物性研究 35-3(1980-12)

Hamiltonianの諸形態

大阪教育大・物理　　鯖　田　秀　樹*

(1980年11月18日受理)

§1. はじめに

Hamiltonianはふつうエネルギーの次元をもった物理量と考えられ，そうした取扱いがなされる。ところが非保存系である散逸力学系でのHamiltonianはエネルギーの次元をもたない。時間変数 t を陽に含まないときには，非保存系のHamiltonianも保存力学量である。

散逸力学系でHamiltonianが求まっている例はそう多くはない。その多くない力学系の例についてHamiltonianの物理的意味づけをやりたいものである。

一方，保存力学系ではエネルギーの次元をもつHamiltonian以外のHamiltonianを考えることができる。それらHamiltonianの形態からエネルギー以外のHamiltonianの物理的意味を考えて，非保存系のHamiltonianの物理的意味を考えることができないか。つまり，保存系のエネルギーを除いたHamiltonianと非保存系のHamiltonianとの間に共通な物理的意味が付与できないか。

そういう最終的な意図をもって，この小稿では簡単のために自由粒子の集まりである力学系について考察する。Lagrangianおよび Hamiltonianは与えられた力学系で，一意的なものではなく，無限個存在する場合もある。

自由粒子からなる力学系では当然，無限個存在する。それは，可積分系であるから保存量が無限個あることからもうなずける。

§2. 自由粒子系のHamiltonian

N個の単位質量をもった自由粒子の集まりを考える。座標変数を $q_k(k=1,2,\cdots,\ n=3N)$ で表わす。

運動方程式は

$$\ddot{q}_k=0,\quad k=1,2,\cdots\cdots,\ n \tag{1}$$

で表わされる。

この系の Lagrangianとしてふつうは,

$$L=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\dot{q}_k^2 \tag{2}$$

---

*) SABATA Hideki

をとり， Legendre 変換によりHamiltonianを

$$H=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}p_k^2 \tag{3}$$

と求める。

しかし，このLagrangianは一意的でない。全く特別な場合を考えているに過ぎない。

たとえば

$$L=\sum_{k=1}^{n}(\dot{q}_k)^{m+2}, \quad m=0,1,2,\cdots\cdots \tag{4}$$

にとることもできる[1]。$m=0$ の場合が式(2)と考えられる。

(4)から出発して解析力学のふつうの手順をたどると，

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=(m+2)\,\dot{q}_k^{m+1}, \quad \dot{q}_k=\left(\frac{1}{m+2}\right)^{\frac{1}{m+1}}p_k^{\frac{1}{m+1}} \tag{5}$$

となり， Hamiltonianは

$$H=\sum_k\dot{q}_kp_k-L=\sum_k\left(\frac{1}{m+2}\right)^{\frac{1}{m+1}}p_k^{\frac{m+2}{m+1}}-\sum_k\left(\frac{1}{m+2}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}p_k^{\frac{m+2}{m+1}}$$

$$=\sum_k\left[\left(\frac{1}{m+2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\frac{m+1}{m+2}\,p_k^{\frac{m+2}{m+1}}\right] \tag{6}$$

と求まる。今，

$$m+1\equiv a \tag{7}$$

とおくと，

$$H=\sum_k\left(\frac{1}{1+a}\right)^{\frac{1}{a}}\frac{a}{1+a}\,p_k^{1+\frac{1}{a}} \tag{8}$$

であり，係数部分をまとめて A_a と書くと，

$$H=\sum_k A_a p_k^{1+\frac{1}{a}} \tag{9}$$

となる。

この形のHamiltonianは t を陽に含んでいないから当然，保存量である。a つまり m の値を変えると，いろいろな関数形のHamiltonianが得られ，その物理量の次元も異なる。２つの特別の場合，$m=0$（$a=1$），$m\to\infty$（$a\to\infty$）を考えてみよう。

(i) $m=0$（$a=1$）

$$H=\sum_k\frac{1}{4}p_k^2 \tag{9$'$}$$

$\frac{1}{2}$ではなく$\frac{1}{4}$が係数になっているのは，単に式(4)の係数を1にしたためである。この場合はふつう考えられているもので次元もエネルギーと同じであり，Hamiltonianは運動エネルギーを表わしている。

mを1, 2, 3,……としていくと，p_kの巾が2より少くなり，Hamiltonianはエネルギーの意味を失ってくる。

(ii) $m \to \infty$ ($a \to \infty$)

この場合，p_kの巾は1に近ずき，Hamiltonianの次元は運動量の次元に近ずく。

係数A_aを評価すると，

$$\lim_{a \to \infty} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = 1 \tag{10}$$

から，

$$\lim_{a \to \infty} A_a = 1 \tag{11}$$

が求まる。よって，

$$\lim_{a \to \infty} H = \sum_k p_k \equiv H^{\infty} \tag{12}$$

という不思議な結論が得られる。

つまり，全Hamiltonianは全粒子の運動量の和である。

この極限Hamiltonianを使って正準方程式を書き下すと，

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H^{\infty}}{\partial q_k} = 0, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H^{\infty}}{\partial p_k} = 1 \tag{13}$$

