ボーズ多体系における Hamiltonian の集団運動と個別運動及び Residual internal Hamiltonian への分離

東理大 理 物理　五十嵐 靖 則*
中 馬 國 喜
鈴 木 良 治

（1979年9月19日受理）

概要　：　先の論文で示した，系に余分な自由度を導入することなく運動を集団運動と内部運動に分離して取り扱う方法を応用し，強く相互作用し合っているボーズ粒子系の Hamiltonian を集団運動を記述する部分と，個別運動を記述する部分及び，Residual internal Hamiltonian へ，$N^{-1/2}$ の order を無視する近似で分離した。individual Hamiltonian は effective mass を持った free の kinetic term だけでなく，screening された short-range の potential からの項及び zero-point motion と粒子間の相互作用に基づく平均 kinetic energy からの項等から成っている。又 Residual internal Hamiltonian は effective mass を持った free の kinetic term と Residual long-range interaction term 及び collective motion と individual motion によって screening された short-range potential term 等から成っていることがわかった。

§ 1.　はじめに

先[1] の論文で，集団運動を記述する座標 $\xi_{\mathbf{k}}$ は

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}, \quad (|\mathbf{k}| < k_s,\ \mathbf{k} \neq 0) \tag{1-1}$$

と採り S_1 個導入し，これに正準共役な運動量 $\pi_{\mathbf{k}}$ は

$$\pi_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\sqrt{N}\, k^2} \sum_{n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \left\{ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) - \frac{\hbar}{2} k^2 \right\}, \tag{1-2}$$

で，次の交換関係を満足していた。

---

*）IGARASHI Yasunori, CHŪMA Kuniyoshi, SUZUKI Ryoji

$$[\pi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}] = (\hbar/i)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + 0(N^{-1/2}), \quad [\pi_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}'}] = 0 + 0(N^{-1/2}) \tag{1–3}$$

又，$\xi_{\mathbf{k}}$，$\pi_{\mathbf{k}}$ に直交する内部座標 $\mathbf{R}_n$ と運動量 $\mathbf{P}_n$ は次の分離の条件から求められた。即ち，

$$[\pi_{\mathbf{k}}, \mathbf{R}_n] = 0, \quad [\mathbf{P}_n, \xi_{\mathbf{k}}] = 0, \quad [\mathbf{P}_n, \pi_{\mathbf{k}}] = 0。 \tag{1–4}$$

これらの分離の条件から $\mathbf{R}_n$ と $\mathbf{P}_n$ は次の形に求まった。

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{r}_n + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{\mathbf{q}}{q^2}\sum_i e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_i)} \tag{1–5}$$

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{p}_n - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{\mathbf{q}}{q^2}\sum_i e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_i)}\left\{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}_i) + \frac{\hbar}{2}q^2\right\} \tag{1–6}$$

$\mathbf{R}_n$ と $\mathbf{P}_n$ は次の交換関係を満足していた。

$$[\mathbf{P}_n, \mathbf{R}_{n'}] = \lambda(\hbar/i)\delta_{n,n'} + 0(N^{-1/2}), \quad \lambda \equiv \left(1 - \frac{S_1}{3N}\right) \tag{1–7}$$

で，S_1 は collective motion の自由度の数で $S_1 = \dfrac{k_s^3}{6\pi^2}$ である。但し，k_s は phonon の cutoff momentum である。

ボーズ粒子系においては $\mathbf{R}_n$，$\mathbf{P}_n$ で記述されている内部運動に含まれている個別運動を記述する座標 $\eta_{\mathbf{k}}$ は次の形に求まり，

$$\eta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n}, \quad (k_s < |\mathbf{k}| < k_c) \tag{1–8}$$

S_2 個導入した。$\eta_{\mathbf{k}}$ に正準共役な運動量 $\Omega_{\mathbf{k}}$ は

$$\Omega_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\sqrt{N}k^2\lambda}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n}\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\} \tag{1–9}$$

であることがわかる。但し，$\mathbf{R}_n$ 及び $\mathbf{P}_n$ は (1–5)，(1–6) 及び (1–7) 式を満足するものである。$\eta_{\mathbf{k}}$，$\Omega_{\mathbf{k}}$ の交換関係は

$$[\Omega_{\mathbf{k}}, \eta_{\mathbf{k}'}] = (\hbar/i)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + 0(N^{-1/2}) \tag{1–10}$$

なる正準な交換関係を満足している。

このようにして求まった個別変数 $\eta_{\mathbf{k}}$，$\Omega_{\mathbf{k}}$ は集団変数 $\xi_{\mathbf{k}}$，$\pi_{\mathbf{k}}$ と直交していることもわ

かった。

$$\left.\begin{array}{l}[\pi_{\mathbf{k}}, \eta_{\mathbf{k}'}] = 0 + 0(N^{-1/2}), \quad [\Omega_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}] = 0 + 0(N^{-1/2}) \\ \text{又} \\ [\Omega_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}'}] = 0 + 0(N^{-1/2}), \quad [\xi_{\mathbf{k}}, \eta_{\mathbf{k}'}] = 0\end{array}\right\} \qquad (1\text{–}11)$$

