(2)はかなり一般的な模型で，種々の現実的な場合を含むと思われるが，本理論では特に(3)式における $\boldsymbol{p}_i$ が弱い摂動として扱える場合について考察する。$\boldsymbol{p}_i$ が微小量であることから理論はいちぢるしく簡単化されるが，それは次の２つの理由にもとづく。

(I) 各振動子の運動はリミットサイクル軌道から大きく外れることはないから，位相のみが重要な状態変数となる。即ち，摂動論的方法によって，(2)式から N 個の位相 ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$ ϕ_N に関して閉じた運動方程式を導くことができる。

(II) $\boldsymbol{p}_i$ の小ささに対応して長い特性時間 ($\gg T$) が現われる。したがって，この時間スケールで現象を眺める限り，一種の断熱近似（むしろこの場合は回転波近似と言った方が良い）を採用することができ，$\{\phi\}$ に対する運動方程式が更に簡単になる。

このような理論にもとづいて，集団的な同期状態と非同期状態の間の相転移現象を議論する。$\boldsymbol{f}_i$ の効果を熱運動に，また振動子を双極子にたとえれば，このような相転移は磁気的あるいは誘電的相転移と類似の現象とも見られる。またこの類推からも $\boldsymbol{p}_i \to 0$ がなお意味のある極限であることがわかる。理論のより詳細は，Y. Kuramoto (Physica A, 1980, in press) 参照。

反応拡散系における回転らせん波

京大・理　　古賀真史・蔵本由紀

§1 初めに

回転らせん波は空間的に二次元的である反応媒質中に生じる非平衡系に特有な現象の一つである。代表的ならせん波は，ある中心から等濃度線と解される腕がらせん的に伸び，そのらせん形が中心の回りに回転するような波である。

らせん波は様々な系で見られる。主な例はBelousov-Zhabotinsky反応のような振動性媒質，又その反応と類似したZ-試薬，心筋膜，slime moldの集合モードの場合のような興奮性媒質である。以上の例は腕が一個のらせん波の場合であるが，腕が二個以上の場合も（波であるかどうかは明らかでないが）ある種の菌類の形態形成の際に見られる。

理論的には若干の簡単な系において，計算機実験や解析的な結果が得られているが，上にあげたほとんどの例に共通な性質があり，それは中心を除く領域でのパターンはアルキメデスらせんであることである。我々はこの事実をふまえて，媒質の詳しい性質によらない一般的なら

せん波の特徴を議論する。

後に示すように，流体力学での Benárd 細胞，Taylor 渦と乱流と同様に，らせん波にも規則構造と不規則構造がある。我々はまず規則的らせん波即ち定常解を考える。

§2 問題の定式化

N成分（$N \geqq 2$）の濃度ベクトルXが従う反応拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}X = F(X) + D\nabla^2 X \tag{1}$$

を考える。ここでDは$N \times N$の定数対角行列，∇^2は二次元ラプラシアンである。方程式(1)は一次元2π-周期平面波解$X^{\infty}(\alpha)$，($\alpha = \omega t - kx$)をもつと仮定する。ωとkは分散関係に従う。上記のアルキメデスらせん波は極座標（r，θ）を使って$X^{\infty}(\omega t + m\theta - kr)$と書ける。ここで$m$（$= \pm 1$，$\pm 2$，…）は巻き数と呼ばれ，その絶対値$|m|$は腕の個数を与える。$\theta$を$2\pi$変化させると濃度空間で$X^{\infty}$は閉じた軌道を$|m|$回なぞる。

$|m|$個の腕をもつ定常らせん波解を$X(r, \alpha)$($\alpha = \omega t + m\theta - S(r)$，$X(r, \alpha + 2\pi) = X(r, \alpha)$)と仮定する。ここで$\alpha$はらせん波の位相，$S$は$r$の未知関数である。境界条件は

$$X(r, \alpha) \to X^{\infty}(\omega t + m\theta - kr),\ (r \to \infty) \tag{2}$$

$$X(r, \alpha) \to a\ (=\text{定数}),\ (r \to 0,\ \alpha\text{固定}) \tag{3}$$

ここで回転の中心でのXの値aは後に決められるべき定数である。

§3 解の対称性

(1)がらせん波解Xをもつとして議論を進める。まず解の対称性を調べる。位相αに関する平均$<\cdot> = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \cdot\, d\alpha$を導入して$X = X_0 + u(r, \alpha)$（$X_0(r) = <X(r, \cdot)>$）と分離すると$X_0$, $<u, u>$, $<u_\alpha, Du_\alpha>$などはrの偶関数（$<u, u>$はベクトルuの内積をとって平均することを意味する），$\sqrt{<u_\alpha, Du_\alpha>}$などは$r$の関数として$m$の偶奇性と一致することがわかる。

