i>0 \tag{7}$$

但し a_i は任意定数である。このとき

$$F_{\rm grad}=\sum_i n_i \tag{8}$$

となるので，この系には位置 a_i に量子数 n_i を持つ ring が存在し， ring 同志は相互作用をしていないと考えることができる。

さて， texture は $\boldsymbol{d}$ の変化によって作られているので，系内に spin current が存在する。 spin current $J_{\mu i}$ は，今考えている系では，次式で表わせる。[7]

$$J_{\mu i}=-\frac{K}{\xi_d}\sum_{\nu\xi}\epsilon_{\mu\nu\xi}\,d_\nu\nabla_i d_\xi \tag{9}$$

但し μ は spin space の座標を， i は real space の座標を表わす。$\boldsymbol{d}$ は z 軸方向には変化しないので， $J_{\mu z}=0$ for $\forall\mu$。従って spin current は常に $x-y$ 平面に平行に流れる。また Euler 方程式を考慮すると，連続の式 $\sum_i\nabla_i J_{\mu i}=0$ を満す。w が (5) 式で与えられるときの spin current は次式となる。

$$\begin{pmatrix} J_{xx}+iJ_{xy} \\ J_{yx}+iJ_{yy} \\ J_{zx}+iJ_{zy} \end{pmatrix}=-\frac{2NK}{\xi_d r_N}\frac{\tilde{r}^{N-1}}{(\tilde{r}^{2N}+1)^2}\begin{pmatrix} -i\left\{\tilde{r}^{2N}e^{i(1+N)\alpha}-e^{i(1-N)\alpha}\right\} \\ -\left\{\tilde{r}^{2N}e^{i(1+N)\alpha}+e^{i(1-N)\alpha}\right\} \\ 2i\,\tilde{r}^{N}e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\text{但し}\quad \tilde{r}\equiv r/r_N \tag{10}$$

§3. 摂動項による効果

摂動項の dipole energy や 4 次の gradient energy を考慮すると， ring の大きさ r_N が定まり，多数の ring が存在する系では ring 間に相互作用が現われる。$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_z$ の状態を energy 原点とし，前節と同じスケールを用いると， dipole energy は次式のように書ける。

$$F_{\rm dip}=\frac{1}{8\pi}\iint dx\,dy\,(1-d_z^2)=\frac{1}{2\pi}\iint dx\,dy\left\{\frac{|w|}{|w|^2+1}\right\}^2 \tag{11}$$

ring 状 texture では $\boldsymbol{d}$ が変化している $r\sim r_N$，幅 $\sim r_N/N$，の部分だけが $F_{\rm dip}$ に寄与する。

従って　$F_{\mathrm{dip}} \sim r_N \times r_N/N = r_N^2/N$ となり，dipole energy は r_N を小さくするように働く。

次に微分について4次の gradient energy を求めよう。order parameter については2次までで近似する。spin space と real space の coupling は dipole energy の補正項としてのみ現われる。今問題にしているのは dipole energy の主要項である (11) 式と同程度の大きさの energy であるから，そのような微小量は無視してよい。従って4次の gradient energy は real space と spin space の回転に対して，それぞれ不変である。以上のことから4次の gradient energy F'_{grad} は一般に次の4つの項を含む。

$$\nabla_i \nabla_i A^*_{\mu k} \nabla_j \nabla_j A_{\mu k} \qquad \nabla_i \nabla_j A^*_{\mu k} \nabla_i \nabla_j A_{\mu k}$$

$$\nabla_i \nabla_j A^*_{\mu j} \nabla_i \nabla_k A_{\mu k} \qquad \nabla_i \nabla_j A^*_{\mu k} \nabla_i \nabla_k A_{\mu j}$$

ところで今扱っている系では $\boldsymbol{d}$ のみが変化し，かつ $r \to \infty$ で $\boldsymbol{d} \to \boldsymbol{e}_z$ となる texture のみを問題にしている。このことを考慮すると F'_{grad} は次のように書ける。

$$F'_{\mathrm{grad}} = \frac{c}{8\pi} \iint dx\,dy \sum_{\mu} |\nabla^2 d_\mu|^2 \qquad (12)$$

