不規則系における Replica の方法

東大・理　　田　中　文　彦

乱れた体系を取り扱う場合，ある物理量をある段階で不規則さの分布について平均をとる必要に迫られる。 Replicaの方法はこの平均操作をできるだけ早い段階で遂行することを可能にして対象を一様な規則系に変換してくれる。その際，不規則系特有の難かしさはこの等価な一様系が乱れを媒介とした相互作用を持つ多体系で，場の成分数$n\to 0$の極限をとらなければならないという点にしわ寄せされている。従ってこの0成分多体問題が解ける場合，あるいはその性格がよく知られている場合にはこの方法は絶大な威力を発揮するが，そうでない場合は新しい問題に対面することになる。歴史的に見ると高分子の排除体積効果の問題は前者の典型的な例で変換された一様系が磁性体の臨界現象の研究でなじみ深いモデルであった。その後，スピングラスの問題にこの方法が導入されて，一躍有名になったが，皮肉なことにこの問題は後者の例になっており，新しいオーダーパラメータの概念は発見されたものの理論は今のところ混沌としている。また近年，電子局在の問題もこの方法を基礎にして新しい視点から見直され整理されつつある。数学的基礎づけは不十分なものの，その秘めたる可能性は絶大である。

§ 1.　ランダムな行列の固有値分布　— 序にかえて —

$i, j, \cdots$ を格子点番号としてランダムな行列$H_{ij} \equiv \varepsilon_i \delta_{ij} + t_{ij}$の固有値の分布を求める問題は物理のいろんな分野で現われる。ここに ε_i や t_{ij} はある確率法則で分布しているということしか知られていない行列要素である。この行列の固有値分布（状態密度）は

$$N(E) = -\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\ \rho(E+i\delta) = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\ \rho(E-i\delta)\ ,$$

$$\rho(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_i < G_{ii}(E) >, \tag{1}$$

とグリーン函数$G_{ij}(E) \equiv (E-\hat{H})^{-1}_{ij}$の乱れに対する平均$<\cdots\cdots>$を調べることで得られるが函数$\rho(E)$は

$$Z_\sigma \equiv Z(E_\sigma) \equiv \int \prod_i d\phi_i \exp \frac{i\sigma}{2}\sum_{i,j} \{ (E_\sigma - \varepsilon_i)\delta_{ij} - t_{ij} \} \phi_i \phi_j \tag{2}$$

という量（$E_\sigma \equiv E \pm i\sigma\delta$, $\sigma = \pm 1$）を導入すると

$$\rho(E) = 2\frac{\partial}{\partial E} < -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln Z(E) > \tag{3}$$

と書ける。これは quench されたランダム磁性体の自由エネルギーを求める問題と形式的に類似していて $\ln Z$ なるものの平均を取ることの困難が生じている。ところが恒等式[1]

$$< \ln Z > = \lim_{n\to\infty} < \frac{Z^n - 1}{n} > = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln < Z^n > \tag{4}$$

なるものを用いると $\ln Z$ の平均が Z^n の平均で置き換えられ，この平均は直ちに行えるということになる。(2)の Z で言えば $< Z^n >$ は n 個の同じ体系（その変数を $\{\phi_i^\alpha\}$ $\alpha = 1, \cdots n$）を導入して ε_i と t_{ij} の分布で平均してやれば良い。(3)は

$$\rho(E) = -2\frac{\partial}{\partial E} \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to 0} \frac{1}{Nn} \ln < Z(E)^n > \tag{5}$$

となる（limの順序に注意）。この仮想的に導入した n 個の相似体系を元の系の Replica と言う。簡単に答の得られる例としては

(i) Lloydポテンシャル[2] t_{ij} 一定，ε_i 分布 $P(\varepsilon_i) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\gamma}{\varepsilon_i^2 + \gamma^2}$

(ii) semicircular law [3]（$\varepsilon_i \equiv 0$，$P(t_{ij}) =$ Gauss 分布，長距離相互作用極限）

などがあるが，もっと複雑な体系への応用も試られており，また現在知られている近似法（CPA 等）を統一的に導くことも可能である。

§2. 高分子 —Self-Avoiding Random Walk—

格子点上の酔歩で自分の通ってきた経路には決して重なってはいけないという条件をつけたもの (Self-Avoiding Random Walk SARW) を考える。この問題は一個の高分子鎖の振舞いをみる格好のモデルである。格子点 i から出発して N ステップで j に到達する SARW の経路の数を $Z_N(i, j)$ と書くと，これに関する次の定理 (de Gennes)[4] は Replica 法が成功した例の代表格であろう：