をそれぞれ満足していた。又，集団座標 $\xi_{\mathbf{k}}$ と個別座標 $\eta_{\mathbf{k}}$ は configuration space で互いに直交していた。即ち，

$$\sum_{n}(\nabla_{n}\cdot\xi_{\mathbf{k}})\cdot(\nabla_{n}\cdot\eta_{\mathbf{k}'}) = 0 + 0(N^{-1/2}) \qquad (1\text{–}12)$$

又，個別変数 $\eta_{\mathbf{k}}$，$\Omega_{\mathbf{k}}$ は波数kが $k < k_s$ で零になっていることもわかった。即ち，

$$\eta_{\mathbf{k}} = 0 + 0(N^{-1/2}), \quad \Omega_{\mathbf{k}} = 0 + 0(N^{-1/2}) \qquad |\mathbf{k}| < k_s \qquad (1\text{–}13)$$

このことから，ボーズ粒子系では k_s よりも小さい運動量を持った個別励起は存在しないこともわかった。

以下において，集団変数 $\xi_{\mathbf{k}}$，$\pi_{\mathbf{k}}$ 及び個別変数 $\eta_{\mathbf{k}}$，$\Omega_{\mathbf{k}}$ を用いて朝永[2]の手法で系のHamiltonian をCollective Hamiltonian, individual Hamiltonian, residual internal Hamiltonian 等へ分離する。

§ 2. Hamiltonian の kinetic 部分の集団運動と個別運動及び内部運動部分への分離

系の kinetic energy

$$T = \frac{1}{2m}\sum_{n}\mathbf{p}_{n}^{2} \qquad (2\text{–}1)$$

を，集団運動量 $\pi_{\mathbf{k}}$ 及び個別運動量 $\Omega_{\mathbf{k}}$ を含む項と，そうでない項に分離する。そこで，Tを $\pi_{\mathbf{k}}$ 及び $\Omega_{\mathbf{k}}$ 展開する。

$$T = T_{in} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\alpha_1(\mathbf{k})\pi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}^{k_s}\alpha_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')\pi_{\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}^{k_s}\sum_{\mathbf{k}''\neq 0}^{k_s}\alpha_3\pi_{\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}'}\pi_{\mathbf{k}''}$$
$$+\cdots+\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\beta_1(\mathbf{k})\Omega_{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c}\beta_2(\mathbf{k},\mathbf{k}')\Omega_{\mathbf{k}}\Omega_{\mathbf{k}'}$$

$$+\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c}\sum_{|\mathbf{k}''|>k_s}^{k_c}\beta_3\Omega_{\mathbf{k}}\Omega_{\mathbf{k}'}\Omega_{\mathbf{k}''}+\cdots+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_s}\sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c}\theta(\mathbf{k},\mathbf{k}')\pi_{\mathbf{k}}\Omega_{\mathbf{k}'} \tag{2-2}$$

ここで，T_{in} は $\pi_{\mathbf{k}}$ 及び $\Omega_{\mathbf{k}}$ を含んでいない。又各係数 α_1，α_2，…及び β_1，β_2，…及び θ は $\pi_{\mathbf{k}}$ 及び $\Omega_{\mathbf{k}}$ を含んでいないので各係数は次の分離の条件を満足するように決定する。

$$[T_{in},\ \xi_{\mathbf{k}}]=0,\quad [T_{in},\ \eta_{\mathbf{k}}]=0,\ \text{及び}\ [\alpha_1,\ \xi_{\mathbf{k}}]=0,\ \cdots,$$

$$[\beta_1,\ \eta_{\mathbf{k}}]=0,\ \cdots,\ \text{又}\ [\alpha_1,\ \eta_{\mathbf{k}}]=0,\ \cdots,\quad [\beta_1,\ \xi_{\mathbf{k}}]=0,\ \cdots,$$

$$\text{及び}\quad [\theta,\ \xi_{\mathbf{k}}]=0,\quad [\theta,\ \eta_{\mathbf{k}}]=0 \tag{2-3}$$

及び $\pi_{\mathbf{k}}$，$\xi_{\mathbf{k}}$ と $\Omega_{\mathbf{k}}$，$\eta_{\mathbf{k}}$ の直交条件 (1–11) 式も考慮する。

