

ボーズ粒子系における集団変数 と内部変数について

東理大・理・物理 五十嵐靖則

中馬 國喜

鈴木 良治

(1979年7月4日受理)

概要:

集団運動の方法による取り扱い、強く相互作用し合っているボーズ粒子系の素励起の性質を知るうえで、大変示唆に富んだ物理的描像を提供してくれる。我々は近似的にはあるが、集団変数と互いに直交する正準共役な内部変数が存在することを見出したので報告したい。

集団変数と内部変数を用いることによって系の Hamiltonian を、集団運動を記述する部分と内部運動を記述する部分へ分離することが可能となり、これまで取り扱いが困難であった内部運動を平易に取り扱うことができ、例えば、ボーズ粒子系では k より小さな運動量を持った Single-Particle excitation は起こらないこと等が導き出される。

本論文では集団変数と内部変数との直交性や分離の度合等についての議論を展開する。

§ 1. はじめに

よく知られているように、強く相互作用し合っている量子多体系の弱く励起した状態の物理的性質を知るうえで、素励起の考えは有用な方法である。この素励起を記述する方法の一つとして集団運動の方法がある。この方法は素励起の物理的な描像を鮮明にしてくれ、又普通の摂動論の方法では取り扱いがむづかしい(同時に多数の粒子からの相互作用に基づいて起こる)集団運動をうまく取り扱えるという利点がある。

これまでも、集団運動に目をつけて系に起こり得る運動のモードを分離して取り扱う、いわゆる集団運動の方法は色々な人によって研究されてきた。⁽¹⁾⁻⁽²⁰⁾ 特に、強く相互作用し合っている多粒子系の取り扱いには集団運動の方法は他のどんな方法よりもその威力を発揮してきた。中でも、最も elegant で一般的な方法は Tomonaga⁽²⁾ によって提案

された方法で, この方法は他のやり方と異なり, 集団運動を記述する為に余分な変数 (余分な自由度) を導入することなく, 系に起こり得る運動を集団運動の部分とそうでない部分に分離して取り扱う手法を示したものであった。余分な変数を導入して取り扱う方法の問題点⁽⁷⁾は, Carmi も指摘しているように, 例え補助条件を波動関数に課して余分な自由度を落したとしても, 余分に導入した変数による零点運動は取り除かれてはいないので問題が残る。

以下に示す方法は, 系に余分な自由度を導入することなく, 運動を集団運動と内部運動の部分に分離して取り扱うことを可能とするものである。我々は内部運動についても取り扱うことができるようにする為に, Tomonaga の方法を拡張発展させ, 内部運動を記述する力学変数を導入した。我々の方法によると, $\{r_n, p_n\}$ で書かれていた Hamiltonian $H(r_n, p_n)$ を ξ_k, Π_k を力学変数とする集団運動の Hamiltonian $H_c(\xi_k, \Pi_k)$ と, η_k, Ω_k を力学変数とする個別運動の Hamiltonian $H_{in}(\eta_k, \Omega_k)$ と, residual internal motion の Hamiltonian H_{in}^* に近似的にはあるが, 分離することができる。

§2. では, まず元の粒子座標と運動量から集団運動をする部分とそうでない部分 (内部運動を記述する R_n と運動量 P_n) への分離をする。集団運動から分離された R_n と P_n は残念ながら正準共役な力学変数になっていないことがわかる。§3. では, R_n と P_n を互いに独立な変数に変換することを考える。変換された内部変数 η_k, Ω_k は, $N^{-1/2}$ の order を無視する我々の近似の範囲で, 集団変数 ξ_k, Π_k と独立であり, 又互いに正準共役な交換関係を満足しており, 又 Configuration Space で互いに直交していることを示す。§4. では, 個別運動を記述する力学変数は $k < k_s$ ($k \neq 0$) で, 我々の近似の範囲で零になることを示す。即ち, ボーズ粒子系における個別励起は $k < k_s$ では禁止されていることが明らかにされる。

§ 2. 力学変数の集団運動と内部運動部分への分離

よく知られているように, 多粒子系の弱く励起した状態は素励起の集まりとして理解することができる。強く相互作用し合うボーズ粒子系で起こる運動について考えてみると, 一つの粒子が運動するよりも多数の粒子が同時に運動する, 集団運動の方がエネルギーの面で起こり易い。特に Repulsive な core を持った粒子系においてはそうである。

