(18)　非平衡相転移，ゆらぎ及び臨界緩和

東大・理　鈴木増雄
金子邦彦
笹川文義

1.　非平衡系における相転移と臨界緩和との関係を調べることを目的とする。漠然と一般に相転移点では，臨界緩和が起るものと思われていたが，非平衡系で詳しく調べてみると，必ずしもそうでないことがわかってきた。そこで，非平衡系の相転移をどう定義するかも問題になってくる。ここでは，定常分布 P_{st} が急激に変化するところとして定義しておく。この定義は，変数のとり方に依存することに注意されたい。したがって，不変的な定義は，臨界緩和の起るところということになるであろう。こうすると，研究目標は，どこで，どのような臨界緩和が起るかを調べることに尽きる。常識的な定義に従って，相転移点と臨界緩和の起る点との関係を調べた結果を整理すると，

(a)　deterministic systems では両者一致する (van Hove's theory)

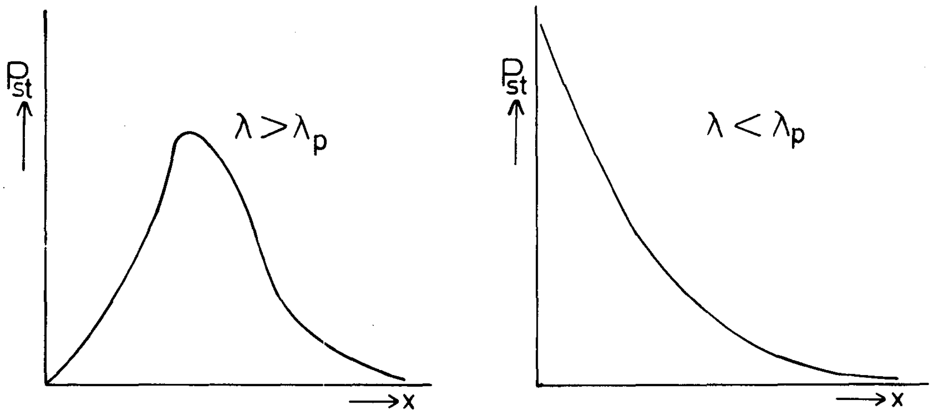
(b)　non-multiplicative systems では random force，$\varepsilon \to 0$ の漸近的極限((a)のごく近傍)で一致する。

(c)　ε 有限では一般に一致しない，

(d)　multiplicative system では，(イ) $\dot{x} = \gamma x - g x^2 + x\eta(t)$ 及び $\dot{x} = \gamma x - g x^m + x^m \eta(t)$ (但し，$\eta(t)$ は random force，$m > 1$)の場合一致するが，(ロ)一般には，一致しない。例えば，$\dot{x} = \gamma x - g x^m + x\eta(t)$ ($m \neq 2$) では一致しない。

ここで用いた方法は，(i) nonlinear scaling theory,[1] (ii) 直接法(厳密解)，(iii) 摂動展開(ε - 展開及び強結合展開)，(iv) 固有値問題として解く方法,[2),3)] (v) WKB法[4)] 等である。

さて，相転移の定義は例えば，第1図のように，$\lambda = \lambda_p$ の前後で P_{st} が急激に全体の振舞いが変るところとして定義する。一方，臨界緩和点 $\lambda = \lambda_c$ は，緩和時間 τ が $\tau = \infty$ になる点として定義される。もし，緩和スペクトルの零でない最小のもの $\varepsilon_1(\lambda)$ が求まれば，臨界緩和点 λ_c は $\varepsilon_1(\lambda_c) = 0$ によって与えられる。



(a)　　　　　　　(b)

第１図：　定常分布の急激な変化（(a)と(b)の違い）
による相転移点 λ_p を決定する模式図。

2.　一般に確率過程 $\dot{x}=\alpha(x)+\beta(x)\eta(t)$ が与えられた時，適当な条件の下に，それは，次の Fokker-Planch eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}P=-\frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x)+\varepsilon\beta(x)\beta'(x)]P+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta^2(x)P \tag{1}$$

によって記述される。これから P_{st}（定常解）が求められ，その全体の様子から，相転移点が得られる。

3.　直接法（厳密解）

確率微分方程式を直接，形式的に解いてその性質を調べる。一般に $\dot{x}=\alpha(x)+\beta(x)\eta(t)$ に適当な非線型変換 $\xi=f(x,t)$ を施して $\dot{\xi}=(a+b\eta(t))\xi+c+d\eta(t)$ のような線型方程式に変形出来れば，もとの方程式は形式的に解ける。その条件は，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ が次の微分方程式を充すことである：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)=\frac{1}{\beta(x)}\left\{b\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)-a\right\} \tag{2}$$

