散逸力学系と積分因子

大阪教育大・物理　鯖田秀樹

（1979年8月17日受理）

§1. はじめに

散逸力学系は非保存系であるが，かなり多くが保存系についての Lagrange，Hamilton の定式のわくにはいることが知られている。つまり積分因子を考えることにより Lagrangian，Hamiltonian が求められる。そして保存系にできる場合がある。与えられた方程式から Lagrangian とHamiltonian を求めることを The Inverse Problem（逆問題）という。ソリトン問題の逆散乱法とは別物である。くわしくは Santilli の本[1] を参照されたい。

以下では散逸力学系の最も簡単な方程式

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}+\omega^2 q=0 \tag{1}$$

にまつわる話を中心に述べる。変数変換により(1)に帰着される非線形方程式もあり，非線形問題を考える出発点としても好個の系である。実際，積分因子の解釈に Hirota の方法が用いられて，Hirota 氏の微分が非線形の世界では自然なものであることを思わせる。(1)の双対方程式をつくって見て，積分因子についても双対性が伝わっていることも示す。

§2. 双対方程式

この節では(1)の代りに方程式

$$m\ddot{q}+\beta\dot{q}+Kq=0 \tag{2}$$

について考える。本質的には(1)と同じであるが係数に物理的意味をもたせるためである。

(2)の積分因子は $e^{\frac{\beta}{m}t}$ である。つまり，

$$L=e^{\frac{\beta}{m}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}Kq^2\right) \tag{3}$$

について Lagrange 方程式を書き下すと

$$e^{\frac{\beta}{m}t}(m\ddot{q}+\beta\dot{q}+Kq)=0 \tag{4}$$

となる。積分因子 $e^{\frac{\beta}{m}t}$ を除くと(4)は(2)と同じである。

次にこれらに双対的関係にある方程式をつくる。双対性の意味についての高橋秀俊氏の考察[2)]，戸田盛和氏の双対鎖[3)] から考えて，ここでは q の共役運動量 p についての方程式を意味する。$L(q,\dot{q},t)$ の変分は

$$dL=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,d\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial q}\,dq+\frac{\partial L}{\partial t}\,dt=p\,d\dot{q}+\dot{p}\,dq+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$=d(p\dot{q}+\dot{p}q)-\dot{q}\,dp-q\,d\dot{p}+\frac{\partial L}{\partial t}\,dt$$

と計算され，書き直して $G(p,\dot{p},t)$ が導入できるときには

$$dG\equiv d(p\dot{q}+\dot{p}q-L)=\dot{q}\,dp+q\,d\dot{p}-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt$$

となる。しかし G が p，$\dot{p}$，t だけの関数で表わされるのは $p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$，$\dot{p}=\frac{\partial L}{\partial q}$ が逆に解けるときだけである。そのときには

$$\dot{q}=\frac{\partial G}{\partial p},\quad q=\frac{\partial G}{\partial\dot{p}},\quad -\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial G}{\partial t}$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial\dot{p}}-\frac{\partial G}{\partial p}=0 \tag{5}$$

が Lagrange 方程式の双対方程式であり，p，$\dot{p}$，t だけの方程式になっている。

方程式(2)または(3)の双対方程式を求めてみよう。

$$G(p,\dot{p},t)=e^{-\frac{\beta}{m}t}\left(\frac{1}{2m}p^2-\frac{1}{2K}\dot{p}^2\right) \tag{6}$$

であるから双対方程式は

$$e^{-\frac{\beta}{m}t}(m\ddot{p}-\beta\dot{p}+Kp)=0 \tag{7}$$

となる。(7)は(4)に対応する方程式である。積分因子を除くと

$$m\ddot{p}-\beta\dot{p}+Kp=0 \tag{8}$$

が得られる。(8)は(2)に対応する方程式である。

(7), (8)は(4), (2)において $\beta\to-\beta$ にした方程式であり，正抵抗が負抵抗に，またその逆がおこっていると考えられる。その意味で双対と名付けた。

Gを経由するこのやり方で共役運動方程式がいつも求まるだろうか？ 別の例をあげる。

$$L=\dot{q}\ln\dot{q}-\gamma q-(\dot{q}-1) \tag{9}$$

に対する運動方程式は

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}=0 \tag{10}$$

である。これに対する $G(p,\dot{p},t)$ をつくると

$$G=\mathrm{e}^{p}-1 \tag{11}$$

となり，Gー系でpに共役な変数は循環座標となるから方程式は

$$\dot{p}=0 \tag{12}$$

となってしまう。ところが，Hamilton 方程式から

$$\dot{p}=-\gamma \tag{13}$$

であり，共役な運動方程式をつくると

$$\mathrm{e}^{p}(\ddot{p}+\dot{p}^{2}-\gamma^{2})=\mathrm{e}^{p}\ddot{p}=0 \tag{14}$$