まず，

$$\begin{aligned}[T,\ \xi_{\mathbf{k}}]=&\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\alpha_1(\mathbf{q})\,[\pi_{\mathbf{q}},\ \xi_{\mathbf{k}}]+\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\sum_{\mathbf{l}\neq0}^{k_s}\alpha_2(\mathbf{q},\mathbf{l})\,[\pi_{\mathbf{q}}\pi_{\mathbf{l}},\ \xi_{\mathbf{k}}]\\ &+\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\sum_{\mathbf{l}\neq0}^{k_s}\sum_{\mathbf{m}\neq0}^{k_s}\alpha_3(\mathbf{q},\mathbf{l},\mathbf{m})\,[\pi_{\mathbf{q}}\pi_{\mathbf{l}}\pi_{\mathbf{m}},\ \xi_{\mathbf{k}}]+\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\sum_{|\mathbf{l}|>k_s}^{k_c}\theta(\mathbf{q},\mathbf{l})\\ &\cdot[\pi_{\mathbf{q}},\ \xi_{\mathbf{k}}]\cdot\Omega_{\mathbf{q}}+\cdots\\ =&(\hbar/i)\alpha_1(\mathbf{k})+2(\hbar/i)\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\alpha_2(\mathbf{q},\mathbf{k})\pi_{\mathbf{q}}+3(\hbar/i)\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}\sum_{\mathbf{l}\neq0}^{k_s}\alpha_3(\mathbf{q},\mathbf{l},\mathbf{k})\\ &\cdot\pi_{\mathbf{q}}\pi_{\mathbf{l}}+\cdots+(\hbar/i)\sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c}\theta(\mathbf{k},\mathbf{q})\Omega_{\mathbf{q}}\end{aligned} \tag{2-4}$$

ところで，左辺の $[T,\ \xi_{\mathbf{k}}]$ は (1–1) 及び (2–1)，(1–2) から，

$$[T,\ \xi_{\mathbf{k}}]=(\hbar/i)\frac{k^2}{m}\pi_{-\mathbf{k}}\qquad(\ |\mathbf{k}|<k_s\ ) \tag{2-5}$$

であるから，$\alpha_3=0,\cdots=0$，及び $\theta(\mathbf{k},\ \mathbf{q})=0$ (2–6)

であることがわかる。従って

$$[\,[T,\ \xi_{\mathbf{k}}],\ \xi_{\mathbf{k}'}]=2(\hbar/i)^2\alpha_2(\mathbf{k}',\ \mathbf{k})$$

$$\therefore\quad \alpha_2(\mathbf{k}',\mathbf{k})=\frac{(i/\hbar)^2}{2}[\,[T,\xi_{\mathbf{k}}],\ \xi_{\mathbf{k}'}] \tag{2-7}$$

$$\therefore\quad \alpha_1(\mathbf{k})=(i/\hbar)\,[T,\xi_{\mathbf{k}}]-(i/\hbar)^2\sum_{\mathbf{q}\neq0}^{k_s}[\,[T,\xi_{\mathbf{k}}],\ \xi_{\mathbf{q}}]\cdot\pi_{\mathbf{q}} \tag{2-8}$$

ところで，(2–5) から $[[T, \xi_{\mathbf{k}}], \xi_{\mathbf{q}}] = (\hbar/i)^2 \frac{k^2}{m} \delta_{\mathbf{k}\,-\mathbf{q}}$ であるから，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \frac{1}{2}\frac{k^2}{m}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ \alpha_1(\mathbf{k}) &= \frac{k^2}{m}\pi_{-\mathbf{k}} - \frac{k^2}{m}\pi_{-\mathbf{k}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2–9}$$

同様にして，

$$\left.\begin{aligned} \beta_2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \frac{(i/\hbar)}{2}[[T, \eta_{\mathbf{k}}], \eta_{\mathbf{k}'}] \\ \beta_1(\mathbf{k}) &= (i/\hbar)[T, \eta_{\mathbf{k}}] - (i/\hbar)^2 \sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c} [[T, \eta_{\mathbf{k}}], \eta_{\mathbf{q}}]\Omega_{\mathbf{q}} \end{aligned}\right\} \tag{2–10}$$

を得る。そこで $[T, \eta_{\mathbf{k}}]$ を計算すると結果は次の様になる。

$$[T, \eta_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{2m}\sum_n [\mathbf{p}_n^2, \eta_{\mathbf{k}}] = \frac{(\hbar/i)}{m} k^2 \lambda \Omega_{-\mathbf{k}} = \frac{(\hbar/i)}{m^*} k^2 \Omega_{-\mathbf{k}} \tag{2–11}$$

を得る。ここで，$m^* = \frac{1}{\lambda} m = \frac{m}{\left(1 - \frac{S_1}{3N}\right)}$ (2–12)

である。従って，$[[T, \eta_{\mathbf{k}}], \eta_{\mathbf{q}}] = (\hbar/i)^2 \frac{k^2}{m^*} \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{q}}$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \beta_2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \frac{1}{2}\frac{k^2}{m^*}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ \beta_1(\mathbf{k}) &= \frac{k^2}{m^*}\Omega_{-\mathbf{k}} - \frac{k^2}{m^*}\Omega_{-\mathbf{k}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2–13}$$