例えば，Schenzle-Brand [6] によって，固有値を求める方法により研究された模型

$$\dot{x} = \gamma x - g x^m + x\eta(t) \tag{3}$$

は(2)の一例になっており，適当な非線型変換により，線型化されて，(3)の形式解は，

$$x(t) = \exp\left[\gamma t + \int_0^t \eta(t')\,dt'\right] \times \left[g(m-1)\int_0^t \exp\{(m-1)(\gamma t' + \int_0^{t'} \eta(s)\,ds)\}\,dt' + x(0)^{1-m}\right]^{-\frac{1}{m-1}} \tag{4}$$

と与えられる。これより，例えば$<x(t)^{1-m}>$を計算すると

$$<x(t)^{1-m}> = \left(<x(0)^{1-m}> - \frac{g}{\gamma-(m-1)\varepsilon}\right)e^{-(m-1)[\gamma-(m-1)\varepsilon]t} + \frac{g}{\gamma-(m-1)\varepsilon} \tag{5}$$

となる。このモーメントの緩和時間τは，$\tau = [(m-1)\{\gamma-(m-1)\varepsilon\}]^{-1}$で与えられ，$\gamma = \gamma_c \equiv (m-1)\varepsilon$で，$\tau \to \infty$ すなわち，臨界緩和が起ることがわかる。一方，相転移は，mによらず，$\gamma = \gamma_p = \varepsilon$ で起る[6]ので，$m \neq 2$では，$\gamma_p \neq \gamma_c$ であることがわかる。

(4)より，一般のモーメント，したがって，緩和スペクトルを具体的に求めるのは，容易ではないが，scaling theory[1),5)]を用いると容易に導ける。

4.　Scaling treatment for multiplicative stochastic processes

Ref. 5)に解説したように，$\dot{x} = \alpha(x) + \beta(x)\eta(t)$に，非線型変換

$$x \to \xi(x,t) = F^{-1}(e^{-\gamma t}F(x))\;;\; F(x) = \exp\int_{a_0}^{x} \frac{\gamma}{\alpha(y)}\,dy \tag{6}$$

を施すと，[1),5)] ξに対する方程式は次のようになる：

$$\frac{d\xi}{dt} = e^{-\gamma t}F'(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi)))\beta(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi)))\eta(t)/F'(\xi) \tag{7}$$

今，$\beta(x) = x^p +$ (higher) として，漸近評価すると，すなわち，scaling theory のアイデアに従って，(7)の右辺をξの最低次で近似すると

$$\frac{d}{dt}\xi_{sc}(t) = [\exp(p-1)\gamma t]\,\xi_{sc}^{p}(t)\,\eta(t) \tag{8}$$

となり，この解は

$$\text{(a)}\quad \xi_{sc}(t) = x(0)\exp\int_0^t \eta(s)\,ds \quad \text{for} \quad p=1,$$

$$\text{(b)}\quad \xi_{sc}(t) = [(1-p)\int_0^t e^{(p-1)\gamma s}\eta(s)\,ds + x(0)^{1-p}]^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{for} \quad p \neq 1, \tag{9}$$

となる。これに対応する $x_{sc}(t)$ は，$x_{sc}(t) = F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi_{sc}(t))$ によって与えられる。この期待値は，容易に次のような強結合展開の形で求められる：

$$\langle x_{sc}(t)\rangle = \left(\frac{\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{m-1}}(1-e^{-\gamma(m-1)t})^{\frac{1}{1-m}}\sum_{n=0}^{[\frac{\gamma}{\varepsilon(m-1)}]}\binom{\frac{1}{1-m}}{n}\left(\frac{\gamma}{g}\right)^n x(0)^{n(1-m)}$$
$$\times(1-e^{-\gamma(m-1)t})^{-n}e^{-\lambda_n t} + \text{(higher; continuous)}. \tag{10}$$

但し，λ_n は次式で与えられるスペクトルである：

$$\lambda_n = n(m-1)[\gamma - n(m-1)\varepsilon] \tag{11}$$

これは，Schenzle-Brand [6] と一致する。

第２の例としては，$\dot{x} = \gamma x - gx^m + x^m\eta$ に対しても同様に，$\lambda_m = n(m-1)\gamma$ が求められる。これも，固有値問題に変換して求めた厳密解に完全に一致する。

