2次元スピン系と4次元ゲージ模型

筑波大・物理　　岩　崎　洋　一

副題は少し長くなるが，次に示す通りである。

クォークは閉じ込められているか？

$\wr\wr$

2次元古典O(3)ハイゼンベルク模型に於いて，$T\to 0$で，相関関数は指数的に減衰するか？

この副題をどう読むかというと，上の問題と下の問題は，本質的に同じ問題であるという statement, 次に，それぞれと問題は現在どこまで明らかになっているかという問いと両方を表わしている。

まず，その statement の説明にかなりの時間を使い，その後で，下の方の問題をかなり詳しく論ずるつもりである。

§1. 空間d次元量子場の理論と空間d＋1次元古典統計力学の同一性

このことは，かなり常識になってきているが，統計物理と場の理論を結ぶ重要なかけ橋である。証明は，量子力学において e^{-iHt} の代わりに $e^{-H\tau}$ という作用系の期待値 $\langle q_f | e^{-H\tau} | q_i \rangle$ を周期的境界条件をつけて，経路積分の形に直せば，一次元の統計力学の分配関数の形に正確になることになる。場の理論の時も同様。（詳しい証明は略）

2つの系が同一であることに依り，2つの系の物理量の間にも同一性が存在する。

第一の関係は，

$$f \equiv \varepsilon \tag{1}$$

左辺はd＋1次元の統計力学における free energy の密度，右辺は，d次元の量子系の基底状態のエネルギー密度を表わす。

第二の関係は，

$$\frac{1}{a}\xi^{-1} = E_1 - E_0 \tag{2}$$

左辺は correlation length の逆数，右辺は量子系における， mass gap を表わす。a は格子間隔。

§ 2. 立場の違い

前節において，統計力学と場の理論の同一性を論じたが，物性物理と素粒子物理との間に大きな立場の違いがある。物性物理においては，格子間隔 a は有限な値をもつ実在する量であるが，素粒子物理においては，格子間隔 a は，紫外発散をとり除く為に導入された切断である。物理量を計算して，くりこみを行ない，最後に $a \to 0$ の極限をとったものが，理論である。この極限が存在し，かつ，その極限でユークリッド不変性を回復しなくてはならない。その為には，系が第二種相転移点の ϵ 近傍でなくてはならない。$a \to 0$ の極限と $\varepsilon \to 0$ の極限を同時にとるのである。

第二種の相転移点の近傍では，相関距離が大きくなるので，相関距離程度の距離を問題にする限り，格子構造に依ることは消えてしまい，ユークリッド不変性が回復することが期待される。又， mass gap は素粒子物理の場合，最小の質量単位に対応する。この量は，一定の有限な値をもつ。その為には，(2)式より， $a \to 0$ 極限で $\xi \to \infty$ で $a\xi$ 一定でなければならない。

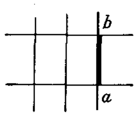
§ 3. ゲージ格子模型

前節に述べたように，紫外発散をとり除く為の切断として，格子を導入し，格子上で，電磁気学を考えてみる。ただしゲージ不変性は保つようにする。 Bohm–Aharanov の実験でも知られているように，量子力学において，重要な量は

$$\exp(i e \int A_\mu dx_\mu) \tag{3}$$

という量である。これは，数学でも， fibre bundle の connection として，本質的な量である。

この量を，格子上のボンドに対応させる。



$$\Rightarrow \exp(i e \int_a^b A_\mu dx_\mu) \tag{4}$$

ところで $e\int_a^b A_\mu dx_\mu \equiv \theta(a, b)$ とすると，この量は

$$\exp i\theta(a, b) \tag{5}$$

とかける。これは群U(1)の要素である。元々， A_μ の値は $-\infty$ から $+\infty$ まで取り得て，それぞれ異なる物理量であったが，(5)式の形に書くと， θ の周期関数で $0 \leq \theta \leq 2\pi$ と考えてよい。