が得られ，方程式(1)には矛盾しないが，$\dot{q}_k$が任意の値をとれない。Inverse Legendre変換を行い，Lをp_kの関数のままで計算すると，

$$L^{\infty} = \sum_k \dot{q}_k p_k - H = \sum_k p_k - \sum_k p_k = 0 \tag{14}$$

となる。一方，Lagrangian (4)式のように$\dot{q}_k$の関数として計算すると，

$$L^{\infty} = \sum_k 1 = n \tag{15}$$

となり異なる値になる。これは問題点であり，次節で議論しよう。

いずれにせよH^{∞}はHamiltonianであり，保存量である。それは運動量が保存量であることからもうなずける。

これまではmを整数としたが，$m \geqq 0$の任意の実数でも同じ結論が得られる。$m < 0$の場合

は，$m=-1$，-2では運動方程式にゼロとなる係数がかかり採用できない。

$m\neq -1$，-2の負数でも$q_k=0$が特異点になることから工合が悪い。しかし，ゼロや特異点が含まれないかぎり，実は$\dot{q}_k^{m+2}$にかぎらず$\dot{q}_k$の任意関数でよいのである。

$$L=\sum_k f(\dot{q}_k) \tag{15'}$$

にとってみる。Lagrangeの運動方程式を書き下すと，

$$f''(\dot{q}_k)\ddot{q}_k=0 \tag{16}$$

となり，$f''(\dot{q}_k)$がいわゆる積分因子になっている。

もちろん，q_kが入ったり，他の粒子のq_l，$\dot{q}_l$の入った関数をLagrangianとして採用してもよい。そうすると，Hamiltonianの形が複雑になりここでの考察には適さない。

§3. 議　論

二階常微分方程式系が与えられたとき，かなり広い条件でLagrangian, Hamiltonianが存在する。それらを求める一方法が積分因子をかけて微分方程式系をSelf-adjointにすることである。Lagrangianの存在の必要十分条件が微分方程式系がSelf-adjointであることである。Lagrangianが求まるとHamiltonianが求まり，微分方程式系が解析力学の対象になる。

上の例は最初からSelf-adjointになっている微分方程式系にことさら積分因子をかけて，Lagrangian, Hamiltonianの種々の形を求めた。

この場合は，積分因子をかけることによって，Hamiltonianが全エネルギーという意味から全運動量までのいろいろな次元をもった物理量に対応することがわかった。

(14)式と(15)式の見かけの矛盾は以下のように考えると理解できよう。

p_kと$\dot{q}_k$との間の関係式(5)に着目する。$\dot{q}_k$を任意の値c_kにとり，p_kをmの関数と考えると，mが有限の間はp_kも有限値であるが，

$$\lim_{m\to\infty} p_k=\infty \tag{17}$$

とc_kの値によらないで発散する。ただし，c_kを正と考えておく。c_kを1にしても同じ。

一方，p_kを正の任意の値c_kとして，$\dot{q}_k$をc_kの関数と考えると同様にして，

$$\lim_{m\to\infty} \dot{q}_k=1 \tag{18}$$

なるc_kの値によらない極限値が得られ，これは(13)式に一致する。

H^{∞}を $\dot{q}_k$ の関数として表わした極限値として計算すると，

$$H^{\infty}=\lim_{a\to\infty}\sum_k (m+1)\,\dot{q}_k^{m+2}=\lim_{m\to\infty} n(m+1)=\infty \tag{19}$$

となり， p_k で表わした極限値

$$H^{\infty}=\sum_k p_k=n\times\infty=\infty \tag{20}$$

と一致する。

Hamiltonianについては矛盾はなく，Lagrangian については(14)式と(15)式の不一致が起こる。一応の説明としては，(5)式はあくまでも m が有限のときに成立つ関係式であり，極限ではこの関係式は使えない。実用的な説明としては，Lagrangian は $\dot{q}_k$ の関数として表わしたものでなければならず，m が有限のとき $L(m, \dot{q}_k)$ の形を求め，

$$L^{\infty}=\lim_{m\to\infty} L(m, \dot{q}_k) \tag{21}$$

とするべきである。又，Hamiltonian も $H(m, p_k)$ を使って，

$$H^{\infty}=\lim_{m\to\infty} H(m, p_k) \tag{22}$$

とすべきである。

このように考えると，(14)式と(15)式の不一致になやまされることもない。以上において $\{p_k\}$, $\{\dot{q}_k\}$ を p_k, $\dot{q}_k$ と略記した。

この問題点から考えると，(4)式の m は有限の実数にしておく方が無難といえる。

§ 4. おわりに

いわゆる Inverse Problem (Inverse Scattering Problem ではない。誤用されることが多い。）はもともとハドロン物理学と関係している。

拡がりをもった粒子の量子力学の建設のため古典力学で基礎固めをしようという目的で研究がなされている。しかし，物性研究者にとっても興味がもてる問題と思われる。

それは散逸系を保存系と同等に扱うことを目指すからである。

ここではもっとも単純な例について徹底的に考察して，その不思議さと面白さを示したが，非線形系についての adjointness は更に興味深く筆者の研究課題である。最後に京大理学部生物物理教室寺本研の新田克己氏に議論に加わっていただいたことを感謝します。

参　考　文　献

1) R. M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics I. Springer–Verlag (1978) P. 149 脚注。
II (Preprint 校正刷)