(34)　決定論的カオスの統計力学

阪市大・理　甲　斐　　透
京大・理　富　田　和　久

散逸力学系でchoatic solutionをもつ数学的モデルの研究が盛んになってきたが，その中でカオスのダイナミクスを一次元表示する事が可能な例がいくつか知られている。又実験例でもいくつか知られている。ここでは一次元差分系，$X_{n+1}=F(X_n)$，に問題が帰着出来る場合に話を限る。その chaotic phase を記述する為の出発点となる統計分布函数を発見的に導出し，それらを用いて測度論的エントロピー，位相論的エントロピー，変分原理について論じる。[1)]

[1]　Chaotic orbit を無限にある周期軌道をわたり歩く運動と考える。その統計分布函数を各周期点の分布に重みをつけて表現する。まず n 周期軌道点を用いて分布 $\rho_n(x)$を定義する。重みは発見的に決める。

$$\rho_n(x)=\sum_{i=1}^{N(n)} w_i^{(n)}\,\delta(X-P_i^{(n)}) \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ただし，　$P_i^{(n)}=F^{(n)}(P_i^{(n)})$　$(i=1,\ \cdots,\ N(n))$，　$\sum_{i=1}^{N(n)} w_i^{(n)}=1$　で

$$w_i^{(n)}=\frac{c_n}{|F^{(n)\prime}(P_i^{(n)})|} \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

とする。n を大きくすると軌道点は密につまるので統計分布函数 $\rho(x)$ を

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\rho_n(x) \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

と定義する。(3)は明らかに不変密度でまた安定な周期軌道が存在する時は安定周期点のみの離散分布になる。図1にロジィスティクモデル$\{F(x)=Rx(1-x)\}$ の$R=3.9$ の時の $\rho_{19}(x)$ を示してある。

[2]　(3)を利用して測度論的エントロピー $h_\rho(F)$ を計算すると

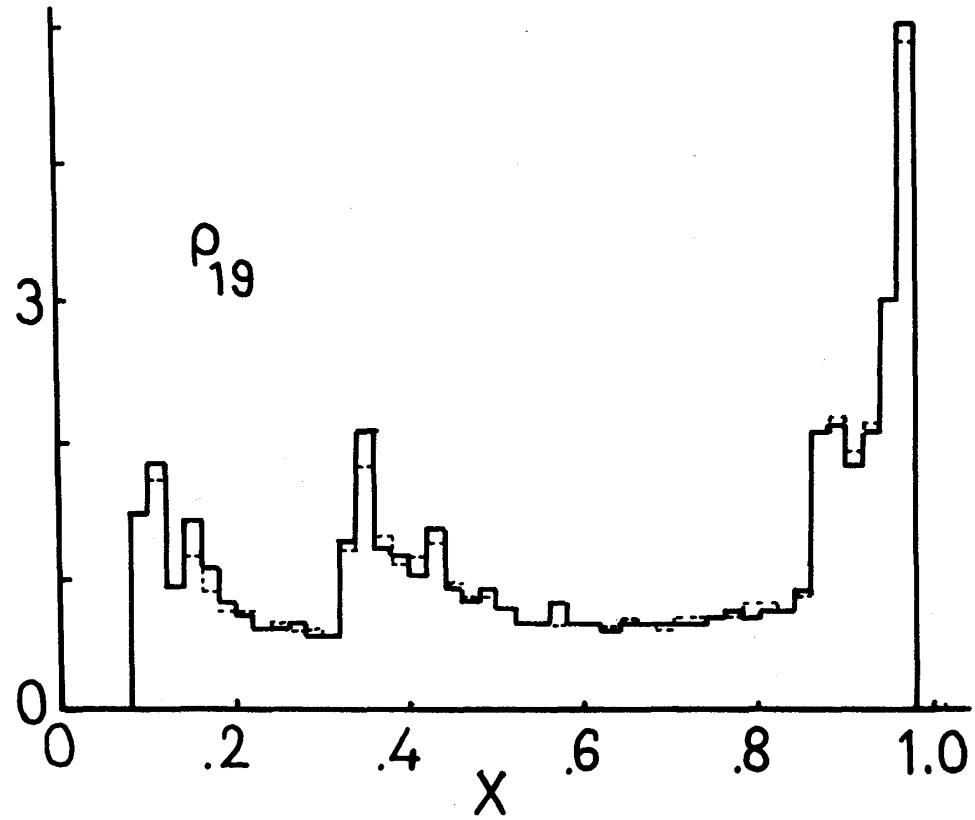

図 1. 実線のヒストグラムは $R=3.9$ における $\rho_{19}(x)$ を示す。
点線はシュミレーションによって得られた 50,000 個の軌道点から得た分布。

$$h_\rho(F) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N(n)} w_i^{(n)} \log w_i^{(n)} \tag{4}$$

が得られる。このエントロピーの上限は $w_i^{(n)} = 1/N(n)$ にした時で,

$$h(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n) \tag{5}$$

となり位相論的エントロピーを与える。また (4) の $\{w_i^{(n)}\}$ に (2) を代入するとすべての周期点が不安定すなわち chaotic orbit が安定ならば

$$h_\rho(F) = \int \rho(x) \log|F'(x)|dx \tag{6}$$

が得られる。

[3]　(1)における分布で $\{w_i^{(n)}\}$ を未知として，それをパラメーターと考え

$$\phi_\rho = h_\rho(F) - \int \rho(x) \log |F'(x)| dx \tag{7}$$

を $\{w_i^{(n)}\}$ に関して変分をとると，$\delta\phi_\rho = 0$ の解が(2)式を与える。これは Bowen-Ruelle の変分原理を一次元 endomorphism に適用した形の拡張になっている。

文　献

1) T. Kai and K. Tomita, submitted to J. stat. Phys.