を得る。

(2–6), (2–9), (2–13) 及び (2–2) 式より，系の Hamiltonian の kinetic part は次の様に分離された。

$$T = T_{in} + T_c + T_{ind} \tag{2–14}$$

ここで，T_c は Collective Hamiltonian の kinetic part を，T_{ind} は individual Hamiltonian の kinetic part を又 T_{in} は内部 Hamiltonian の kinetic part をそれぞれ表わし，以下の通りである。

$$T_c = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \frac{k^2}{m}\pi_{\mathbf{k}}\pi_{-\mathbf{k}} \tag{2–15a}$$

$$T_{ind} = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c} \frac{k^2}{m^*} \Omega_{\mathbf{k}} \Omega_{-\mathbf{k}} \tag{2-15b}$$

$$T_{in} = T - (T_c + T_{ind}) \tag{2-15c}$$

§ 3. 内部 Hamiltonian の kinetic part の集団運動と個別運動及び Residual internal motion部分への分離

上で求めた内部 Hamiltonian の kinetic part T_{in} にはもはや $\pi_{\mathbf{k}}$ や $\Omega_{\mathbf{k}}$ は含まれていないが，$\xi_{\mathbf{k}}$ や $\eta_{\mathbf{k}}$ を含んでいる。そこで，T_{in} から $\xi_{\mathbf{k}}$ や $\eta_{\mathbf{k}}$ を含む項とそうでない項に分離する。分離の仕方は朝永[2] に従って，T_{in} を $\xi_{\mathbf{k}}$・$\eta_{\mathbf{k}}$ 展開する。我々は $N^{-1/2}$ の order を無視する近似を用いているので $\xi_{\mathbf{k}}$・$\eta_{\mathbf{k}}$ の二次まで求めれば良い。

$$\begin{aligned} T_{in} = T_{in}^0 &+ \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \xi_{\mathbf{k}} T_{c,1}(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \sum_{\mathbf{k}'\neq 0}^{k_s} \xi_{\mathbf{k}} \cdot \xi_{\mathbf{k}'} T_{c,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}') + \cdots \\ &+ \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c} \eta_{\mathbf{k}} T_{ind,1}(\mathbf{k}) + \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c} \sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c} \eta_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}'} T_{ind,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}') + \cdots \\ &+ \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c} \xi_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}'} T_{int}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \end{aligned} \tag{3-1}$$

ここで，T_{in}^0 は $\xi_{\mathbf{k}}$ 及び $\eta_{\mathbf{k}}$ を含んでいない。又各係数 $T_{c,1}$, …及び$T_{ind,1}$ …及び T_{ind} も $\xi_{\mathbf{k}}$ 及び $\eta_{\mathbf{k}}$ を含んでいないので，各係数は次の分離の条件を満足するように決定する。

$$\begin{aligned} &[T_{in}^0, \pi_{\mathbf{k}}] = 0, \quad [T_{in}^0, \Omega_{\mathbf{k}}] = 0 \text{及び} [T_{c,1}, \pi_{\mathbf{k}}] = 0, \ \cdots \\ &[T_{ind,1}, \Omega_{\mathbf{k}}] = 0, \ \cdots, \ \text{又} [T_{c,1}, \Omega_{\mathbf{k}}] = 0, \ \cdots, \ [T_{ind,1}, \pi_{\mathbf{k}}] = 0, \ \cdots, \\ &\text{及び} [T_{int}, \pi_{\mathbf{k}}] = 0, \quad [T_{int}, \Omega_{\mathbf{k}}] = 0 \end{aligned} \tag{3-2}$$

又，$\pi_{\mathbf{k}}$，$\xi_{\mathbf{k}}$ と $\Omega_{\mathbf{k}}$，$\eta_{\mathbf{k}}$ の直交条件 (1−11) 式も考慮する。

まず，(3−1) 式から $\pi_{\mathbf{k}}$ と T_{in} の交換関係を求める。

$$[\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}] = (\hbar/i) T_{c,1}(\mathbf{k}) + 2(\hbar/i) \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \xi_{\mathbf{q}} T_{c,2}(\mathbf{q},\mathbf{k}) + (\hbar/i) \sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c} \eta_{\mathbf{q}} T_{int}(\mathbf{q},\mathbf{k})$$

$$[\pi_{\mathbf{k}'}, [\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}]] = 2(\hbar/i)^2 T_{c,2}(\mathbf{k}',\mathbf{k}), \quad \therefore T_{c,2}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{(i/\hbar)^2}{2} [\pi_{\mathbf{k}'}, [\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}]]$$

$$\therefore T_{c,1}(\mathbf{k}) = (i/\hbar) [\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}] - (i/\hbar)^2 \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \xi_{\mathbf{q}} [\pi_{\mathbf{q}}, [\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}]] - \sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c} \eta_{\mathbf{q}} T_{int}(\mathbf{q},\mathbf{k})$$