定理：この格子点上に古典的 n 成分のスピン $\{\vec{\sigma}_i\}$ を導入し，Heisenberg モデル $\mathcal{H} = -J\sum_{(i,j)} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$ を考える。但し各スピンは大きさが n に制限されている（$\sum_{m=1}^{n} \sigma_i(m)^2 = n$）。$J$ は最近接相互作用。このスピン系で相関函数 $G_{ij}^n \equiv \frac{1}{n} < \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j >$ を計算し，それを高温展開（$K \equiv J/k_B T$ についての展開）して $n \to 0$ の極限をとると各項の係数が $Z_N(i, j)$ である：

$$G_{ij}^0 = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} < \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j > = \sum_{N=0}^{\infty} K^N Z_N(i, j) \tag{6}$$

この定理により直ちに次の結論が得られる。

(i) 磁性体の帯磁率は $\chi=\sum_j G^0_{ij}$ より求められるが(6)の展開により $\chi=\sum_{N=0}^{\infty} K^N Q_N$ となる。Q_N はある格子点から出発する SARW 経路の総数である（$Q_N\equiv\sum_j Z_N(i,j)$）。磁性体の臨界現象の研究により χ の異常性 $\chi\sim(K_c-K)^{-\gamma}$ は知られているからこれを高温展開し各項を比較して

$$Q_N \underset{N\to\infty}{\sim} K_c^{-N} N^{\gamma-1} \tag{7}$$

と高分子のサイズNが大きくなった時の漸近形が分ることになる。

(ii) 相関距離 $\xi^2\equiv\sum_i R_i^2 G^0_{0i}/\sum_i G^0_{0i}$ についても同様のことを行うと，今度は高温展開の係数に $\ell_N^2\equiv\sum_i R_i^2 Z_N(0,i)/\sum_i Z_N(0,i)$ という高分子の両端距離が現われ $\xi\sim(K_c-K)^{-\nu}$ から

$$\ell_N \underset{N\to\infty}{\sim} N^{\nu} \tag{8}$$

と臨界指数 ν で書くことができる。

以上の定理は完全な SARW（重なる経路の出現確率＝０）であったが，いろいろな重なり方に対して小さいが有限の確率を与えた時に，それに対応する磁性体のモデルを見出すことが可能である。[5] 高分子溶液で濃度が少し濃くなってくると重なる確率が出てくるから，拡張した定理はより現実的と思われる。また，多数の高分子が絡み合って取り得る位相空間の領域が限られているときも，ある種のゲージ場を導入して $n\to 0$ の極限をとる問題に変換できる。[6]

§ 3. スピングラス　— Sherrington-Kirkpatrick モデルをめぐって —

長距離相互作用の極限を厳密に解くことはスピングラスに於いても分子場理論の完成を意味する。そこで極端に理想化されたモデル（SKモデル）[7]

$$\mathcal{H}=-\sum_{(i,j)} J_{ij}\sigma_i\sigma_j\,,\quad(\sigma_i=\pm 1)\,,\quad P(J_{ij})=\mathrm{e}^{-J_{ij}^2/2J^2}/\sqrt{2\pi}J \tag{9}$$
（J_{ij} はあらゆるペアにいて。$J\equiv\tilde{J}/\sqrt{N}$）

を解くことに理論家は相当な労力を費してきたが今のところつじつまの合った答は得られていない。この問題でも Replica の方法は重要な役割を果たしてきたが変換した後の系が新しいタイプで，これを扱うのに試行錯誤がくり返されている。しかしながらこの方法はスピングラス相を特徴づけるオーダーパラメータの概念を導入するのに適した形をしており新しいタイプの相転移の研究に欠くことのできないものであった。さて(9)に対する分配函数は Replica を用いて

$$< Z(\beta)^n > = e^{nN\beta^2 \mathcal{J}^2/4} \int \prod_{\alpha<\beta} d\, q_{\alpha\beta}\, e^{-Nf(\{q\})} \,, \tag{10}$$

$$f(\{q\}) \equiv \frac{1}{2} \beta^2 \mathcal{J}^2 \sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha\beta}^2 - \ln \mathrm{Tr}_\sigma \exp(\beta^2 \mathcal{J}^2 \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta)$$

と $n(n-1)$ 個の変数 $q_{\alpha\beta}$ での積分の形に形式的に表現できる。(10)は$N\to\infty$で鞍点法に適した形になっており，nを固定して$N\to\infty$をとることを許したとすると（本来の順序とは逆）鞍点で

$$q_{\alpha\beta}^* = < \sigma^\alpha \sigma^\beta > \tag{11}$$

という条件を得る。

(i)　SK解[7]　　鞍点(11)は指標α，βによらず一定$\equiv q^*$ と仮定した。スピングラスの特性をほとんど再現できるが

(a)　絶対0度でエントロピーが負（$S_0/N k_B = -\frac{1}{2\pi}$）

(b)　q^*鞍点は対称性を破る摂動に対し不安定[8]

