「ゲージ場理論 ― ^{3}He－B での Collective Mode」*)

東大教養　　伊豆山　健　夫

量子流体では物質場の位相が第一義的役割を果している。その空間的変化は「超流動速度場」を与えるが，これを「ゲージ場」と呼んでいる。

今，$\phi(x)$（$x=(\vec{x},\ t)$）を実験室系における量子化波動関数とする。速度$\vec{A}/m$で動いている座標系でみた量子化波動関数を$\phi(x)$とすると，$\phi(x)=\exp(i\vec{A}\cdot\vec{x}/m)\,\phi(x)$ である。時空の各点で$\vec{A}(x)/m$で動いている座標系に乗ってみると，$\phi(x)=\mathcal{R}\cdot\phi(x)$，但し $\mathcal{R}^{\dagger}\mathcal{R}=1$ でかつ$\mathcal{R}^{\dagger}\frac{1}{i}\partial_{\nu}\mathcal{R}=A_{\nu}$ である。但し $\nu=0,\ x,\ y$ or z。ϕに一価性を要求すると$\mathcal{R}$も一価で，

$$\partial_{\lambda}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\lambda}=0 \qquad \text{except on L. S.}$$

但し L. S. は線状 singularity で（ point singularity や localized lump も含ませられる），そこでは右辺が δ－関数型でその係数は $2\pi\times$［整数］ である。特に，時空にまたがって $\partial_0 A_{\nu}-\partial_{\nu}A_0$ を考えるとき，そのような singularity は〝津波〟とでも呼ぶべきもので，そのようなものが，力学的に存在可能とは考えられないので，

$$\partial_0 A_j=\partial_j A_0 \quad . \quad (j=x,\ y,\ z)$$

更に　$A_0=-\mu$　（μは化学ポテンシャル）　なので　$\dot{A}_j=-\partial_j\,\mu$。

フーリェ変化して　$\dot{A}_j\,[\vec{k}]=-i\,k_j\,\mu\,[\vec{k}]$

また　$\mu\,[\vec{k}]=\delta\mathcal{H}/\delta\rho\,[-\vec{k}]$　。

ここにハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\int\left\{\frac{1}{2m}(\partial_j\phi^{\dagger})(\partial_j\phi)-J_j A_j+\frac{\rho}{2m}A_j A_j\right\}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}V(k)\,\rho\,[\vec{k}]\cdot\rho\,[-\vec{k}]$$

IZUYAMA Takeo

*)　これは1979年7月12日の物性研での研究会で発表したものである。

であるから $\mu[\vec{k}] = V(k)\,\rho[\vec{k}]$ 。

斥力 $V(k) > 0$ の場合を考える。また上で

$$J_j \equiv \frac{1}{2im}\{\phi^\dagger \partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger)\phi\}$$

非量子液体では$\vec{J}\cdot\vec{A}$は無視できて（RPA），ハミルトニアンのゲージ場依存部分は

$$\Delta\mathscr{H} = \frac{\rho}{2m}\sum_{\vec{k}} \vec{A}[k]\cdot\vec{A}[-k] + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{V(k)}\mu[k]\cdot\mu[-k]$$

となる。ここで$\vec{A}[k] \equiv \vec{k}(V(k))^{1/2} Q_k$ とおくと

$$\Delta\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\{\frac{k^2 V(k)\rho}{m} Q_{\vec{k}} Q_{-\vec{k}} + \dot{Q}_{\vec{k}}\dot{Q}_{-\vec{k}}\}$$

従って分散 $\omega_k = (\frac{V(k)\rho}{m})^{1/2} k$ のゼロ音波が得られる。

以上を拡張して，U(1)×SO(3)の対称性をもつ量子流体（^{3}He B）を考える。変換$\phi = \mathscr{R}\cdot\varphi$は

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow\end{pmatrix} \quad も \quad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi_\uparrow \\ \varphi_\downarrow\end{pmatrix}$$

もスピンをもつので，$\mathscr{R}$は2×2マトリクスである。

$\mathscr{R}^\dagger\mathscr{R} = 1$とし，また$\phi$の一価性，従ってまた$\mathscr{R}$の一価性が要求される。$\varphi$で書いたオーダ・パラメータがBW型

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,Y_{1,-1}(\hat{k}) & Y_{1,0}(\hat{k}) \\ Y_{1,0}(\hat{k}) & \sqrt{2}\,Y_{1,1}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