ところで，左辺の $[\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}]$ は(2−15 c)及び(2−15 a, b)，(1−2)及び(1−11)から

$$[\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}] = [\pi_{\mathbf{k}}, T] - [\pi_{\mathbf{k}}, (T_c + T_{ind})]$$

$$= [\pi_{\mathbf{k}}, T]$$

$$= \frac{(\hbar/i)}{m\sqrt{N}\,k^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\} \qquad (3-3)$$

$$[\pi_{\mathbf{k}'}, [\pi_{\mathbf{k}}, T_{in}]] = -\frac{(\hbar/i)^2}{mNk^2k'^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\sum_n e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_n}[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{p}_n)$$
$$-\hbar(k^2-k'^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \hbar\{k^2+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{p}_n)$$
$$+\frac{\hbar^2}{4}\{k^4 - 2k^2k'^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')k'^2\}] \qquad (3-4)$$

従って，$T_{c,2}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{mNk^2k'^2}\sum_n e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_n}[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{p}_n)$

$$-\hbar^2(k^2-k'^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \hbar\{k^2+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{p}_n) + \frac{\hbar^2}{4}\{k^4 - 2k^2k'^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')k'^2\}]$$

他方，$T_{c,2}(-\mathbf{k}\ \mathbf{k}) = \frac{1}{2}\frac{1}{mNk^2}\sum_n [3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)^2 + \frac{\hbar^2}{4}k^4]$。

$T_{c,2}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ は $T_{c,2}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ に対して $N^{-\frac{1}{2}}$ の order の大きさ故，我々の近似から，$T_{c,2}(-\mathbf{k}, \mathbf{k})$ に対して無視する。この無視する項は phonon-phonon interaction の lowest order term に相当している。又，$T_{c,2}(-\mathbf{k}, \mathbf{k})$ は Collective Hamiltonian の potential energy part の $\xi_{\mathbf{k}}\xi_{-\mathbf{k}}$ の係数であるから，系の基底状態でとった期待値で置くことができる。

即ち，

$$T_{c,2}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2}[2\langle T\rangle + \frac{\hbar^2k^2}{4m}] \qquad (3-5)$$

ここで $\langle T\rangle$ は基底状態での一粒子当りの平均運動 energy で，

$$\langle T\rangle = \langle 0 | \frac{1}{2mN}\sum_n \mathbf{p}_n^2 | 0\rangle \qquad (3-6)$$

を表わす。従って，

$$T_{c,1}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left[2\langle T\rangle - \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2\rangle\right] - \sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c}\eta_{\mathbf{q}}T_{int}(\mathbf{q},\mathbf{k}) \quad (3\text{–}7)$$

(3−7)を(3−1)に代入すれば，T_{in}の展開の中で，Collective motion と individual motion との interaction term $\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c}\xi_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}'}T_{int}(\mathbf{q},\mathbf{k})$ は落ちることがわかる。

同様にして，係数 $T_{ind,1}$，$T_{ind,2}$ を求める。

$$[\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}] = (\hbar/i)T_{ind,1}(\mathbf{k}) + 2(\hbar/i)\sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c}\eta_{\mathbf{q}}T_{ind,2}(\mathbf{q},\mathbf{k})$$

$$[\Omega_{\mathbf{k}'}, [\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}]] = 2(\hbar/i)^2T_{ind,2}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$$

$$\therefore T_{ind,2}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{(i/\hbar)^2}{2}[\Omega_{\mathbf{k}'}, [\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}]]$$

$$T_{ind,1}(\mathbf{k}) = (i/\hbar)[\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}] - (i/\hbar)^2\sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_c}\eta_{\mathbf{q}}[\Omega_{\mathbf{q}}, [\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}]]$$

左辺の $[\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}]$ は(2−15c)及び(2−15a, b)，(1−5)，(1−6)，(1−7)，(1−9)及び(1−11)から

$$[\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}] = [\Omega_{\mathbf{k}}, T] = \frac{(\hbar/i)}{m\sqrt{N}k^2\lambda^2}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n}\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\}^2 \quad (3\text{–}8)$$

又，
$$[\Omega_{\mathbf{k}'}, [\Omega_{\mathbf{k}}, T_{in}]] = \frac{(\hbar/i)^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{mNk^2k'^2\lambda^2}\sum_n e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{R}_n}\Big[2\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}\mathbf{k}^2\lambda\right\} - \left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\}^2 - \hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\lambda\left\{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k'^2\lambda\right\}\Big] \quad (3\text{–}9)$$

従って，
$$T_{ind,2}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{mNk^2k'^2\lambda^2}\sum_n e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{R}_n}\Big[2\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\}$$
$$\cdot\left\{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\} - \left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\lambda\right\}^2$$
$$-\hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\lambda\left\{(\mathbf{k}',\mathbf{P}_n) - \frac{\hbar}{2}k'^2\lambda\right\}\Big]$$

他方，
$$T_{ind,2}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{mNk^2}\sum_n(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)^2 + \frac{\hbar^2k^2}{4m}\right]$$