が得られて(12)は(14)の特殊な場合となる。いづれにせよ，Gからきれいな双対方程式が得られるのはかなり限られた場合である。

§3. 2つの非線形方程式

上の積分因子は damping factorに関係したものとして首肯できる。ところが積分因

子は他にもある。Havas[4]の求めたものを考えよう。

$$L=\frac{2\dot{q}+\gamma q}{2q\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\tan^{-1}\left(\frac{2\dot{q}+\gamma q}{2q\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\right)-\frac{1}{2}\ln(\dot{q}^2+\gamma q\dot{q}+\omega^2 q^2)$$

から出発すると，運動方程式として

$$\frac{\ddot{q}+\gamma\dot{q}+\omega^2 q}{\dot{q}^2+\gamma q\dot{q}+\omega^2 q^2}=0 \tag{15}$$

が得られる。(15)については残念ながら $G(p,\dot{p},t)$ を求めることができない。それは q. $\dot{q}$ を p，$\dot{p}$ のみで表わせないからである。それ故(15)に対応する p，$\dot{p}$ のみで表わされた運動方程式を書き下せない。積分因子の意味もこのままでは不明である。積分因子のために(15)は形式上，非線形方程式であることは注目に価する。

(15)の分子，つまり(1)に帰着される非線形方程式２つで積分因子の意味を考えてみる。

$$y\ddot{y}-2\dot{y}^2+\gamma y\dot{y}-\omega^2 y^2=0 \tag{16}$$

は　$y=\frac{1}{q}$　なる変換で(1)に帰着される。

Riccati 方程式は Riccati 変換で線形化される。(1)に帰着されるものとして定数係数を考える。

$$\dot{x}+c+kx+Kx^2=0 \tag{17}$$

(17)の線形化は広田氏の講義ノート[5]にあるように

$$x\equiv\frac{g(t)}{f(t)} \tag{18}$$

とおけばよい。ここで

$$g(t)=\mathrm{e}^{-kt}p(t),\quad f(t)=Kq(t) \tag{19}$$

とすれば，$q(t)$ を位置座標，$p(t)$ を共役運動量とする Hamiltonian system((3)に対応する。)

$$H(q,p,t)=\mathrm{e}^{kt}\frac{cK}{2}q^2+\mathrm{e}^{-kt}\frac{1}{2}p^2 \tag{20}$$

から得られる線形散逸方程式に帰着される。(20)は(3)に対応する Hamiltonian である。こ

のことは逆に考えると，共役変数の組 (q , p) で記述される力学系が(18)の変換により 1 変数 $x(t)$ で完全に記述できることを示す。位相平面上の運動が一次元の直線上の運動に置き換えられる。保存系であれば初期条件を与えれば位相平面上の閉曲線だけで運動が記述できることから理解できる。N 個の振動子系で N 個のノルマル・モードがあれば $2N$ 次元の位相空間を N 次元の空間に次元をへらせる。散逸系についても積分因子を考えれば保存系と同じことがいえることをこの例は示している。

単に(17)を線形化するだけなら，ふつうは

$$x=\frac{1}{K}\frac{\dot{q}}{q} \tag{21}$$

とおいて(1)に帰着させる。

つぎに積分因子の付いた(15)に変換される 2 つの非線形方程式を考える。

$$\frac{y\ddot{y}+\gamma y\dot{y}-2\dot{y}^2-\omega^2 y^2}{-\dot{y}^2+\gamma y\dot{y}-\omega^2 y^2}=0 \tag{22}$$

が得られる。Riccati 方程式(17)に対しては

$$\frac{\dot{x}+c+kx+Kx^2}{c+kx+Kx^2}=0 \tag{23}$$

が得られる。変換はそれぞれ $y=\dfrac{1}{q}$, $x=\dfrac{1}{K}\dfrac{\dot{q}}{q}$ を用いた。双対方程式も対応する符号が変るだけで同様に考察できる。

(15)に導く Hamiltonian は t をあらわに含まないから保存量となる。その点から(15)の積分因子を考える方が(4)の積分因子を考えるよりよい。

Santilli の本には引用ミスがあるので，正確な Hamiltonian は

$$H(q,p)=-\frac{\gamma}{2}qp-\ln\left\{\cos\left(\frac{qp}{2}\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}\right)\right\}+\ln q \tag{24}$$