強く励起している状態を取り扱う方法として, この集団運動に目をつけ, この運動を

量子力学的に解くという手法が集団運動の方法なのであるが、我々はこの集団運動として、粒子密度のゆらぎに着目する。この密度のゆらぎは音波として系の中を伝わってゆくであろう。この音波を記述する座標として、密度のフーリエ成分 $\rho_{\mathbf{k}} = (1/N) \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n}$ を採用する。しかしながら、 $\rho_{\mathbf{k}}$ は、 k が大きくなると Harmonic に振動しなくなり、集団運動のモードからはずれてくるので、 $k < k_s$ ($k=0$ は除く) に制限する。

そこで、集団運動を記述する座標 $\xi_{\mathbf{k}}$ を

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n}, \quad (|\mathbf{k}| < k_s : \mathbf{k} \neq 0) \quad (2-1)$$

と採り、 S 個導入する。 k_s の決定の仕方は後で議論する。この座標に正準共役な運動量 $\Pi_{\mathbf{k}}$ は Tomonaga⁽²⁾ に従って、

$$\Pi_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\sqrt{N}} k^2 \sum_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2\}, \quad (|\mathbf{k}| < k_s : \mathbf{k} \neq 0) \quad (2-2)$$

であることがわかる。(簡単の為に一辺 1 の box に N 個の粒子が入っているものとする。)

(2-1) と (2-2) との交換関係は次の通りである。

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}] &= (\hbar/i) \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')}{k^2} \bar{\rho}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = (\hbar/i) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + (\hbar/i) \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')}{k^2} \bar{\rho}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \\ & \quad (\mathbf{k} \neq \mathbf{k}') \\ &= (\hbar/i) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + O(N^{-1/2}), \end{aligned} \quad (2-3)$$

又、

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{k}'}] &= -\frac{\hbar(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')}{N k^2 k'^2} \sum_n e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_n} \{(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{p}_n - \frac{\hbar}{2}(k^2 - k'^2)\} \\ &= 0 + O(N^{-1/2}). \end{aligned} \quad (2-4)$$

次に、粒子座標 \mathbf{r}_n を集団運動を表わす部分とそうでない部分に分離する。

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n + \delta \mathbf{r}_n \quad (2-5)$$

ここで、 \mathbf{R}_n は集団運動が起こっていない時の粒子の位置座標を表わし、 $\delta \mathbf{r}_n$ は粒子の集団運動に関与する部分を表わし、 \mathbf{R}_n に比べて小さい量である。 \mathbf{r}_n を集団座標 $\xi_{\mathbf{k}}$ を含む項とそうでない項に分離する為に、 \mathbf{r}_n を $\xi_{\mathbf{k}}$ 展開する。

五十嵐靖則, 中馬國喜, 鈴木良治

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n + \sum_{q \neq 0}^{k_s} a_q^+ \cdot \xi_q + \sum_{q \neq 0}^{k_s} a_q^- \cdot \bar{\xi}_q + \dots \quad (2-6)$$

(2-6) で, \mathbf{R}_n 及び各係数 a_q^+ , a_q^- , \dots 等は ξ_k を含んでいないので Π_k と交換するはずである。即ち,

$$[\Pi_k, \mathbf{R}_n] = 0, \quad [\bar{\Pi}_k, \mathbf{R}_n] = 0 \quad (2-7)$$

及び

$$[\Pi_k, a_q^+] = 0, \quad [\bar{\Pi}_k, a_q^-] = 0 \quad (2-7')$$

を満足するように \mathbf{R}_n 及び a_q^+ , a_q^- , \dots を決定する。内部座標 \mathbf{R}_n は容易に求まって、⁽⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{r}_n - \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\Pi_q, \mathbf{r}_n] \xi_q + [\bar{\Pi}_q, \mathbf{r}_n] \bar{\xi}_q \} + \dots \quad (2-8)$$

$$= \mathbf{r}_n + \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q}}{q^2} \{ e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \cdot \xi_q - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \cdot \bar{\xi}_q \} + \dots \quad (2-8')$$

又

$$a_q^+ = \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} [\Pi_q, \mathbf{r}_n] + \dots = -\frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q}}{q^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} + \dots \quad (2-9)$$

$$a_q^- = \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} [\bar{\Pi}_q, \mathbf{r}_n] + \dots = \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q}}{q^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} + \dots$$

従って

$$\delta \mathbf{r}_n = \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\Pi_q, \mathbf{r}_n] \xi_q + [\bar{\Pi}_q, \mathbf{r}_n] \bar{\xi}_q \} + \dots \quad (2-10)$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q}}{q^2} \{ e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \cdot \xi_q - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \cdot \bar{\xi}_q \} + \dots \quad (2-10')$$