$T_{ind,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ は $T_{ind,2}(-\mathbf{k},\mathbf{k})$ に対して $N^{-1/2}$ の order の大きさであるので，$T_{ind,2}(-\mathbf{k},\mathbf{k})$ に対して無視する。従って，kinetic energy からの individual Hamiltonian の potential energy part への係数 $T_{ind,2}(-\mathbf{k},\mathbf{k})$ は

$$T_{ind,2}(-\mathbf{k},\mathbf{k})=\frac{1}{2}\left[2<T>+\frac{\hbar^2k^2}{4m}\right] \tag{3-10}$$

となり，又 $T_{ind,1}(\mathbf{k})$は

$$T_{ind,1}(\mathbf{k})=-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left[2<T>-\frac{2}{3}<\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2>\right] \tag{3-11}$$

と求まる。

従って，(3−5)，(3−7)，(3−10)，(3−11)及び(3−1)式より，内部 Hamiltonian の kinetic part T_{in} は次の様に分離された。

$$T_{in}=T_{in}^0+T_p^c+T_p^{ind}+T'_{c,in}+T'_{ind,in} \tag{3-12}$$

ここで，T_p^c は kinetic part からの Collective Hamiltonian の potential part，T_p^{ind}は同じく individual Hamiltonian の potential part. $T'_{c,in}$，$T'_{ind,in}$はそれぞれ kinetic part からの Collective motion と Residual internal motion との interaction term と individual motion と Residual internal motion との interaction term を表わし，以下の通りである。

$$T_p^c=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\left[2<T>+\frac{\hbar^2k^2}{4m}\right]\cdot\xi_{\mathbf{k}}\xi_{-\mathbf{k}} \tag{3-13a}$$

$$T_p^{ind}=\frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\left[2<T>+\frac{\hbar^2k^2}{4m}\right]\eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}} \tag{3-13b}$$

$$T'_{c,in}=-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left[2<T>-\frac{2}{3}<\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2>\right]\xi_{\mathbf{k}} \tag{3-13c}$$

$$T'_{ind,in}=-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left[2<T>-\frac{2}{3}<\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2>\right]\eta_{\mathbf{k}} \tag{3-13d}$$

$$T_{in}^0=T-(T_p^c+T_p^{ind}+T'_{c,in}+T'_{ind,in}) \tag{3-13e}$$

§ 4. Hamiltonianの potential energy 部分の集団運動と個別運動及び residual internal motion 部分への分離

次に我々は，全系の potential energy

$$V=\frac{1}{2}\sum_{n\neq n'}\sum V(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})=\frac{1}{2}\sum_{n\neq n'}\sum\sum_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \tag{4-1}$$

但し，$V_{\mathbf{k}}$ は potential の Fourier 係数である。

を $\xi_{\mathbf{k}}$ を含む項，$\eta_{\mathbf{k}}$を含む項及び $\xi_{\mathbf{k}}$・$\eta_{\mathbf{k}}$両者共含まない項に分離する。分離の仕方は先程の T_{in} の場合と同様に朝永の方法に従って，V を $\xi_{\mathbf{k}}$，$\eta_{\mathbf{k}}$ 展開する。

$$V = V_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} V_{c,1}(\mathbf{k})\,\xi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}^{k_s} V_{c,2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\,\xi_{\mathbf{k}}\,\xi_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c} V_{ind,1}(\mathbf{k})\,\eta_{\mathbf{k}}$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}^{k_c} V_{ind,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\eta_{\mathbf{k}}\,\eta_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c} V_{int}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\xi_{\mathbf{k}}\,\eta_{\mathbf{k}'} \tag{4-2}$$

と展開する。

ここで，V_0 は $\xi_{\mathbf{k}}$ 及び $\eta_{\mathbf{k}}$ を含まない。又各係数 $V_{c,1}$，…，$V_{ind,1}$，…，及び V_{int} 等も $\xi_{\mathbf{k}}$ 及び $\eta_{\mathbf{k}}$ 共に含んでいないものとする。従って，分離の条件は次の通りである。

$$[\pi_{\mathbf{k}},\ V_0] = 0,\quad [\Omega_{\mathbf{k}},\ V_0] = 0,\ 及び\ [\pi_{\mathbf{k}},\ V_{c,1}] = 0,\ \cdots,$$
$$[\Omega_{\mathbf{k}},\ V_{ind,1}] = 0,\ \cdots,\ 及び\ [\pi_{\mathbf{k}},\ V_{ind,1}] = 0,\ \cdots,\quad [\Omega_{\mathbf{k}},\ V_{c,1}] = 0,\ \cdots,$$

又，

$$[\pi_{\mathbf{k}},\ V_{int}] = 0,\quad [\Omega_{\mathbf{k}},\ V_{int}] = 0, \tag{4-3}$$