すなわち，1つ1つのボンドにランダム変数としてU(1)の要素が対応する。このボンドは向きをもっていて，向きを逆にすると $\exp(-i\theta(a,b))$ となる。ゲージ変換において(5)の量がどう変化するかは，(4)式にもどればただちに分かる。

$$\text{ゲージ変換：} A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} \tag{6}$$

に対し

$$\exp(ie\int_a^b A_\mu dx_\mu) \rightarrow \exp(-ie\Lambda(a))\exp(ie\int_a^b A_\mu dx_\mu)\exp(ie\Lambda(b)) \tag{7}$$

$$= \exp(-i\alpha(a))\exp(i\theta(a,b))\exp(i\alpha(b)) \tag{8}$$

故に

$$\exp(i\theta(a,b)) \rightarrow \exp(-i\alpha(a))\exp(i\theta(a,b)\exp(i\alpha(b)) \tag{9}$$

この(9)式によってゲージ変換が定義できる。$\exp(i\alpha(n))$ 自身，群U(1)の要素であることに注意。$\exp(i\theta(a,b)) \equiv U(a,b)$ を任意の閉じたループ(C)に沿って並べたものは，ゲージ不変である。

$$\prod_{C} U(a,b) \tag{10}$$

こうすると，C上の格子の site には，必らず入ってくるボンドと，出ていくボンドが存在するので，式(9)による変換で，不変である。

Action はゲージ不変でなければならない。ゲージ不変量として一番簡単なものは，最小の閉じたループ（プラケット）に対する式(10)である。これをすべてのプラケットに対して足し合せたものが Action である。すなわち

$$A = \frac{1}{e^2}\sum_{\square} UUUU \tag{11}$$

ここで□はプラケットを意味する。

今までは，電磁気学に対応するU(1)格子ゲージ理論を論じた。U(1)の群はアーベル群（可換群）なので，可換格子ゲージ理論とも呼ばれる。（電子のことは，はぶいたが，簡単に導入できる）

ところで，素粒子物理のクォーク力学に対するものは，非可換ゲージ理論である。この理論は，可換ゲージ理論の簡単な一般化によって得られる。（以下 SU(2) の群のときを論ずる）

すなわち，各ボンドに U として，SU(2) の基本表現($J=1/2$ 表現)を対応させる。式(9)に対す

るゲージ変換は

$$U(a,b)\to V^{-1}(a)U(a,b)V(b) \tag{12}$$

ここでVはやはりSU(2)の行列。ゲージ不変量は式(10)に対して

$$\mathrm{Tr}\,(P\prod_{C}U(a,b)) \tag{13}$$

ここで，Pは path に沿って順序を並べるという意味である。式(11)に対する Action は

$$A=\frac{1}{g^2}\sum_{\square}\mathrm{tr}\,(UUUU) \tag{14}$$

で与えられる。

式(11)，式(14)のe^2，g^2はそれぞれ結合定数である。元のQED等と比べて，規格化は行われている。ところで第一節に述べたことによると，このe^2，g^2は，統計力学における温度Tに対応することが分かる。統計力学と同じように，e^2，g^2を変えたときに，相はどのように変化するか，特に相転移点はどこに存在するかを見つけることが重要である。その為には，相関関数を調べる必要がある。

§4. 相関関数

相関関数$<UU\cdots U>$は，$UU\cdots U$がゲージ不変量でない限りゼロとなる。そこで，ゲージ不変な相関関数のみを考える。前節に述べたように，閉じたループにそってUを沿べたもの