と求まる。

同様にして, 運動量 \mathbf{p}_n を分離する。

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{P}_n + \delta \mathbf{p}_n \quad (2-11)$$

ここで, \mathbf{P}_n は集団運動とは独立な内部運動の運動量であり, $\delta \mathbf{p}_n$ は集団運動へ関与する運動量である。分離の条件は \mathbf{P}_n が

$$[\mathbf{P}_n, \xi_k] = 0, \quad [\mathbf{P}_n, \bar{\xi}_k] = 0 \quad (2-12)$$

及び

$$[\mathbf{P}_n, \Pi_k] = 0, \quad [\mathbf{P}_n, \bar{\Pi}_k] = 0 \quad (2-13)$$

を同時に満足することである。

\mathbf{P}_n は次の形に求まる。⁽¹⁸⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n = & \mathbf{p}_n - \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\mathbf{p}_n, \xi_q] \Pi_q + [\mathbf{p}_n, \bar{\xi}_q] \bar{\Pi}_q \} \\ & + \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\mathbf{p}_n, \Pi_q] \xi_q + [\mathbf{p}_n, \bar{\Pi}_q] \bar{\xi}_q \} + \dots \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} = & \mathbf{p}_n - \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \mathbf{q} (e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \Pi_q - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \bar{\Pi}_q) \\ & - \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q}}{q^2} (e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \{ (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_n) - \frac{\hbar}{2} q^2 \} \xi_q \\ & + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \{ (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_n) + \frac{\hbar}{2} q^2 \} \bar{\xi}_q) + \dots \end{aligned} \quad (2-15)$$

従って,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_n = & - \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\mathbf{p}_n, \xi_q] \Pi_q + [\mathbf{p}_n, \bar{\xi}_q] \bar{\Pi}_q \} \\ & + \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \{ [\mathbf{p}_n, \Pi_q] \xi_q + [\mathbf{p}_n, \bar{\Pi}_q] \bar{\xi}_q \} + \dots \end{aligned} \quad (2-16)$$

と求まる。

このようにして求めた内部座標 \mathbf{R}_n と集団座標 ξ_k とは Configuration Space で互いに直交していることがわかる。即ち,

$$\begin{aligned} \sum_n (\nabla_n \xi_k) \cdot (\nabla_n \mathbf{R}'_l) = & \frac{i}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \left[\mathbf{k}_l + \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q} \iota(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \{ e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \xi_q \right. \\ & \left. + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} \bar{\xi}_q \} - \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0}^{k_s} \frac{\mathbf{q} \iota(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \{ e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_n} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_n} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \} \right] \\ = & 0 + O(N^{-1}), \quad (|\mathbf{k}| < k_s). \end{aligned} \quad (2-16)$$

又, 集団座標 ξ_k 同志も $N^{-\frac{1}{2}}$ の order を無視する近似で互いに直交している。即ち,

$$\sum_n (\nabla_n \cdot \xi_k) \cdot (\nabla_n \cdot \xi_{k'}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = k^2 \cdot \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + 0(N^{-1/2}) \quad (2-17)$$

ところで, (2-8) 及び (2-14) の \mathbf{R}_n 及び \mathbf{P}_n はそれぞれ独立な変数であろうか? 例えば, 次の関係に注目してみる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \{1 - i(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{r}_n) + \dots\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0}^{k_s} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \{ \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}} - \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \bar{\xi}_{\mathbf{q}} \} + \dots \\ &= 0 + 0(N^{-1/2}), \quad (|\mathbf{k}| < k_s) \end{aligned} \quad (2-18)$$

従って, $N^{-1/2}$ を無視する我々の近似で, \mathbf{R}_n は互いに独立な変数ではなく, (2-18) 式によって S 個の拘束条件が存在し, 互いに結び合っている。このことは我々が, 系の自由度を増すことなく, 粒子座標を集団運動部分と内部運動部分へ分離してき, $3N$ 個の独立な座標の内, すでに集団座標として S 個使用しているからに他ならない。これと同じことは \mathbf{P}_n についても云える。

又, $\mathbf{R}_n, \mathbf{P}_n$ は, Bohm や Carmi⁽⁷⁾ も指摘しているように, 互いに正準共役な交換関係を満足していない。即ち,

$$[\mathbf{P}_n, \mathbf{R}_n] = (\hbar/i) \delta_{n,n'} \left(1 - \frac{S}{3N}\right) + 0(N^{-1/2}) \quad (2-19)$$