を満足するものとする。

V_0及び各係数は条件（4—3）及び（1—11）式を満足する様に決定する。

$$V_{c,1}(\mathbf{k}) = (i/\hbar)\,[\pi_{\mathbf{k}},\ V] - (i/\hbar)^2 \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} [\pi_{\mathbf{q}},\ [\pi_{\mathbf{k}}, V]]\,\xi_{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|>k_s}^{k_s} V_{int}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})\,\eta_{\mathbf{q}} \tag{4-4}$$

$$V_{c,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \frac{(i/\hbar)^2}{2}\,[\pi_{\mathbf{k}'},\ [\pi_{\mathbf{k}},\ V]] \tag{4-5}$$

ところで，$N^{-1/2}$ の order を無視する我々の近似で，

$$[\pi_{\mathbf{k}}, V] = (\hbar/i)\sqrt{N}\ V_{\mathbf{k}}\cdot \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \tag{4-6}$$

又，$$[\pi_{\mathbf{k}'},\ [\pi_{\mathbf{k}}, V]] = -\frac{(\hbar/i)^2}{k'^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\,N V_{\mathbf{k}}\,\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \tag{4-7}$$

であるから，（4—7）と（4—5），（4—4）から

$$\left.\begin{aligned} V_{c,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}') &= -\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{2} N V_{\mathbf{k}} \cdot \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ V_{c,1}(\mathbf{k}) &= \sqrt{N}\, V_{\mathbf{k}} \cdot \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} - \frac{N}{k^2} V_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}') \cdot \xi_{\mathbf{k}} \\ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}8)$$

を得る。(4—4)を(4—2)に代入すればわかるように，collective motion と individual motionと interaction term $\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c} V_{int}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\xi_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}'}$ は落ちる。
即ち，

$$\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} \sum_{|\mathbf{k}'|>k_s}^{k_c} V_{int}(\mathbf{k}\,\mathbf{k}')\xi_{\mathbf{k}}\cdot\eta_{\mathbf{k}'} = 0 \quad (4\text{-}9)$$

同様にして，$V_{ind,1}(\mathbf{k})$ 及び $V_{ind,2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')$ を求めると，

$$\begin{aligned} V_{ind,1}(\mathbf{k}) &= 0 \\ V_{ind,2}(\mathbf{k},\mathbf{k}') &= -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k'^2} N V_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k'^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q})}{q^2k^2} \\ &\quad \cdot(\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{q}))\, V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\,\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (4\text{-}10)$$

従って，全系の Hamiltonian の potential energy part は次の様に分離された。

$$V = V_0 + V_c + V_{ind} \quad (4\text{-}11)$$

ここで，V_c は Collective Hamiltonian の potential part，V_{ind} は individual Hamiltonian の potential part を又 V_0 は residual internal Hamiltonian の potential part をそれぞれ表わしており，以下の通りである。

$$\left.\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} N V_{\mathbf{k}}\cdot\xi_{\mathbf{k}}\xi_{-\mathbf{k}} \\ V_{ind} &= \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\left[N V_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q})}{q^2\cdot k^2}(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q}))V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right]\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}} \\ V_0 &= V - (V_c + V_{ind}) \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}12)$$

§ 5. Collective and individual excitations

以上の結果から系の Hamiltonian は次の様に分離された。

$$H = H_c + H_{ind} + H_{R\cdot I} + H'_{c.\,in} + H'_{ind,\,in} \tag{5—1}$$

ここで H_c は Collective Hamiltonian を，H_{ind} は individual Hamiltonian, $H_{R.I}$ は residual internal Hamiltonian, $H'_{c,\,in}$ は Collective motion と residual internal motion との interaction Hamiltonian, $H'_{ind,\,in}$ は individual motion と residual internal motion との interaction Hamiltonian, をそれぞれ表わし，以下の通りである。

$$H_c = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\frac{k^2}{m}\pi_{\mathbf{k}}\pi_{-\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}[NV_{\mathbf{k}} + 2\langle T\rangle + \frac{\hbar^2 k^2}{4m}]\xi_{\mathbf{k}}\xi_{-\mathbf{k}} \tag{5—2a}$$

$$H_{ind} = \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\frac{k^2}{m^*}\Omega_{\mathbf{k}}\Omega_{-\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}[NV_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q})}{q^2k^2}(\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{q}))V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$$
$$+ 2\langle T\rangle + \frac{\hbar^2k^2}{4m}]\eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}} \tag{5—2b}$$

$$H_{R\cdot I} = \frac{1}{2M}\sum_n \mathbf{p}_n^2 - \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\frac{\hbar^2k^2}{4m} - \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_m)}{2mNk^2}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}$$
$$+ \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum\frac{S_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_m)}{6mN^2k^2}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum\frac{\hbar[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_m)]}{4mN}$$
$$\cdot e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)} - \sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum\frac{S_1\hbar[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_m)]}{12mN^2}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}$$
$$- \sum_{|k|>k_s}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum\frac{S_1\hbar^2k^2}{24mN^2}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)} + [\langle T\rangle - \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2\rangle]$$
$$\cdot\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\sum_{n\neq m}\sum e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)} + \frac{1}{2}\sum_{n\neq m}\sum\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}V_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}$$
$$-\frac{1}{2N}\sum_{n\neq m}\sum\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}\frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{q})}{q^2k^2}(\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{q}))V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}$$
$$+\frac{1}{2}N^2V_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}=0) - \frac{1}{2}N\sum_{\mathbf{k}=0}^{k_c}V_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}V_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s}$$
$$\cdot\frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{q})}{q^2k^2}(\mathbf{k}(\mathbf{k}+\mathbf{q}))V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \tag{5—2c}$$