$$\mathrm{tr}\,(P\sum_{C}U) \tag{13}$$

がゲージ不変量である。閉じたループとして，長方形をとり，一辺の長さをT，もう一辺の長さをRとする。このときの式(13)のことを特にウィルソン・ループと呼ぶ。

$$W(C)=\mathrm{tr}\,(P\prod_{C}U) \tag{15}$$

Cを大きくしていく極限で，$W(C)$の漸近的振舞は大きく分けて

$$W(C)\propto\exp(-CA) \tag{16}$$

又は

$$W(C)\propto\exp(-C'L) \tag{17}$$

となる。ここでAは，Cで囲まれる最小の面の面積，LはCの周囲の長さである。式(16)と(17)の違いによって，ゲージ模型は2つの相に分れる。これはスピン系に於いて，2点相関関数$\Gamma(r)$が

$$\Gamma(r) \propto \exp(-Cr) \tag{18}$$

又は

$$\Gamma(r) \propto C' \tag{19}$$

となることに対応している。

式(19)が秩序状態，式(18)が非秩序状態に対応しているのと同様，式(17)が秩序状態，式(16)が非秩序状態に対応している。どんなゲージ変換型でも高温（$g^2 \gg 1$）では，非秩序状態であることが証明されている。スピン系と同じ結論である。

次にウィルソンループの物理的意味を述べる。この為には，第一節で述べた統計力学と量子系の同一性を用いる。いままでは，ウィルソル・ループは統計力学の言葉で定義されたが，これを，量子系の言葉でいい直す。すると

$$\lim_{T\to\infty} W(C) \propto \exp(-V(R)\,T) \tag{20}$$

ここで

$$V(R) = E_0(J(R)) - E_0 \tag{21}$$

という関係式が証明できる。$V(R)$はスタティック・ポテンシャルと呼ばれるものである。(21)の右辺で$E_0(J(R))$はC数の外場としての電荷が距離R離れておかれた時の真空のエネルギーである。

式(16)，(17)と式(20)，(21)とを組合せると，

$$W(C) \propto \exp(-CA) \Rightarrow V(R) = CR \tag{22}$$

又

$$W(C) \propto \exp(-C'L) \Rightarrow V(R) = C' \tag{23}$$

すなわち，ウィルソン・ループが面積則に従う時は，ポテンシャルは距離に比例して大きくなる。すなわち，クォークを引き離すのに，無限のエネルギーがいる。これはクォークが閉じ込

められていることを意味する。すなわち，

閉じ込めの相　＝　非秩序状態

これで，statement の半分は終った。

§5. なぜ non-abelian lattice gauge theory か？

クォーク力学の特徴として，クォークの「閉じ込め」と同時に，クォークの「漸近的自由性」という重要な性質がある。これは，クォークが近距離で相互作用するときは，ほとんど自由粒子のように振舞うという性質である。一方でこのように振舞い，かつ，クォークは粒子として観測されない（すなわち〝閉じ込め〟られている）という，一見，相矛盾する性質を同時に説明することが，素粒子物理の重要な問題の１つである。

ところで，この漸近自由性は，くりこみ群のβ関数が$g=0$の点で負の傾きをもっていることと同等である。４次元の場の理論の中で，この条件を課し，物理的にもっともな理論を捜すと，non-abelian gauge theory が唯一の可能性として残る。これを調べるには，普通のQEDのように，continuum theory で摂動を用いて調べる。ところで，continuum theory で摂動が正しいとすると，クォーク等が粒子として振舞う。これは矛盾である。この事について，摂動は，クォークが近距離で相互作用する時のように，特別の場合のみ適用できる，と考えられている。

クォークの〝閉じ込め〟，素粒子の質量等は，理論の非摂動的取扱いによって，解明できると考えられている。ところで，場の理論は，有名な紫外発散を含んでいる。これを切断する為に，かつ，ゲージ不変性を保つように，格子上でゲージ理論を考える。故に，非可換格子ゲージ理論がクォーク力学の基本理論である。