但し c は $(\xi_0/\xi_d)^2 \sim 10^{-4}$ 程度の大きさの定数である。ring 状 texture では $\boldsymbol{d}$ の傾きが N/r_N 程度なので

$$F'_{\mathrm{grad}} \sim c\left(\frac{N}{r_N}\right)^4 \times r_N \times \frac{r_N}{N} = \frac{cN^3}{r_N^2}$$

となり，F'_{grad} は r_N を大きするように働く。実際に (5) を (11) (12) に代入して計算すると次式のようになる。

$$F_{\mathrm{dip}} = \begin{cases} \dfrac{r_N^2}{2} \ln\left\{1 + \left(\dfrac{R}{r_N}\right)^2\right\} & (N=1) \\[2ex] \dfrac{r_N^2}{2} \dfrac{\pi}{N^2} \dfrac{1}{\sin \pi/N} & (N \geq 2) \end{cases} \qquad (13-\mathrm{a})$$

$$F'_{\mathrm{grad}} = \begin{cases} \dfrac{8c}{3} \dfrac{1}{r_N^2} & (N=1) \\[2ex] \dfrac{1}{2} \dfrac{\pi}{N^2} \dfrac{1}{\sin \pi/N} \dfrac{C(1/N) N^4}{r_N^2} & (N \geq 2) \end{cases} \qquad (13-\mathrm{b})$$

但し $C(1/N) \equiv \dfrac{8c}{3}\left(1 - \dfrac{1}{N^2}\right)$

$N=1$ のとき $R\to\infty$ とすると dipole energy が発散する。従ってここで行なっているような摂動論では $N=1$ の ring 状 texture を取り扱えない。以下では $N\geq 2$ の texture について考えることにする。$F_{\text{dip}}+F'_{\text{grad}}$ を極小にする r_N は次式で与えられる。

$$r_N = C(1/N)^{1/4} N \tag{14}$$

これを使って主要項と摂動項の比を求めると

$$\frac{F_{\text{dip}}}{F_{\text{grad}}} = \frac{F'_{\text{grad}}}{F_{\text{grad}}} = \frac{\sqrt{C(1/N)}}{2} \quad \frac{\pi/N}{\sin \pi/N} \sim \frac{\xi_0}{\xi_d} \sim 10^{-2} \tag{15}$$

となる。従って $N\geq 2$ のとき，この摂動論に矛盾はない。

§4. 磁場による効果

z 軸方向に一様な静磁場 H をかけてみよう。§ 1. で述べたように，$H<H_D$ ならば ξ_d を $\tilde{\xi}_d$ で置きかえるだけでよい。例えば ring の大きさは

$$\tilde{\xi}_d r_N \sim N\sqrt{\xi_0 \tilde{\xi}_d} \sim \frac{N}{(1-H^2/H_D^2)^{1/4}} \times 10^{-4}\ \text{cm} \tag{16}$$

となり，H を H_D に近づけると大きくなる。また $\tilde{F}_{\text{dip}}$ と F_{grad} の比は

$$\frac{\tilde{F}_{\text{dip}}}{F_{\text{grad}}} \sim \frac{\xi_0}{\tilde{\xi}_d} = \frac{\xi_0}{\xi_d}\sqrt{1-\frac{H^2}{H_D^2}} \tag{17}$$

となるので，H を H_D に近づけると近似の精度が良くなる。

$H>H_D$ のときは $\tilde{F}_{\text{dip}}$ の符号が変わるので，$\boldsymbol{d}$ が $x-y$ 平面内にある方が $\tilde{F}_{\text{dip}}$ の値を小さくする。一方 F_{grad} は spin space の回転に対して不変なので，ある texture が F_{grad} を極小にするならば，その texture を spin space 内で回転させて作られた texture も F_{grad} を極小にする。従って，例えば ring 状 texture を $x-y$ 平面内の任意の軸を中心に 90°回転した texture が実現される。例えば (5) を y 軸のまわりで回転したときの w は次式で与えられる。

$$w = \frac{\left(\frac{z}{r_N}\right)^N - 1}{\left(\frac{z}{r_N}\right)^N + 1} \tag{18}$$