§ 3. 正準共役な個別座標と運動量

うえてみたように, \mathbf{R}_n 及び \mathbf{P}_n は条件 (2-7), (2-12), (2-13) 及び (2-16) を満足しているという意味では集団変数 $\xi_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{k}}$ に対する内部変数の資格は備えている。しかしながら, 互いに独立ではないので正準な力学変数ではない。そこで我々はこの $\mathbf{R}_n, \mathbf{P}_n$ を互いに独立な, 正準な交換関係を満足する変数に変換する。

最も簡単な変換として, 我々は次の変換を考える。内部運動に含まれている, 個別運動を記述する座標を $\eta_{\mathbf{k}}$ で表わすことにし, $\eta_{\mathbf{k}}$ を

$$\eta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n}, \quad (|\mathbf{k}| < k_c) \quad (3-1)$$

と採る。^{(6),(18)}

この η_k に正準共役な運動量 Ω_k は、近似的に次の形に求まる。

$$\Omega_k = -\frac{i}{\sqrt{N}k^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \left\{ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2 \right\}, \quad (|\mathbf{k}| < k_c) \quad (3-2)$$

ここで、 \mathbf{R}_n 及び \mathbf{P}_n は (2-8) 及び (2-14) を満足するものとする。又 (3-1), (3-2) において、 k は η_k が Harmonic に振動する大きさとし、 k_c は個別運動の自由度の数が $(3N - S)$ を越えない大きさを取るものとする。

η_k と Ω_k は次の正準な交換関係を満足している。

$$\begin{aligned} [\Omega_k, \eta_{k'}] &= (\hbar/i) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + (\hbar/i) \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \\ &\quad (\mathbf{k} \approx \mathbf{k}') \\ &\quad + (\hbar/i) \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{\sqrt{N}k^2} \cdot \frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})}{|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|^2} \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} + \dots \\ &\quad (|\mathbf{k}'-\mathbf{k}| < k_s; \mathbf{k}' \approx \mathbf{k}) \\ &= (\hbar/i) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + O(N^{-1/2}) \dots \end{aligned} \quad (3-3)$$

又、内部変数 η_k と Ω_k は集団変数 ξ_k , Π_k と独立な変数となっていることは次の交換関係からわかる。即ち、

$$[\Pi_k, \eta_k] = \left[\Pi_k, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{R}_n} \right]$$

分離の条件 (2-7) より、 Π_k と \mathbf{R}_n は交換する。従って、

$$= 0 + O(N^{-1/2}) \quad (3-4)$$

を満足している。

又、

$$[\Omega_k, \xi_{k'}] = \left[-\frac{i}{\sqrt{N}k^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \left\{ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2 \right\}, \xi_{k'} \right]$$

分離の条件 (2-12) より、 \mathbf{P}_n と $\xi_{k'}$ は交換する。従って、

$$= 0 + O(N^{-1/2}), \quad (3-5)$$

五十嵐靖則, 中馬國喜, 鈴木良治

を満足している。

又,

$$[\Omega_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{k}'}] = \left[-\frac{i}{\sqrt{N}} \frac{1}{k^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \left\{ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2 \right\}, \Pi_{\mathbf{k}'} \right]$$

(2-8) 及び (2-14) から

$$= [\Pi_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{k}'}] + O(N^{-1}) = 0 + O(N^{-1/2}) \quad (3-6)$$

を満足している。

さらに, 集団座標 $\xi_{\mathbf{k}}$ と個別座標 $\eta_{\mathbf{k}}$ は Configuration Space で互いに直交している。

即ち,

$$\begin{aligned} \sum_n (\nabla_n \cdot \xi_{\mathbf{k}}) \cdot (\nabla_n \eta_{\mathbf{k}'}) &= \sum_n (\nabla_n \cdot \xi_{\mathbf{k}}) \cdot \left(\nabla_n \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_{n'}} \right) \\ &= -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}') \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'} - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{2\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \frac{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{q})}{q^2} \left\{ \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}} - \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \bar{\xi}_{\mathbf{q}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \frac{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{q})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{q^2} \left\{ \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}} - \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \bar{\xi}_{\mathbf{q}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \frac{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{q})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{q^2} \left\{ \rho_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \rho_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right\} \\ &= 0 + O(N^{-1/2}) \quad (|\mathbf{k}| < k_s, |\mathbf{k}'| < k_s), \end{aligned} \quad (3-7)$$