ところで，摂動論は限られた現象に対してではあるが，意味をもっている。この摂動論は$g\sim 0$で考えられる。格子ゲージ理論は高温（$g\gg 1$）では，非秩序状態（閉じ込めの相）にあるが，もし，有限のg_cで相転移を起し，$g\sim 0$では閉じ込めの相でないとすると矛盾する。すなわち一方で〝漸近的自由〟を説明する為に，$g\sim 0$を考えなくてはならなく，そこが〝閉じ込めでない相〟となるからである。結論として，非可換ゲージ理論が，高温（$g\gg 1$）から$g=0$まで移る間に，相転移がないことが必要である。

ところで，スピン系は高温では非秩序状態であるが，３次元以上では，温度を下げると秩序状態に相転移する。２次元は，ぎりぎりのところで，秩序状態は存在し得ないが，planar 模型のように，相関関数がベキ乗で減衰する相へ，相転移する場合もある。O(3)のハイゼンベルク模型は，有限の温度で相転移がないと信じられている。ゲージ模型でも同様で，高温（$g\gg 1$）で非秩序状態（〝閉じ込め〟の相）であるが，５次元以上では，温度を下げると秩序状態に移

る。4次元がぎりぎりの次元で，U(1)格子ゲージ模型では，2次元の planar 模型と同様に，相関関数がベキ乗で減衰する相へ相転移する。非可換ゲージ理論では，2次元ハイゼンベルク模型と同様に有限の温度では，相転移が起きないことが期待されている。これで statement 終り。

§6. いままでのまとめ

クォーク力学の特徴は2つあり

① 漸近的自由

② 閉じ込め

である。①は continuum theory で摂動で示される。②を示すには，非摂動的とり扱いが必要である。非摂動的なとり扱いには2つの方法がある。

㋑ 非摂動論的に理論を定義 ⇨ 格子ゲージ理論

㋺ continuum theory で，非摂動的効果を上手にとり入れる。

㋑の方法は，はっきり定義されているが，解析的計算には向かないし，$a\to 0$ の極限をどうとるか等の問題がある。㋺の方法は，どう定義されているか明らかでないが，解析的計算には向いている。

又㋑と㋺は同等かという問題もある。

§7. モンテカルロ法の結果

前節の㋑の方法は，モンテカルロ法などの数値計算には向いている。

Creutz が非可換格子ゲージ理論を用い，モンテカルロ法でウィルソン・ループの温度依存性を調べた。その結果，相転移はなく，かつ，低温（$g<1$）での振舞はくりこみ群の結果と定量的に一致することを示した。

これと同様のことを，2次元O(3)古典的ハイゼンベルク模型について，Shenker と Tobochnik が，やはりモンテカルロ法で，ウィルソン・カダノフ流のくりこみ群の処方せんを用いて調べた。結果は，相転移がないこと，低温（$T<1$）での，相関距離の温度依存性はくりこみ群と定量的に一致することを示した。更に，高温と低温との境がはっきりしていて，高温側は，高温展開の結果とよく一致し，低温側はくりこみ群の結果とよく一致すること，低温側は，ブロック・スピン変換によるくりこみ群がうまくいくが，高温側ではうまくいかないことを示した。この仕事が，2次元古典ハイゼンベルク模型で相転移がないことをはっきり示した最初の仕事であろう。

このように，２次元の古典ハイゼンベルク模型と，４次元の非可換ゲージ模型とは，非常によく似ている。そこでまず２次元の古典ハイゼンベルク模型を調べて，その結果による類推を用いて，４次元非可換ゲージ模型を調べることにする。

§ 8.　２次元古典ハイゼンベルク模型

この模型の，連続模型は，非線型 O(3)シグマ模型になる。この連続模型を用いて，ハイゼンベルク模型の低温側の性質を調べる。これは6節でいう㊁の方法である。Shenker と Tobochnik はもちろん㋑の方法でモンテカルロ法を用いたのである。㊁の方法で㋑の方法の結果が導びけるかという問題である。

ハイゼンベルク模型のハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{T}\sum_{<i,j>} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \qquad \sum S_i^2 = 1 \tag{24}$$

$$= +\frac{1}{2T}\sum_{<i,j>}\left((\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_j)^2 - 2 \right)$$