ここで，$M \equiv (1-\frac{\alpha}{3N})^{-1}m$，$\alpha \equiv \sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s} + \lambda\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}$ である。

$$H'_{c,\,in} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_s}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}[2\langle T\rangle - \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2\rangle]\xi_{\mathbf{k}} \tag{5—2d}$$

$$H'_{ind,\,in} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{|\mathbf{k}|>k_s}^{k_c}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}[2\langle T\rangle - \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2\rangle]\eta_{\mathbf{k}} \tag{5—2e}$$

Collective motion と residual internal motion との interaction $H'_{c,\,in}$ が小さいとすれば，

(5−2a)から， collective excitation energy $\varepsilon_c(\mathbf{k})$は

$$\varepsilon_c(\mathbf{k})= \left[\frac{\hbar^2 N}{m} V_{\mathbf{k}} k^2 + 2\langle T\rangle \frac{\hbar^2 k^2}{m} + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (|\mathbf{k}|\leq k_s) \qquad (5-3)$$

と求まる。

又， individual excitation energy $\varepsilon_{ind}(\mathbf{k})$は individual motion と residual internal motion との interaction $H'_{ind,\, in}$ が小さいと仮定すれば，

$$\varepsilon_{ind}(\mathbf{k})= \left[\frac{m}{m^*}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + 2\langle T\rangle \frac{\hbar^2 k^2}{m^*} + \frac{\hbar^2 N V_{\mathbf{k}}}{m^*} k^2 + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}^{k_s} \frac{((\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q})}{m^* q^2} (\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})) V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right]^{1/2} \qquad (k_s < |\mathbf{k}| < k_c) \qquad (5-4)$$

と求まる。

§ 6. 終りに

集団運動の最も一般的な手法は朝永[2] によって示されたが，内部運動の取り扱いの問題は今後の研究に委ねられていた。我々は内部運動についても取り扱いが可能となるように朝永の精神に沿って，系に余分な自由度を導入することなく，粒子座標と運動量を集団変数 $\xi_{\mathbf{k}}$，$\pi_{\mathbf{k}}$， と内部変数 $\eta_{\mathbf{k}}$，$\Omega_{\mathbf{k}}$ へ$N^{-1/2}$ の order を無視する近似ではあるが，変換し，集団運動と個別運動を分離して取り扱う手法の第一歩を得，系の Hamiltonian を集団運動と個別運動及び residual internal motion 部分へ分離することができた。

分離された Collective Hamiltonian は，西山[3] の得たものと同じである。又 individual Hamiltonian は effective mass を持った free の kinetic term だけでなく， Screening された short-range の potential からの項及び zero-point motion と粒子間の相互作用に基づく平均 kinetic energy term からの項等から成っている。又， residual internal Hamiltonian は effective mass を持った free の kinetic term と residual long-range interaction term 及び collective motion 及び individual motion によって Screening された short-range potential term 等より成っていることがわかる。

zero-point motion と粒子間の相互作用に基づく平均運動 energy term は，例えば He Ⅱの場合には，多くの実験[4] や理論[5] 的研究から知られている様に，けっして小さくはなく， Bogoliubov 近似[6] を使って落とすわけにはいかない。又，He Ⅱ の phonon dispersion の問題等には大切な項である。

我々の得た結果を He Ⅱ の問題へ応用し， phonon, roton energy spectrum 等の算出は次回に報告したい。

Reference

1) 五十嵐靖則，中馬國喜，鈴木良治　物性研究（ 1979年7月号に載る予定）

2) S. Tomonaga: Prog. Theor. Phys. **13** (1955) 467, 482

3) T. Nishiyama: Prog. Theor. Phys. **17** (1957) 711

4) O. K. Harling: Phys. Rev. **A3** (1971) 1073

H. A. Mook, S. Scherm and M. K. Wilkinson: Phys. Rev. **A6** (1972) 2268

H. A. Mook: Phys. Rev. Lett. **32** (1972) 1167

5) W. L. McMillian: Phys. Rev. **138** (1965) A442

W. E. Parry, C. R. Rathobone, Proc. Phys. Soc. **91** (1967) 273

W. E. Massey and C. W. Woo: Phys. Rev. **164** (1967) 256

N. Mihara, R. D. Puff: Phys. Rev. **174** (1968) 221

M. A. Pokrant: Phys. Rev. **A6** (1972) 1588

H. W. Jackson: Phys. Rev. **A10** (1974) 278

6) N. N. Bogoliubov: J. Phys. (U. S. S. R) **11** (1947) 23