なお，$\tilde{\xi}_d$ に比べて充分長いスケールで変化する静磁場を z 軸方向にかけると，

$\max(H/H_D)<1$ ならば，ring は広がりながら磁場の大きい方へと進む。

§5. Ring 間相互作用

先に述べたように，2次の gradient energy だけを考えている場合は ring は各々独立に振舞うが，摂動 energy を考慮すると ring 間に相互作用が生じる。ここでは簡単のため，同じ量子数 N ($N\geq 2$) を持つ2個の ring が存在する系について考察する。ring 間の距離を $2a$ とすると，w は次式で与えられる。

$$w = \left(\frac{z-a}{b}\right)^N \left(\frac{z+a}{b}\right)^N \tag{19}$$

b は ring の大きさに関係する実数のパラメータであり，摂動 energy を極小にするように決められる。このように決められた b は a に依存する。$a=0$ のとき w は量子量 $2N$ の ring が1個存在する状態を表わすので $b=r_{2N}$ となるべきである。また $a\to\infty$ のとき各々の ring は独立に振舞うと考えられる。例えば $z\sim a$ に着目すると (19) は

$$w\sim\left(\frac{z-a}{b}\right)^N \left(\frac{2a}{b}\right)^N$$

となる。従って $a\to\infty$ のとき $\frac{b^2}{2a}\to r_N$ となるべきである。

さて，(19) を (11) (12) に代入すると，摂動 energy は次のようになる。

$$F_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{(2N)^2}\frac{1}{\sin\pi/2N}\, b^2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] \tag{20-a}$$

for $N\geq 2$, $a/b\sim 0$

$$F_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{N^2}\frac{1}{\sin\pi/N}\frac{b^4}{2a^2}\left[1+\frac{1}{4\cos\pi/N}\left(\frac{b}{a}\right)^4\right] \tag{20-b}$$

for $N\geq 3$, $a/b\gg 1$

$$F_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{N^2}\frac{1}{\sin\pi/N}\frac{b^4}{2a^2}+\frac{b^4}{4a^2}\left\{\ln\frac{a}{b}-\frac{11}{24}\right\}\left(\frac{b}{a}\right)^4 \tag{20-c}$$

for $N=2$, $a/b\gg 1$

$$F'_{\text{grad}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{(2N)^2}\ \frac{1}{\sin\pi/2N}\ \frac{1}{b^2}\Big[(2N)^4 C(1/2N)$$

$$+\frac{(2N)^4}{4}\ C(3/2N)\ \frac{3\sin\pi/2N}{\sin 3\pi/2N}\left(\frac{a}{b}\right)^4\Big] \tag{20-d}$$

for $N\geq 2$, $a/b\sim 0$

$$F'_{\text{grad}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{N^2}\ \frac{1}{\sin\pi/N}\ \frac{8C(1/N)N^4 a^2}{b^4}+\frac{C(0)N^3}{a^2} \tag{20-e}$$

for $N\geq 2$, $a/b\gg 1$

摂動 energy を極小にするように b を決めると

$$\frac{b(a)}{r_{2N}} = \left\{1+\eta\left(\frac{a}{r_{2N}}\right)^4\right\}^{1/4} \tag{21-a}$$

for $N\geq 2$, $a\to 0$

但し

$$\eta\equiv\frac{1}{4}\left\{1+\frac{(2N)^2-9}{(2N)^2-1}\ \frac{9\sin\pi/2N}{\sin 3\pi/2N}\right\}$$

$$\frac{b(a)}{r_N} = \sqrt{\frac{2a}{r_N}}\left\{1-\frac{2}{\cos\pi/N}\left(\frac{r_N}{a}\right)^2+\frac{6}{\cos^2\pi/N}\left(\frac{r_N}{a}\right)^4\right\}^{1/8} \tag{21-b}$$

for $N\geq 3$, $a\to\infty$

$$\frac{b(a)}{r_N} = \sqrt{\frac{2a}{r_N}}\left[1-\frac{8}{\pi}\left(\frac{r_N}{a}\right)^2\left\{\ln\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r_N}\right)^2-\frac{7}{3}\right\}\right]^{1/8} \tag{21-c}$$

for $N=2$, $a\to\infty$

従って $b(a)$は先の要請を満たしている。(21) を使って b を消去すると，摂動 energy は a の関数として次のように書ける。

$$F_{\text{dip}}+F'_{\text{grad}} = 2\cdot\frac{r_{2N}^2}{2}\ \frac{\pi}{(2N)^2}\ \frac{1}{\sin\pi/2N}\left[1+\frac{2\eta+1}{12}\left(\frac{a}{r_{2N}}\right)^4\right] \tag{22-a}$$