故に連続極限で

$$H = \frac{1}{2T}\int\left(\sum_{<i,j>} (\partial_\mu S_i)^2 + \mathrm{const}\right) d^2x \tag{25}$$

となる。場の理論として考えるときは，$H \to L$，$S \to \sigma$，$T \to f$ とおきかえて

$$L = \frac{1}{2f}\sum_{i=1}^{3} (\partial_\mu \sigma_i)^2 \ : \ \sum \sigma_i^2 = 1 \tag{26}$$

と書く。 partition function は

$$Z = \int D\sigma\, \mathrm{e}^{-\int L d^2x} \tag{27}$$

$T \ll 1$のとき，すなわち$f \ll 1$のとき，(27)を証価するのに，鞍点法を用いてよい。すなわち，$\int L d^2x$ を有限にする，オイラーの運動方程式の解のみを考えればよい。この解は，インスタントン解として，全部分かっている。

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{cl}} + \sigma_{\mathrm{q}} \tag{28}$$

と分ける。σ_{cl} として運動方程式の解をとる。σ_{q} の２次の項まで残し，(27)式の functional integration を行う。（1 loop までの量子効果を計算したことになる。）２点相関関数についても，同じことができる。その結果（途中の計算は省略，詳しくは小生のプレプリント "Instanton Contributions in 2d O(3) non-linear σ model" を参照のこと），相関距離が解析的に計算できて，

$$\xi = \frac{\exp(1+\gamma-\pi/2)}{64\sqrt{2}} \exp^{2\pi/f(a)} \frac{f(a)}{2\pi} a \tag{29}$$

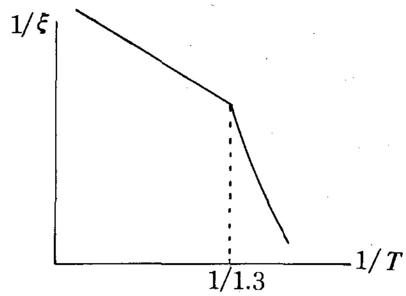
となる。ここで a は格子間隔，$f(a)$ は，格子間隔 a のときの f の値（T に対応），γ はオイラーの定数である。数係数

$$C = \frac{\exp(1+\gamma-\pi/2)}{64\sqrt{2}} = 0.0112 \tag{30}$$

を，Shenker と Tobochnik のモンテカルロ法の結果と比べてみる。彼等が得た値は 0.01 であり，見事に一致する。

この結果は，回の方法（連続理論）でも，インスタントンを考慮することにより，非摂動効果も正しく取り入れることができ，④の方法（格子理論）と一致することを示している。［(29)の結果は $f<1$ のときの主要項として厳密である］

モンテカルロ法による結果は，相関関数を温度の関数とみると，



のように，折れまがりが存在する。$T<1.3$ 以下では，式(29)と一致する。$T>1.3$ では高温展開と一致する。ところで，高温側では，Bloch wall が系を disorder することが分かっている。$T<1.3$ では，インスタントンが，系を disorder することが示された。故に2次元古典ハイゼンベルク模型は，相関関数が exp. damp. するという意味では相転移が存在しないが，新しい型の相転移が $T\sim1.3$ で起っていることを上の解析は強く示唆する。高温側を，イジング模型で effective に置きかえることにより，転移点をもとめると $T\sim1.3$ という値を得ることができる。

ゲージ模型でも同様のことが起っていると予想できる。しかし，解析的な計算はまだ行なわれていない。低温ではインスタントンが系を disorder させ，高温では vortex が系を disorder させていると考えられる。その転移点を，一種の平均場近似により得ることができた。

これからの課題としては，新しい型の相転移を調べること。素粒子物理においては，インスタントンの効果の解析的計算，数値計算にクォークの影響を与えることなどがある。