5. Linear scaling transformation と解の性質

上の結果を理解するためには，F−P eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -\frac{\partial}{\partial x}(\gamma x - gx^m)P + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^n P \tag{12}$$

は次のスケール変換

$$x' = (\varepsilon/g)^{-1/(m-n+1)}x, \qquad t' = (\varepsilon/g)^{(m-1)/(m-n+1)}tg,$$
$$\gamma' = (\varepsilon/g)^{-(m-1)/(m-n+1)}(\gamma/g), \quad P' = Pdx/dx', \tag{13}$$

に対して不変であることを用いればよい。これよりスペクトル $\lambda_k(\gamma,\varepsilon,g)$ は，次のように表わせることがわかる：

$$\lambda_k = g(\varepsilon/g)^{\frac{m-1}{m-n+1}} \lambda'_k\left(\frac{\gamma}{g}(\varepsilon/g)^{-\frac{m-1}{m-n+1}}\right) \tag{14}$$

これは，Kubo et al.[7] による $n=0$, $\gamma=0$ の場合に対する議論の一般化になっている。

この linear scaling property を用いるといろいろなことがわかる。

(i) §4の nonlinear scaling theory によって，厳密な discrete spectrum が，S-B model 等に対して得られた根拠が示される。すなわち，scaling theory は，ε の小さい limit での漸近評価であるから，スペクトルが γ の一次関数であるとすれば，(14)の性質から，それは，ε に関しても線型であることがわかり，したがって，scaling によって導いた結果は厳密な離散スペクトルと一致する。

(ii) λ_k が強結合展開で求められる model がどのような形かを調べることができる。すなわち，λ_k が g によらない条件を求めると (12) の範囲では，§4 で議論したモデルに限られることがわかる。同時に，それは，λ_k が γ の一次関数の場合であることが示される。

6. two-level noise の場合

北原達[8]は $\dot{x} = \gamma x - gx^2 + xI(t)$ に対して，$I(t)$ が $\pm\Delta$ の2つの値をとるマルコフ過程として，固有値問題を解いた。但し，$I(t)$ は次のような non-white の性質

$$< I(t)\ I(t') > = \Delta^2 \exp(-\lambda|t-t'|) \tag{15}$$

を持つとした。我々はこの問題を一般化し，$\dot{x} = \gamma x - gx^m + xI(t)$ として scaling theory [1] を適用し，強結合展開を行って，次の離散固有値を求めた：

$$\lambda_k = k(m-1)\gamma - \frac{1}{2}\{-\lambda + [\lambda^2 + 4(m-1)^2 k^2 \Delta^2]^{1/2}\}. \tag{16}$$

$m=2$ とおくと，北原達[8]の結果が得られる。

7. まとめ

以上，相転移と臨界緩和の関係を調べてみると，非平衡系では，一般に，常識的な意味での“相転移点”では，臨界緩和は起らず，別な点でそれが起ることがわかった。乱雑な力の強さ ε が小さい極限では，“漸近的臨界緩和(asymptotic critical slowing down)”が起ることが示せる。この見方は，Mangel[9] や Miguel[10]の ε- 展開でのゆらぎの発散にに対する批判の解答になっている。また，Kobashima 達[11]は，実験的に非平衡系の臨界緩和を観測した。

以上の他に，まだ多数の成果が得られているが，それらは近く発表する予定である。[12]

References

1) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 77, ibid **57** (1977) 380;
J. Stat Phys. **16** (1977) 11, 477; Phys. Lett. **67A** (1978) 339.
2) H. Risken, Z. Phys. **251** (1972) 231.
3) H. Tomita, A. Ito, and K. Kidachi, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 786.
4) B. Calori, C. Calori, and B. Roulet, J. Stat. Phys. in press.
5) M. Suzuki, Advances in Chemical Phys. (in press); Proceedings on the XVIIth Solvay Conference on Physics, 1978, Brussels.
6) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Lett. **69A** (1979) 313; Phys. Rev. **20A** (1979) 1628.
7) R. Kubo, M. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.
8) 北原和夫，稲葉豊，当研究会報告
9) M. Mangel, Physica **97A** (1979) 597.
10) M. San Miguel, International Conference on Dynamical Critical Phenomena, Geneve (1979).
11) S. Kabashima, S. Kogure, T. Kawakubo, and T. Okada, J. Appl. Phys. **50** (1979) 6296.
12) M. Suzuki, K. Kaneko, and F. Sasagawa, to be published.