for $N\geq 2$, $a\to 0$

$$F_{\mathrm{dip}}+F'_{\mathrm{grad}}=2\cdot\frac{r_N^2}{N^2}\frac{\pi}{\sin\pi/N}\left[1+K\left(\frac{r_N}{a}\right)^2-\frac{1}{2\cos^2\pi/N}\left(\frac{r_N}{a}\right)^4\right] \qquad (22-\mathrm{b})$$

for $N\geq 3$, $a\to\infty$

但し

$$K=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\pi/N}{\pi/N}\frac{1}{1-1/N^2}+\frac{1}{\cos\pi/N}\right\}$$

$$F_{\mathrm{dip}}+F'_{\mathrm{grad}}=2\cdot\frac{r_N^2}{N^2}\frac{\pi}{\sin\pi/N}\left[1+\frac{2}{\pi}\left\{\ln\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r_N}\right)^2-\frac{7}{b}\right\}\left(\frac{r_N}{a}\right)^2\right] \qquad (22-\mathrm{c})$$

for $N=2$, $a\to\infty$

従って $a\to 0$ では ring 間に a^4 に比例する引力 potential が働く。 $a\to\infty$ では $N\geq 3$ のとき a^{-2} に比例する斥力 potential が，$N=2$ のとき $a^{-2}\ln a$ に比例する斥力 potential が働く。引力から斥力に変わるのは a が r_{2N} 程度のときである。

なお，Chechetkin が求めたのは，このような摂動論が有効でない $N=1$ の ring 間の相互作用である。また彼は 4 次の gradient energy を考慮していないので，b の a 依存性についての考察が不充分である。ここでは摂動論が有効な $N\geq 2$ の ring 間について，dipole energy と 4 次の gradient energy から b の a 依存性を求め，相互作用の形を決定した。

Conclusion

ここでは $\boldsymbol{d}$ ベクトルの作る量子数 2 以上の ring 状 texture について考察した。量子数 1 の texture を求めるためには F_{grad}，F_{dip}，F'_{grad} の全てを考慮した極値問題を解かねばならない。系内に実際に ring 状 texture を作るには，大きなパルス磁場をかけて $\boldsymbol{d}$ を攪乱してやればよい。攪乱が緩和された後，一様状態になることもあるだろうが，ring 状 texture が作られている可能性もある。系内に一旦 ring 状 texture が作られると，もし系の大きさ R が無限大ならば，この状態はトポロジー的に安定なので，連続的な変化で一様状態に移行することができない。しかし実際の系は必ず有限の大きさを持つ。ここでは量子数の等しい 2 個の ring 間の相互作用しか求めなかったが，量子数の異なる ring 間や，多数個の ring が存在する系でも同様の結論が成り立つとすれば，ring は互いに斥け合い，系の境界に吸収されてしまう。 ring を系内に閉じこめておくためには，系の中心で強く，境界で弱いような磁場を z 軸方向にかけてやればよい。ring は磁場の強い方

へと移動するので，系の中心付近に集まる。

残された問題としては，ring状 texture の NMRの実験への寄与，非一様磁場内での ringの運動などがあげられる。

最後に，この研究を進めるにあたり有益なディスカッションをして下さった都築俊夫教授，海老沢丕道博士，都築研の皆様に深く感謝致します。

参 考 文 献

1) K. Maki: "Textural defect (solitons and singularities) in superfluid ^{3}He" Proc. ULT Hakone Symposium 1977.
2) V. Ambegaokar, P. G. de Gennes, and D. Rainer: Phys. Rev. **A9** (1974) 2676.
3) V. R. Chechetkin: Sov. Phys. JETP, **44** (1976) 766.
4) N. D. Mermin: in Quantum Liquids, ed. by J. Ruvalds and T. Regge (North-Holland, Amsterdam 1978).
5) A. J. Leggett: Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 331.
6) A. A. Belavin and A. M. Polyakov: JETP Lett. **22** (1975) 245.
7) M. C. Cross: J. Low Temp. Phys. **21** (1975) 525.