§ 4. 内部変数の性質

個別運動を記述する力学変数 $\eta_{\mathbf{k}}$, $\Omega_{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} が $k < k_s$ に対して, 我々の近似で, 零である (\mathbf{R}_n に対する拘束条件 (2-18))。即ち,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \left\{ 1 - i(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{r}_n) + \dots \right\} \\ &= 0 - \frac{1}{2} \sum_{\xi+\mathbf{k}}^{k_s} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{q^2} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{k_s} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{q^2} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \bar{\xi}_{\mathbf{q}} + \dots \\ &= 0 + O(N^{-1/2}) \quad (|\mathbf{k}| < k_s) \end{aligned} \quad (4-1)$$

又,

$$\mathcal{Q}_k = -\frac{i}{\sqrt{N} k^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \left\{ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2 \right\}$$

(2-8) 及び (2-12) より

$$\begin{aligned} &= 0 + -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{k}} \frac{k_s}{k^2} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{k^2} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \Pi_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq-\mathbf{k}} \frac{k_s}{k^2} \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{k^2} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \cdot \bar{\Pi}_{\mathbf{q}} + \dots \\ &= 0 + O(N^{-1/2}) \quad (|\mathbf{k}| < k_s) \end{aligned} \quad (4-2)$$

をそれぞれ満足している。

従って、 k が k_s 以下では、個別励起は起こらないことがわかる。即ち、Single-Particle excitation は運動量 k_s 以上を持ったものしか起こらないことを意味している。式(4-1) 及び式(4-2) が結果したのは、我々の取り扱っている系がボーズ統計に従う粒子から成っていることに起因している。フェルミ粒子系の場合は、Single-Particle excitation を記述する座標はけって (3-1) や (3-2) の形には書けない。

§ 5. Summary and Discussion

我々は、内部座標 \mathbf{R}_n から個別座標 $\eta_{\mathbf{k}}$ へ式(3-1)によって変換したが、この変換が可能なのは取り扱っている系がボーズ粒子系であることに基づいている。よく知られているように、粒子間の相互作用が無視できる場合の運動量、 \mathbf{k} を持った1個の Single-Particle excitation を記述する座標は $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$ で表わされる。系がボーズ粒子から成っているか、フェルミ粒子から成っているかによって、この座標は対称化又は反対称化されねばならない。従って、ボーズ粒子系の場合は対称化された演算子 $\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n}$ が Single-Particle excitation を記述する座標であると解釈することができる。即ち、系の基底状態を $|0\rangle$ で表わせば、運動量 \mathbf{k} を持った1個の Single-Particle が励起された状態は、

$$\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} |0\rangle (= \eta_{\mathbf{k}} |0\rangle) \text{ で表わされる。}^{(6),(17)}$$

フェルミ粒子系の場合は、この様な形に書けないので、 $k < k_s$ で個別的励起が禁止されているという結果は起こらない。又、内部運動は、集団運動の為に粒子間の相互作用がスクリーニングされる結果、ほとんど独立に運動しているという描像が得られるので、個別運動を記述する座標として、(3-1)を採用することは、物理的に考えて許される

近似である。又, この励起状態は He II の素励起を記述するのに Feynman - Cohen⁽²¹⁾ たちの仮定したものと同一形になっている。

我々の得た結論の一つは, ボーズ粒子系では Single-Particle excitation は $k < k_s$ では禁止されているということであるが, この結果出てきたのは, 余分な変数を導入したことによって, 系の自由度を元へもどす為の補助条件が働いて, 結果したのではなく, 取り扱っている系がボーズ粒子系であることと, 系に $k < k_s$ で長波長の集団モードが存在したことの結果として, 必然的に出てきたものであることに注意したい。

Ter. Haar⁽²²⁾も言及しているように, Tomonaga⁽²⁾によって示された集団運動の方法は, 系に起こる集団運動のモードを, 内部運動から分離し, 当面の課題である集団運動についてのみを扱うという趣旨から, 内部運動については取り扱わないので, explicit に内部座標を導入しない方法で議論を展開し, 内部運動の取り扱いの問題はその後の研究に委ねた。我々は, 内部運動についても取り扱いが可能となるように, Tomonaga の精神に従って, 系に余分な自由度を導入することなく, 粒子座標と運動量を集団変数と内部変数へ, $N^{-1/2}$ の order を無視する近似ではあるが, 変換し, 集団運動と個別運動を分離して取り扱う手法の第一歩を示したわけである。内部座標 \mathbf{R}_n には phonon の back-flow 効果が入っているが, これを正確に取り入れる為には Nishiyama⁽⁸⁾も指摘しているように, $N^{-1/2}$ までは正確に問題を解かなければならない。近似をもう少し上げて, 少なくとも N^{-1} の order まで正確な正準変数 $\xi_k, \Pi_k, \eta_k, \Omega_k$ を見い出せると確信している。

