

# 相転移の統計物理の最近の発展

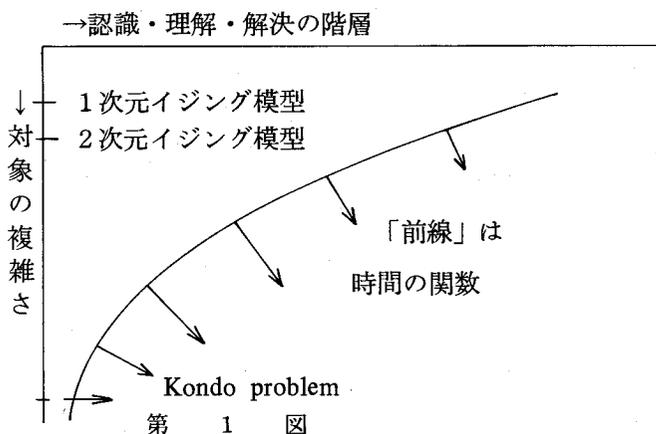
東大・理 鈴木 増 雄

## § 1. はじめに

相転移・臨界現象の理論的研究には、最近目覚ましい発展が見られた。それを二つに分類すると、硬派 (hard theory) と軟派 (soft theory) に分けられるかと思う。前者は数学的に厳密な話で、後者は、直観的、現象論的、近似的な理論である。もっとも同じ人でも、その人の年齢や、研究対象によって、硬派と軟派の研究をうまく融合させていることもある。

## § 2. 硬派理論

硬派の人々は、とにかく対象を単純化し、モデル化して研究することが多い。対象を単純化すればするほど、その系の性質は詳しく深く研究され、厳密な知識が増し、認識の階層が深まり、対象が現実に近く複雑になる程、厳密な情報が少なくなる。横軸に認識の階層の深さを目盛り、たて軸に、対象の複雑さを目盛って、研究の現状の「前線」を書くと、大雑把には双曲線のようなものになるだろう。多くの人々の絶えざる努力により、この「研究前線」は右下方にと進行している。(第1図参照) どの目盛りにどんなモデルがきて、それがどこまで厳密に解かれ

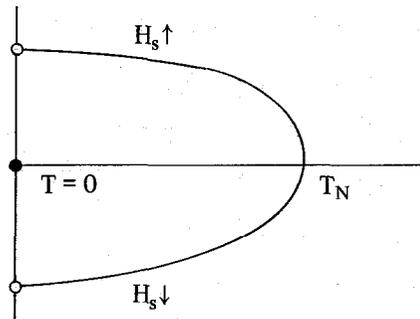


ているかを詳しくここにまとめるスペースはないので、私なりに興味のある事項を列挙することにしたい。

1. 自由エネルギーの存在証明 — 平衡系における熱力学的極限の存在証明 (van Hove, Fisher,

Lebowitz, Griffiths, Lieb)。非平衡系における久保の示量性の仮説<sup>1)</sup>は、上の一般化になっており、この非平衡系の熱力学的極限の存在の証明は著者によって一般的条件の下で与えられている<sup>2)</sup>。

2. 対称性を破る外場が存在する時の自由エネルギーの解析性— Lee-Yang の円定理<sup>3)</sup>、量子系への拡張<sup>4,5)</sup>。
3. 反強磁性の相転移と Néel state。基底状態は singlet であるから、丁度  $T=0$  では、対称性の破れはないのだろうか。相図は、第2図のようになるのだろうか。これに対する P.W. Anderson のタイムスケールによる soft theory はあるが、hard theory はまだ無い。



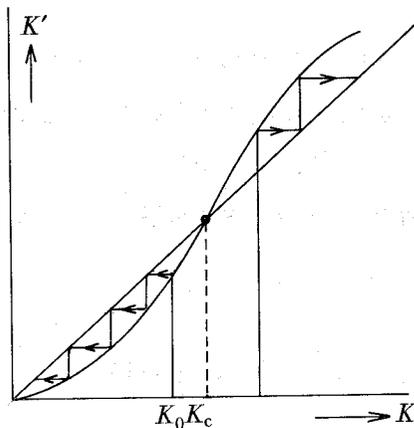
第2図  $H_s$ : staggered field

4. 相関不等式 (Griffiths)。強磁性イジング模型、量子XY-模型 (Gallavotti, Suzuki) に対して証明されており、これを用いると、相転移点の下限や上限が厳密に求められる。
5. 伝送行列 (transfer matrix) の対角化。この方法により2次元イジング模型の厳密解 (Onsager, 但し、外場  $H=0$  の場合) が得られている。 $T_c$ での比熱の対数発散はあまりにも有名。さらに2次元系の ice problem, eight vertex model 等が Bethe Ansatz の方法により解かれている。特に、Baxterの解は、現在厳密に解かれているモデルをほとんど全部含んでおり、大変重要である。彼の eight vertex model の解の特徴は、臨界指数が相互作用の強さによって連続的に変ることである。これはそれまでの普遍性の概念に反するものである。しかし、著者の主張する「弱い普遍性」すなわち、相関距離  $\xi$  をもとに定義した臨界指数  $\tau/\nu$ ,  $\beta/\nu$ , ...等は普遍的であるという命題は満足している。

6. 最近, Bethe Ansatz を用いて, Kondo problem の厳密解が得られている。但し, 物理的に新しい結果が得られているとは言えないようである。( K. Yoshida グループの仕事を参照。)
7. gauge invariant model と相転移の関係<sup>9)</sup>が最近, クォークの閉じこめと関連して話題になっている。
8. その他, 多数, 厳密な結果が得られている<sup>10)</sup>