となるようにする。実験室系でみるとスピン量子化軸は時空でゆらいでいて，ϕで書くと，オーダ・パラメータはこのようにならない。

ゲージ場 A^ν_α（$\nu = 0, x, y, z : \alpha = 0, x, y, z$）は次のように定義される。

$$iA^\nu_\alpha \sigma_\alpha = \mathscr{R}^\dagger \partial_\nu \mathscr{R}$$

但し $\sigma_0 = 1$ で，σ_x，σ_y，σ_z は Pauli スピン行列。$\mathscr{R}$のウニタリー性から

$$-iA^\nu_\alpha \sigma_\alpha = (\partial_\nu \mathscr{R}^\dagger)\mathscr{R}$$

は明らか。A_0^ν を A^ν と書く。これらから

$$F^{\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda A^\nu - \partial_\nu A^\lambda$$
$$F_a^{\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda A_a^\nu - \partial_\nu A_a^\lambda + \varepsilon_{abc}(A_b^\lambda A_c^\nu - A_b^\nu A_c^\lambda)$$

を定義する。($a = x, y, z$: ε_{abc} は完全反対称) Kinematical Condition は

$$F_\alpha^{\lambda\nu} = 0 \qquad \text{except on L.S.}$$

($\alpha = 0, x, y, z$) となる。分配関数を求めるとき，この Kinematical Condition が充たされるような sub-space で A_α^ν の積分は遂行される。しかし，この Kinematical condition は，Topological 線状 charge を導入することにより，追放することもできる。このようにすれば，ゲージ場は，一人歩き始めるわけであるが，vortices の存在が，熱力学に重要な効果をもつときにのみ，このような定式化も有効となるだろう。ここでは，ゲージ場 A_α^ν が，量子液体のダイナミクスに如何に登場するか，と言うテーマにしぼる。

$$A^\nu \equiv A_0^\nu, \quad \boldsymbol{A}^\nu \equiv (A_x^\nu, A_y^\nu, A_z^\nu)$$

は，次の Kinematical condition をみたす。

$$\partial_0 A^j = \partial_j A^0 \quad , \tag{1}$$
$$\partial_0 \boldsymbol{A}^j = \partial_j \boldsymbol{A}^0 + \boldsymbol{A}^j \times \boldsymbol{A}^0 \tag{2}$$

ただし

$$A^0[\vec{k}] = -\delta\mathscr{H}/\delta\rho[-\vec{k}], \quad A_a^0[\vec{k}] = -\delta\mathscr{H}/\delta s_a[-\vec{k}] \qquad (s_a = \phi^+\sigma\phi)$$

Number current

$$\mathscr{J}^j \equiv \frac{1}{2im}[\phi^\dagger\partial_j\phi - (\partial_j\phi^\dagger)\phi]$$

Spin current

$$\boldsymbol{\mathscr{J}}^j_{(\text{spin})} \equiv \frac{1}{2im}[\phi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\partial_j\phi - (\partial_j\phi^\dagger)\boldsymbol{\sigma}\phi]$$

は，それぞれ

$$\mathscr{J}^j = J^j + \frac{\rho}{m} A^j \tag{3}$$

$$\mathscr{J}^j_{(\mathrm{spin})} = \overline{\boldsymbol{J}}^j + \frac{\rho}{m}\overline{\boldsymbol{A}}^j \tag{4}$$

となる。但し

$$\overline{\boldsymbol{J}}^j = \frac{1}{2im}\left[\phi^\dagger \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,\partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger)\overline{\boldsymbol{\sigma}}\,\phi\right]$$

で $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathscr{R}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \mathscr{R}$ は，スピン・ヴェクトル $\boldsymbol{\sigma}$ を，ϕ のスピン量子化座標系に投影したものである。$\overline{\boldsymbol{A}}^j$ はゲージ場 $\boldsymbol{A}^j$ を，この座標系に投影したものである。

ハミルトニアンは，B.W. のハミルトニアン中，ϕ のかわりに ϕ を代入したものを $\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]$ と書くと，

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi] + \int \left\{ J^j A^j + \overline{J}^j_a \overline{A}^j_a + \frac{1}{2m}\rho A^j A^j + \frac{1}{2m}\rho \overline{A}^j_a \overline{A}^j_a + \frac{1}{m}\overline{s}_a \overline{A}^j_a A^j \right\}$$
$$+ \frac{1}{2}K^{-1}\sum_{\vec{k}} \rho[k]\,\rho[-k] + \frac{1}{2}\chi^{-1}\sum_{\vec{k}} \overline{s}_a[k]\cdot \overline{s}_a[-k]$$

ここに K，χ はそれぞれ静的 compressibility および帯磁率である。また $s_a(x) \equiv \phi^\dagger(x)\sigma_a \phi(x)$。

