

(35) Hénon 写像のホモクリニック点および
ヘテロクリニック点出現の解析的条件

京大・理 大 同 寛 明

力学系のサドル型固定点 D の安定多様体を W_D^s , 不安定多様体を W_D^u とする時, W_D^s と $W_{D'}^u$ の交点は, $D = D'$ ならホモクリニック点, $D \neq D'$ ならヘテロクリニック点と呼ばれる¹⁾。この様な点が登場すると, プリケイオティックな振舞があらわれたり, Strange Attractor が消失する時, 系の挙動に種々の興味ある変化が生じる事が知られている。これらの点の出現条件を求める事は, 一般には極めて困難であるが, ここでは, Hénon の二次元写像²⁾ :

$$(1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bz_n \\ z_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (a, b > 0)$$

において, $b \ll 1$ (強散逸) の場合に, Bridges-Rowlands³⁾ 流の摂動論的方法を用いる事によって, 表題の条件を解析的に求める。

まず, Hénon 写像には二つの固定点がある事に注意し, $x = z$ の値の大きな方を A , 他を B とする。 $a > 3(1-b)^2/4$ では A, B ともサドルであるので, この範囲で考える。 A と B の W^s, W^u の式が求まればよいが, これらは不変曲線であるから, その式を $x = f(z)$ とおけば

$$(2) \quad f(f(z)) = 1 - af(z)^2 + bz$$

なる函数方程式が満たされねばならない。この方程式に, f の b 巾による展開式:

$$(3) \quad f(z) = f_0(z) + bf_1(z) + b^2f_2(z) + \dots$$

を代入する事によって, 望むオーダーまでの解 $f(z)$ を得る事ができる。それらの解のうちで,

$$(4) \quad f_0(z) = 1 - az^2$$

大同寛明

に始まるものは、 Bridges らの得た式³⁾ に相当し、 W_A^u の A を通る分枝 ($x=f_A^u(z)$) と W_B^u の B を通る分枝 ($x=f_B^u(z)$) を含んでいる。また、

$$(5) \quad f_0(z) = (-1 \pm \sqrt{4a+1})/2a$$

に始まる解は、それぞれ、 W_A^s の A を通る分枝 ($x=f_A^s(z)$) および W_B^s の B を通る分枝 ($x=f_B^s(z)$) を表わし、 $0 (b^2)$ まででともに放物線である。これらの式を用いて描かれた W_A^s 、 W_B^u 、 W_B^s が、 Hénon のアトラクター (W_A^u に沿ってのびている) とともに、 Fig. に示されている。 ($a=1.4$, $b=0.3$)

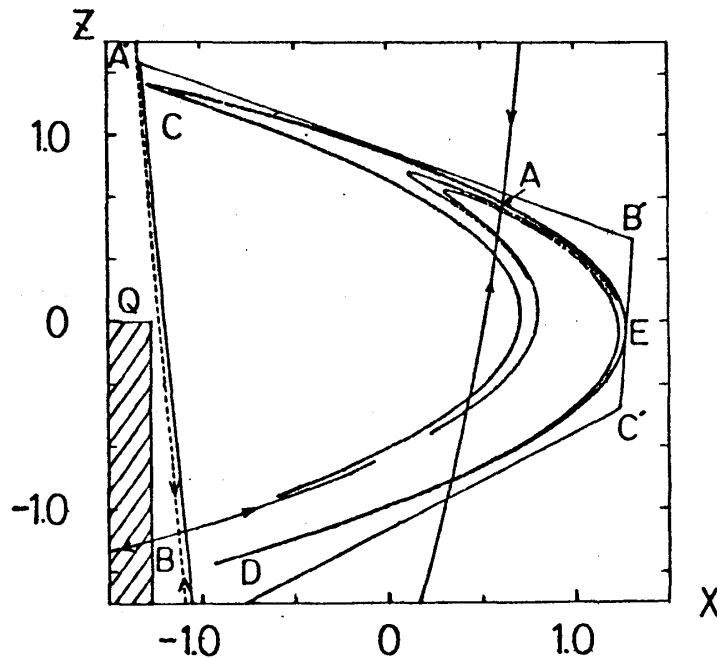


Fig.

さて、あとは、アトラクター (W_A^u) の先端部 c が W_B^s に接する a の値 $a_t(b)$ と、他の先端部 D が W_A^s に接する a の値 $a_m(b)$ を求めればよい。つまり、 $a=a_t(b)$ でサドル A と B に関するヘテロクリニック点が出現し、 $a=a_m(b)$ で A のホモクリニック点が出現する。これらの値 $a_t(b)$ と $a_m(b)$ は、上で求めた多様体の式だけからは直ちに求められないが、簡単な幾何学的考察から、 C と D のパラメーター表示がえられるので、それと W_B^s 、 W_A^s の式を用いて、最終的に

$$a_t(b) = 2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\right)b + \left(\frac{25}{32} - \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)b^2 + O(b^3)$$

$$a_m(b) = 1.54369 \dots - 1.46274 \dots \times b + 0.43831 \dots \times b^2 + O(b^3)$$

を得る。これらは、例えば $b = 0.3$ のような、比較的大きな b の値に対しても、数値計算の結果と良い一致を示す。 $a = a_t(b)$ は実は Hénon アトラクターの消失点に相当する。

上記の詳細と、一次元写像 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ に対して $a_t(0)$, $a_m(0)$ がどういう意味を持つかについては、4) を参照して下さい。

文 献

- 1) 例えば D. R. J. Chillingworth, *Differential Topology with a View to Applications* (Pitman, London, 1977) とその引用文献
- 2) M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69.
- 3) R. Bridges and G. Rowlands, *Phys. Lett.* **63A** (1977), 189.
- 4) H. Daido, submitted to *Prog. Theor. Phys.*