という致命的欠陥があった。そこで Replica の対称性の破れた鞍点が正確な解を与えるであろうという希望のもとにSK解を修正する試みが多数なされている。

(ii)　Replica 対称性の破れ　　その基本的考えはn個の Replica をいくつかのグループに分け，各グループごとに未知数qを導入することである。現在まで多数の試行錯誤[9]があったが，一般的な傾向は，未知数の数を増やす程(a)のエントロピーの値は0に近づき，ある種の極限で(b)の安定性が回復されるということである。

さて，解を修正して行く方向の数学的手続きがたとえ分ったとしても，消失する（$n\to 0$）空間での対称性の破れが物理現象として何を意味しているかをみるのは簡単なことではない。ひとつの解釈[10]は，スピンの配位空間で与えられた$\{J_{ij}\}$に対してエネルギーがほとんど縮退した極小が多数存在する（それはグラスである所以であるのだが）事実から導ける。但しこの解釈によるとあらゆる対称性の破り方について和をとらなければならないから絶対0度のエントロピーは有限になる可能性がある。

§4.　ランダムポテンシャル

電子局在に関連して次の様なモデルがよく問題になる。$V(x)$を確率的にゆらぐランダムなポテンシャルとして，この場の中の電子の運動

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\phi(x) = E\,\phi(x) \tag{12}$$

のびろがりが$V(x)$のゆらぎの大きさと共にどう変化するかという問題[11]である。$V(x)$がGaussianで white のとき

$$\langle V(x)\rangle = 0, \quad \langle V(x)V(y)\rangle = w\delta(x-y) \tag{13}$$

で，パラメータが単一で分かり易い。ハミルトニアンを行列と考えると固有値Eの分布は§1の問題に帰着して Replica の方法が使える。ϕ^4 理論における instanton の計算を $n\to 0$ に対して行うと，[12]あるエネルギーE_c（$=0$）が存在して，これより下ではϕは空間の一部に$\xi\sim(E_c-E)^{-\nu}$（$\nu=1/2$）程度のひろがりを持ち，その固有値は

$$N(E)/N_0(-E) = A g^{-(d+1)/2} \exp\left(-\frac{C}{g}\right) \tag{14}$$

の分布を持つことが導かれる。ここに$N_0(-E)$ は$w=0$のときの分布で$g\equiv w\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2}/|E|^{2-d/2}$（不変結合定数）。$A$と$C$は空間次元$d$による数係数で詳細に求められている。[13]同様のことを電気伝導度に対する久保公式について行うと，$E\gtrsim E_c$における伝導の立ち上がりが（$(E-E_c)^{\sigma}$ $\sigma=(d-2)\nu$ と局在長ξの指数νで書ける（スケーリング則）ことが導かれる。

結　び

以上 Replica が〝いかに使われているか〟を中心にふりかえってみたが

(i) 既知の結果は簡明に再現できる。

(ii) 外見上異なる二つの体系の等価性を示せる。（例：高分子）

(iii) 新しい概念をもたらす。（例：スピングラスのオーダパラメータ）

等積極的な面がある一方，理論のあいまいさ($n\to 0$ 解析接続の一意性, $N\to\infty$ と $n\to 0$ の順序の入れかえ，対称性の破れ等々）が残っており数学的基礎づけが待たれる。

参　考　文　献

1) S.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys. **F5** 965 (1975).

2) P. Lloyd, J. Phys. **C2** 1717 (1969).

3) M.L. Mehta, *"Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels"* (London and New York; Academic Press 1967).
S.F. Edwards and R.C. Jones, J. Phys. **A9** 1595 (1976).

4) P.G. de Gennes, Phys. Lett. **38A** 339 (1972).

5) D. Jasnow and M.E. Fisher, Phys. Rev. **B13** 1112 (1976).

6) M.G. Brereton and S. Shah, J. Phys. **A13** 2751 (1980).

7) D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35** 1792 (1975).

8) J.R.L. de Almeida and D.J. Thouless, J. Phys. **A11** 983 (1978).

9) A.J. Bray and M.A. Moore, Phys. Rev. Lett. **41** 1068 (1978).
C. De Dominicis and T. Garel, J. de Physique **40** L575 (1979).
G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **43** 1754 (1979).

10) S.F. Edwards and F. Tanaka, J. Phys. **F10** 2471 (1980).

11) S.F. Edwards, J. Non-Crys. Solid **4** 417 (1970).
D.J. Thouless, J. Phys. **C9** L603 (1976).

12) J.L. Cardy, J. Phys. **C11** L321 (1978).

13) E. Brézin and G. Parisi, J. Phys. **C13** L307 (1980).