連続の式は

$$\partial_0 \rho = -\partial_j \mathscr{J}^j \tag{5}$$

$$\partial_0 \widetilde{\boldsymbol{s}} = -\partial_j \mathscr{J}^j_{(\mathrm{spin})} \tag{6}$$

ただし $\widetilde{\boldsymbol{s}} \equiv \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi$ 。

(1),(3),(5)から第四音波を導く。(3)において J^j は，ハミルトニアン中の $J^j \cdot A^j$ を通じ，A^j に依存する。A^j について線型化近似をとると

$$J^j[\vec{q},\omega] = K^{ji}(q,\omega)A^i[\vec{q},\omega]$$

$$K^{ji}(\vec{q},\omega) = 2 < J^j[\vec{q}]\, \frac{\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]^\times}{(\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]^\times)^2 - \omega^2}\, J^i[\vec{q}] >_\phi$$

ただし $<\cdots\cdots>_\phi$ は $\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]$ による grand canonical average をとれ，×印は，後続オペレータと交換子をとれということ。B相では $\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]^\times$ にギャップがあるので，$\omega \to 0$，$q \to 0$ をとることができ

$$K^{ji} = 2 < J^j \frac{1}{\mathscr{H}_{\mathrm{BW}}[\phi]^{\times}} J^i >_\phi \tag{8}$$

$J^j \equiv \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k_j}{m} a^\dagger_{k\sigma} a_{k\sigma}$ ，ただし $a_{k\sigma}$ は ϕ を展開したもの。従って(3)は

$$\mathscr{J}^j = \frac{\rho}{m} (\delta_{ji} - mK_{ji}) A^i \equiv \rho^{(s)}_{ji} A^i \tag{9}$$

(8)で $a_{k\sigma} = \sum_\tau (u_{\sigma\tau}(k) \alpha_{k\tau} + v_{\sigma\tau}(k) \alpha^\dagger_{-k\tau})$ を用い，α について対角化されていることと，u，v には BW の解を用いると $\rho^{(s)}_{ji} = \rho^{(s)} \delta_{ji}$ 。ただし

$\rho^{(s)} = (\rho/m) Y(T)$ 　　（ Y は Yosida 関数 ）

となる。superfluid 成分の運動にのみ着目しているので(5)において ρ は $\rho^{(s)}$ に等しい。これと(1),(9) とから第四音波が，well-defined mode で，分散 $\omega_q = (\rho^{(s)}/mK)^{1/2} q$ が導びかれる。

スピン波についても同じ手法が適用される。(4)より

$$\mathscr{J}^j_a = D^{ji}_{ab} \overline{A}^i_b \tag{10}$$

$$D^{ji}_{ab} = \frac{\rho}{m} (\delta_{ji} \delta_{ab} - m\Gamma^{ji}_{ab})$$

$$\Gamma^{ji}_{ab} = 2 < \overline{J}^j_a \frac{1}{\mathscr{H}[\phi]^{\times}} \overline{J}^i_b >_\phi$$

が q，$\omega \to 0$ の極限で導びかれる。

j －座標系の軸の選び方を a －座標系に揃えると

$$D^{ji}_{ab} = \frac{\rho}{m} [\delta_{ji} \delta_{ab} - \frac{1}{5} (\delta_{ab} \delta_{ji} + \delta_{ja} \delta_{ib} + \delta_{jb} \delta_{ia})] \cdot (1 - Y(T))$$

が得られる。線型近似のもとで，(2)は

$$\partial_0 \boldsymbol{A}^j = \chi \partial_j \boldsymbol{s}$$

(6)は $\partial_0 \boldsymbol{s} = -\partial_j \mathscr{J}^j_{(\mathrm{spin})}$ であるからこれに(10) を用いて，よく知られたB相の Spin 波およびその分散が導かれる。

以上において，我々のゲージ場は，直接 ϕ を変換して行くプロセスに現れるものであ

って，オーダ・パラメータの変換において得られるダイアディック Ω_a^j と結局は同じものではあるが，より直截的であり，ハミルトニアンを基礎にもつ意味において，非線型項まで取り入れようと言うとき，見落しなく計算が遂行できる。

二流体力学は，相互作用 $\vec{J}\cdot\vec{A}$，$\vec{\boldsymbol{J}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$ から高次のプロセス (Gaußian) を通じて導びかれるものであって，ゲージ対称性が，見通しをよくしてくれる筈である。

Homotopy 解析は従来のものを未だ出ていない。何より，A相では，まず流体力学を整理しなければならない。