（2） Ornstein-Uhlenbeck 過程の断熱消去法

京大・理　馬淵真人・馬場　健

最近，拡散係数が問題にしている系の変数に依存する Fokker-Planck 方程式が注目されてきている。[1)〜3)] この項は Fokker-Planck 方程式を導出する Langevin 方程式の揺動力の解釈に関して大きく変わり得るものである。この解釈には典型的な二つの方法，すなわち，伊藤の方法と Stratonovich の方法がある。これらの方法は数学的に互に等しいものであるが，数学的立場では Langevin 方程式の取扱い法であって，解釈，すなわち，モデル化に対しては無力である。

今回は，減衰係数 γ が場所に依存する一次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程を考察してみる。[4)] これを質量 1 のブラウン粒子がポテンシャル $\phi(x)$ 内に動いている過程とすると，場所 x 及び速度 u で表わされる運動方程式は

$$\dot{x} = u\,, \quad \cdots\cdots (1) \qquad \dot{u} = -\gamma u - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + f_u(t), \tag{2}$$

と書ける。伊藤型と考える揺動力 $f_u(t)$ は次の揺動散逸定理を満たす白色ガウス雑音とする。

$$\langle f_u(0)\, f_u(t) \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t). \tag{3}$$

今，γ が大きいとして，$t \gg \frac{1}{\gamma}$ の所の Smoluchowski 方程式を断熱消去法で求めてみる。γ が大きいとして，(2) 式より左辺の時間微分を零とおき u について解くと

$$u = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} f_u(t) \quad (= \dot{x}), \tag{4}$$

ここで，$\frac{1}{\gamma} f_u(t)$ の解釈が問題になる。まず $\frac{1}{\gamma} f_u(t)$ を伊藤型と考えると，場所 x に依存する粗視化した分布関数 $P(x, t)$ の満たす方程式は次の様に表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,\ t) = k_B T \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma k_B T} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma} P(x, t)\right) \right), \tag{5}$$

となる。一方，$\frac{1}{\gamma}f_u(t)$ を Stratonovich 型と考える，すなわち，$\frac{1}{\gamma}f_u(t)\rightarrow\frac{1}{\gamma}\circ f_u(t)$ とすると，

$$\frac{1}{\gamma}\circ f_u(t)=\frac{1}{\gamma}f_u(t)-\frac{1}{\gamma^2}\frac{d\gamma}{dx}\ dx f_u(t), \tag{6}$$

となる。但し，Stratonovich 型と伊藤型の間の関係[5),6)] $G(x)\circ f(x)=G(x)f(t)+\frac{1}{2}G'(x)\dot{x}\ f(t)$を用いている。(6)式を用いると(4)式は

$$\dot{x}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}-\frac{1}{\gamma^2}\gamma' k_BT+\frac{1}{\gamma}f_u(t), \tag{7}$$

となって，分布関数 $P(x,t)$ の満たす方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=k_BT\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{k_BT}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x,t), \tag{8}$$

となる。

二つの立場によって導出された Fokker-Planck 方程式(5)，(8)式に於いて，場所に依存する γ の為に γ の所在に違いが出てくる。(8)式での定常解 $\rho_{st}(x)=\mathrm{const}\ \exp-\frac{\phi(x)}{k_BT}$ で物理的直感を満足するので Stratonovich 型に解釈する方が良いと思われる。この正当性を，γ が大きいとして，$t\gg\frac{1}{\gamma}$ の所で γ^{-2}までとるとして，伝統的な摂動法，及び(1)，(2)，(3)式を満たす (x,u) 空間の分布関数 $P(x,u,t)$ の満たす Kramers 方程式に u の変数を消去する射影演算子を用いて，γ^{-2} までの範囲で発展方程式を求める。

摂動法[7)]

(2)式を積分すると，

$$\dot{x}(t,f_u)=-\int_0^t e^{-\int_{t'}^{t}\gamma dt''}\frac{\partial\phi}{\partial x}dt'+\int_0^t e^{-\int_{t'}^{t}\gamma dt''}f_u(t')\,dt', \tag{9}$$

これを連続の式$\frac{\partial}{\partial t}P+\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}P)=0$ に代入する。但し $P(x,t)=\langle\delta(x-x(t;f_u))\rangle$ であって，$\langle\cdots\cdots\rangle$は揺動力 $f_u(t)$，初期値についての平均である。部分積分を連続し

て行い，次の様な Navikov の定理[8)]

$$<\int_0^t e^{-\int_{t'}^{t}\gamma dt''} f_u(t')\,dt'\,\delta(x-x(t;f_u))>$$

$$\fallingdotseq -\frac{k_BT}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}<\delta(x-x(t;f_u))>, \tag{10}$$

を用い， $t \gg \frac{1}{\gamma}$ の所に注目するとして初期値依存を無視し， γ^{-2} までとると分布関数 $P(x,t)$ の満たす方程式は (8) 式と同一になる。

射影演算子法

(1), (2), (3) 式より次の Kramers 方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t;x,u)=\frac{\partial}{\partial x}(-uP)+\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial\phi}{\partial x}P)+\gamma(\frac{\partial}{\partial u}u+k_BT\frac{\partial^2}{\partial u^2})P$$

$$\equiv (L_0+L_1)P, \tag{11}$$

ここで

$$L_0=\gamma\frac{\partial}{\partial u}(u+k_BT\frac{\partial}{\partial u}),\quad L_1=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}-u\frac{\partial}{\partial x}, \tag{12}$$

である。射影演算子$\mathscr{P}$を用いると，分布関数の射影成分に対する発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{P}P=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\mathscr{P}L_1(L_0^{-1}(1-\mathscr{P})L_1)^i\mathscr{P}P. \tag{13}$$

ここで，射影演算子$\mathscr{P}$は

$$\mathscr{P}P\equiv\varphi_0\int P(u,x)\,du\,(=\varphi_0(u)P(x)), \tag{14}$$

で， $\varphi_0(u)$ は L_0 の固有値が零の固有関数で $\mathrm{const}\times e^{-u^2/2k_BT}$ によって与えられる。(13) 式を γ^{-2}までとると (8) 式に一致する。

これらより，伊藤型と考える Langevin 方程式 (1), (2) 式で断熱消去による方法によっ

て x だけの Fokker-Planck 方程式を導出するには(4)式を Stratonovich 型と解釈すべきであることが分った。

参考文献

1) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour, Z. Phys. **B24**, 307 (1976).
2) T. Kawakubo, S. Kabashima and Y. Tsuchiya, Supple. Prog. Theor. Phys. **64**, 150 (1978).
3) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev.
4) G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
5) L. Arnold, Stochastic Differential Equations, John Wiley and Sons (1974).
6) K. Itô, Lecture Notes in Physics. **39**, 218 (1975).
7) M. San Miguel and J. M. Sancho, Preprint.
8) E. A. Novikov, Soviet Phys. JETP **20**, 1290 (1965).
9) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33**, 423 (1965).