内部変数を導入する方法は集団運動だけでなく, 個別励起の性質を理解するうえで, 重要な寄与をするであろうし, 又個別励起間の相互作用の問題や, 集団励起と cocysling の取り扱い等も容易になるであろう。次回は, これらの力学変数を用いて Hamiltonian を Collective な部分と individual な部分へ分離し, 各々の励起状態の性質についての議論を予定している。

参 考 文 献

- 1) D. Bohm and D. Pines: Phys. Rev. **82** (1951) 625.
D. Pines and D. Bohm: Phys. Rev. **85** (1952) 338.
D. Bohm and D. Pines: Phys. Rev. **92** (1953) 609.
D. Pines: Phys. Rev. **92** (1953) 626.

- 2) S. Tomonaga: Prog. Theor. Phys. **13** (1955) 467, 482 素粒子論研究 Vol. 7 (1955) 原子核の Collective motion について。
- 3) J. K. Percus and G. J. Yevick: Phys. Rev. **101** (1956) 1186 , Phys. Rev. **101** (1956) 1192, Nuovo Cimento **5** (1957) 65, Nuovo Cimento **5** (1957) 1057, Phys. Rev. **110** (1958) 1.
J. K. Percus: "The Many-Body Problem." Part III. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London 1963.
- 4) N. N. Bogoliubov and D. N. Zubarev: Soviet Phys. (JETP) **1** (1955) 83.
- 5) R. Skinner: Can. J. Phys. **34** (1956) 901.
- 6) W. Brenig: Zeit. Physik **144** (1956) 488.
- 7) D. Bohm and G. Carmi: Phys. Rev. **133** (1964) A319, A332,
G. Carmi: "Many-Body Problems and Other Selected Topics in Theoretical Physics." Edited by M. Moshinsky and T. A. Brody, Gordon and Breach, Science Publishers. New York, London, Paris. 1966.
E. N. Adams: Phys. Rev. **98** (1955) 947, 1130.
- 8) T. Nishiyama: Prog. Theor. Phys. **17** (1957) 711, Prog. Theor. Phys. **38** (1967) 1062, **45** (1971) 730.
- 9) S. Sunakawa and Y. Yoko-o, and H. Nakatani: Prog. Theor. Phys. **27** (1962) 589, 600, **28** (1962) 127,
S. Yamasaki and T. Kebukawa and S. Sunakawa: Prog. Theor. Phys. **53** (1975) 1243, **61** (1979) 996, 1012.
- 10) K. Hiroike: Prog. Theor. Phys. **21** (1959) 327.
- 11) F. Takano: J. Phys. Soc. Japan. **12** (1957) 1185.
- 12) A. Bohr: "Rotational States of Atomic Nuclei", Munksgaard, Copenhagen. 1954.
- 13) T. H. R. Skyrme: Proc. Roy. Soc. London **A239** (1957) 399.
- 14) J. Hubbard: Proc. Roy. Soc. **A240** (1957) 539.
- 15) J. G. Valatin and D. Butler: Nuovo Cimento **10** (1958) 37,
Hong-Mo Chan and J. G. Valatin: Nuovo Cimento **19** (1961) 118.
- 16) R. D. Etters: Nuovo Cimento **44** (1966) 68.
- 17) D. Bohm and B. Salt: Rev. Mod. Phys. **39** (1967) 894.
- 18) 五十嵐靖則, 鈴木良治 : 物性研究 Vol. **18**, No. 5 (1972) 195, Vol. **19**, No. 2 (1972) 176,

五十嵐靖則, 中馬國喜, 鈴木良治

五十嵐靖則, 中馬國喜, 鈴木良治 : 物性研究 Vol. 31, No. 3 (1978) 169.

19) H. Seki, M. Hakamura and R. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 57 (1977) 1057.

20) H. Nakajima, T. Kawashima: Prog. Theor. Phys. 61 (1979) 674.

21) R. P. Feynman and M. Cohen: Phys. Rev. 102 (1956) 1189.

22) P. ter Haar: "Introduction to the physics of Many-Body Systems"; Part II. Interscience, New York, 1958. この書物には, 特に朝永の方法の優れた解説が載っている。