### § 3. 軟派 (soft theory)

Landau の相転移の現象論は, 相転移の理論の出発点になっている。これは, 分子場理論と等価であるから, 現在の進んだ理論 (例えば, くりこみ群の理論) も分子場近似の結果が出発点であると言ってもよい。Kadanoff のスケーリング理論すなわちセル解析の理論<sup>10)</sup>は, これを現象論的に一般化し, 臨界現象の理論のわく組みを与え, 実験結果の整理に大いに役立った。Wilson<sup>11)</sup> のくりこみ群の方法は, このスケーリング理論というわく組みに中味を与えたものである。この方法を一口に言うと, 短距離のゆらぎを, より長距離の方にとり入れ (くりこんで), 漸近式を出し, その固定点近傍での振舞いから, 異常性, 特に, 臨界指数を求めるのである。その漸化式は, 例えば簡単には, 相互作用  $K$  (イジング模型では  $J/kT$ ) から, 新しい相互作用  $K'$  の変換  $K' = f(K)$  として与えられ, その変換の様子は, 第 3 図のようになる。固定



第 3 図 くりこみの漸化式  $K' = f(K)$

点  $K^* = f(K^*)$  は、臨界点  $K_c$  を与え、この点の近傍での様子、特に  $A = (\partial f / \partial K)_{K=K^*}$  によって、臨界指数  $\nu (\xi \sim (T - T_c)^{-\nu})$  が、 $\nu = \log L / \log A$  のように与えられる (Wilson の公式<sup>11)</sup>)。但し、 $L$  はスケール変換の長さ、すなわち、セルの大きさを表わす。このくりこみ群の方法の特徴は 1.  $f(K)$  が  $K$  に関して解析的で、2.  $f(K)$  が近似的に簡単に作れ、3. それにもかかわらず、異常性が調べられることである。この方法は、非常に多くの問題に応用されている<sup>10, 11)</sup>。特に、もっとも簡単な Migdal 近似によるくりこみ群の方法が盛んに用いられている。ところが最近、Griffiths はこのくりこみ群の方法に対する批判を行っている<sup>12)</sup> すなわち、くりこみ変換  $f(K)$  は、まじめに、熱力学的極限をとって実行すると、固定点のところで解析的でなくなることを指摘して、くりこみ群の方法の基礎を研究する必要があることを強調している。

#### § 4. 非平衡系の相転移と臨界緩和

開放系でパラメタを変えて行くとき、系の性質がカタストロフックに変るところとして、非平衡系の相転移点を定義すると、これは非常に拡張された概念であってこの転移点では、必ずしも、臨界緩和が起らないことが示される。臨界緩和が起る条件は、あるモード  $Q$  の定常状態での期待値  $\langle Q \rangle_{st}$  がその点で発散するか、分布  $P_{st}(x)$  がそこで singular であるか、または、初期分布  $P_{ini}(x)$  が singular であるかのどれかであることが示されている<sup>13)</sup> この議論にも、過渡現象に対する著者のスケーリング理論<sup>14)</sup> が大変有効であることがわかった<sup>13)</sup> また、stochastic Liouville equation<sup>15)</sup> も大変役に立つ<sup>16)</sup>。

#### § 5. 今後の問題

今後に残された問題は、非常に多数あるように思われるが、どれが特に価値があるとみるか、興味があるかは人によって違うだろうが、一応次のようなことを思いつくままに列挙してみる。

1. 量子系の相転移 (スピン系、ボーズ系、その他)。
2. 非一様な系での相転移の動力学、スピノーダル分解。
3. 1次転移とそのダイナミックス。
4. スピングラスの相転移<sup>17)</sup>。
5. ゲージ不変なイジング模型及び一般の  $O(n)$  系の相転移。
6. くりこみ群の基礎づけ。
7. 動的臨界現象と実空間くりこみ群の理論。
8. その他

## 参 考 文 献

- 1) R. Kubo, K. Matsubo and K. Kitahara, *J. Stat. Phys.* **9** (1973), 51.
- 2) M. Suzuki, *J. Stat. Phys.* **20** (1979), 163.
- 3) T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **87** (1952), 410.
- 4) T. Asano, *J. Phys. Soc. Japan* **29** (1970), 350.
- 5) M. Suzuki and M.E. Fisher, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 235.
- 6) N. Andrei, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980), 379.
- 7) N. Andrei and J.H. Lowenstein, 「Scales and Scaling in the Kondo Model」 (preprint, 有限温度の解)
- 8) P.B. Wiegmann, 「Exact Solution of the s-d Exchange Model」 (preprint, Landau Institute for Theoretical Physics).
- 9) J.B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 659.
- 10) C. Domb and M.S. Green のシリーズ参照。
- 11) K.G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1975), 773.
- 12) R.B. Griffiths, IUPAP Conference in Alberta, 1980.
- 13) M. Suzuki, K. Kaneko and F. Sasagawa, *Prog. Theor. Phys.* submitted, 及びその中の引用文献。
- 14) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976), 77 and 477; *ibid* **57** (1977), 380; *J. Stat. Phys.* **16** (1977) 11 and 477; *Advances in Chem. Phys.* **64** (1980) in press.
- 15) R. Kubo, *J. math. Phys.* **4** (1963), 174.
- 16) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Supplement* (久保先生還暦記念号), 1981.
- 17) M. Suzuki and S. Miyashita, *Proceedings of the 14th IUPAP Conference in Alberta, 1980*, 及びその中の引用文献。