である。この保存量はエネルギーの次元をもたない点で保存系の場合と異なる。非線形方程式(22), (23)の保存量も変数変換によって(24)から簡単に求められる。そのような意味からも Havas の積分因子の方が興味深い。

§ 4.　積分因子の解釈

(23)をじーっと眺めてみると

$$\frac{\dot{x}+f(x)}{f(x)}=0 \tag{25}$$

なる形をしていることがわかる。これは

$$\dot{x}+f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{f(x)}+1=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}+f(x)}{f(x)}=0$$

と変形されたものと考えられる。

同様に(22)を見つめると

$$\frac{y\ddot{y}-\dot{y}^2+f(y,\dot{y})}{f(y,\dot{y})}=0 \tag{26}$$

なる形をしている。これは最初に方程式

$$y\ddot{y}-\dot{y}^2+f(y,\dot{y})=0 \tag{27}$$

から出発して変形されたものと理解される。

もしも Riccati 方程式を広田微分[5)]

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=D_t(x\cdot 1) \tag{28}$$

を使って書くと

$$D_t(x\cdot 1)+f(x)=0 \tag{29}$$

になることから類推して，(27)式も

$$D_t(\dot{y}\cdot y)+f(y,\dot{y})=0 \tag{30}$$

なる形に書いてみる。そうすると(26)は

$$\frac{D_t(\dot{y}\cdot y)+f(y,\dot{y})}{f(y,\dot{y})}=0 \tag{31}$$

なる形になっていて Riccati 方程式と似た形になっている。Riccati 方程式は，1と x で表わしたもの，(31)は y，$\dot{y}$ で表わしたものといえる。この例から広田微分は非線形方程式では自然な演算子であることが想像される。

以上の2例は非線形方程式に変換して積分因子の意味を考えてみたが，変換しないで，

(15)そのものを考察してみよう。(1)をD_t-演算子を使って書き直すと

$$D_t(\dot{q}\cdot q)+\dot{q}^2+\gamma q\dot{q}+\omega^2 q^2=0 \tag{32}$$

となる。つまり，この場合も

$$D_t(\dot{q}\cdot q)+f(\dot{q},q)=0$$

の形になっている。そうするとただちに

$$\frac{D_t(\dot{q}\cdot q)+f(\dot{q},q)}{f(\dot{q},q)}=0 \tag{33}$$

としたものがHavas の積分因子を使った方程式(15)であることがわかる。

広田微分を使うと一見複雑に見えるHavasの積分因子が簡明に理解される。以上のことから非線形の常微分方程式は１階なら

$$D_t(x\cdot 1)+f(x,1)=0$$

の形にする。２階なら

$$D_t(\dot{x}\cdot x)+f(\dot{x},x)=0$$

の形にする。高階もこの考えを拡張するやり方でやってみると理解しやすくなる可能性を秘めている。

§5. おわりに

積分因子の解釈をHirota の方法で試みたついでに，Hirota 微分とPoisson's bracket の関係について一言述べたい。

$$[f,g]\equiv\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

の定義において，自由度１の場合のみを考えると

$$[f,g]=f_x g_p-f_p g_x$$

となる。HirotaのD_x－演算子は

$$D_x f\cdot g = f_x g - f g_x$$

であるから　$[f, p] = f_x$，　$[g, p] = g_x$ を用いて

$$D_x f\cdot g = [f, p]\, g - f\, [g, p] \tag{34}$$

と書かれる。

(34)で共役変数 p が不必要に顔をのぞかせているが記法を工夫すれば除去できる。

$$D_x^2 f\cdot g = D_x D_x f\cdot g = D_x (f_x\cdot g - f\cdot g_x)$$

なる関係式を用いると

$$D_x^2 f\cdot g = [[f, p], p]\, g - 2\,[f, p]\,[g, p] + f\,[[g, p], p] \tag{35}$$

が得られる。以上において〔　〕は古典力学の Poisson's bracket であるから諸公式はすでに得られている。高階の演算子については長々となるので省略するが，同様に書き下すことができる。

形の上から考えるに，Hirota 演算子は p による微分は実行せず，片方だけ x で微分するので，古典力学と量子力学の中間に位するポアッソンの括弧式といえる。古典力学で非線形を考えると量子論に一歩近ずくという直感に合致していて興味が増す。Lie 代数のような代数的構造が考えられる。

参　考　文　献

1） R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics I. Springer-Verlag (1978).

2） 高橋秀俊：数理と現象．岩波書店（1975）.

3） 戸田盛和：振動論．培風館（1968）.

4） P. Havas, Suppl. Nuovo Cimento 5, 363(1957).

5） 広田良吾：物性研究　Vol. 32 no. 2(1979).