§4 中心付近の解のふるまい

境界条件(3)は中心が位相αに関して特異的であることを表わす。Winfreeが述べているように$N=1$の場合あるいは位相波近似では原点で解の不連続性がおこるが拡散の性格上許されない。しかし我々の定式化に従えば解の不連続性はおこらず，実際解の Taylor 展開をすることができる。原点近傍の等濃度線は$m=1$の場合平行直線群，$m=2$の場合鞍点状構造となる。$m=2$

の場合 $X=a$ の等濃度線は原点で交差するが，化学反応系ではこのことは不可能のように思われる。簡単な系の simulation で $|m|=2$ のらせん波は実現できる。

§5 Schrödinger 方程式による定式化

次に別の角度かららせん波の性質を考える。$Q\equiv\sqrt{<u_\alpha, Du_\alpha>}\exp[-\beta(S_r-<u_\alpha, Du_r>/<u_\alpha, Du_\alpha>)]$ なる量を導入する。ここで β は定数。Q は self-consistent なポテンシャル U をもつ Schrödinger 方程式の定常解であることがわかる。U は原点で発散し，$r=\infty$ で 0 になる。エネルギー固有値は $-\beta^2k^2$ で常に負である。我々の問題は本来固有値 ω（あるいは k）の非線形固有値問題であり，とりうる ω の値は無数あると予測されるが，物理的に実現可能な解のとりうる k の値はただ一つであるということを示せる。即ち Q は基底状態に対応する。

§6 簡単な系への応用

Kopell-Howard らによって $\lambda-\omega$ 系と呼ばれる

$$\frac{\partial}{\partial t}W=(A(R)+iB(R)W+\nabla^2W$$
$$W=X+iY,\quad R=\sqrt{X^2+Y^2} \tag{4}$$

という系を考える。拡散がないとき(4)は安定リミットサイクル $W=R_0e^{iB(R_0)t}$ をもつと仮定する。$\frac{d}{dR}B/\frac{dA}{dR}$ が R によらない定数の場合を考え，これを β とおくと β は振動子の振動数のオーダーを与える。WKB 近似を使うと非常に小さい β に対して波数 k の漸近表示

$$k=\exp[-c/(|m|\beta)],\quad c\ 定数 \tag{5}$$

が得られる。即ち k は $|m|$ に対しても β に対しても増加関数である。(5)の結果は実はらせん波の不安定化に基づく乱流の出現と関連があるので，まず乱流の話を先にする。

§7 らせん波乱流

化学乱流（反応拡散系に生じる乱流）については，箱モデルは別として，振幅性乱流と位相性乱流が知られている。そのどちらも拡散係数の違いが主な特徴であるが，らせん波乱流ではその必要がない。

らせん波乱流の出現の機構をみるために定常らせん波の構造を考える。らせん波解は $W=R(r)\exp[i(\omega t+\theta-S(r))]$ と書かれる。すると区間 $(0,\infty)$ で有効振動数 $\omega_{\rm eff}\equiv B(R)$ を定義できる。R は 0 から R_k $(k^2=A(R_k))$ まで変化する関数であるから $\omega_{\rm eff}$ は場所ごとに異なる

関数である。一方定常解は全体が同一振動数ωで回転する状態であることから，結局定常解は局所的に異なる振動数をもつ振動子が結合した系が互いに引きこまれている状態とみなすことができる。

その引きこみの可能性を考える。もしβ（$=O(B(R))$）が小さいと場所ごとのω_{eff}の変化は小さく相互引きこみがおこる。もしβが大きくなると，引きこみの破れ，即ちらせん波は不安定化するであろう。

(5)式に従がえば，βが大きいときにkが大きいことは，ω_{eff}の空間変化を小さくすることになっている。ところがアルキメデスらせん波の平面波としての性質から，kが大きい波は平面波として不安定である。このことはらせん波としても不安定であることを示す。

二次元正方形媒質の計算機実験によれば実際らせん波は不安定化し，一旦中心ができるとその周囲に数個新たに中心ができ，これがカスケード的に広がる現象がみられた。また中心は対になって発生消滅する。

なお，この乱流状態は心筋拍動の病的現象の一つである細動と類似しているように思われる。

またここで述べたらせん波乱流とは異なる不規則状態がある。これは core meandering 現象と呼ばれ，らせん形を保ちながら回転するが，中心の位置のみが不規則に動く現象である。

§8　終りに

一般に$|m|$個の腕をもつ定常らせん波解の中心付近のふるまい，全体としての数学的性質およびらせん波乱流について述べた。もっと詳しいらせん波乱流の解析，および core meandering の解析は今後に残された課題である。

解糖反応系に対する周期外力の効果

京大・理　　富田和久・大同寛明

細胞内の代謝系にみられる解糖反応系に，解糖基質を一定の割合で注入してやると，自励振動の出現する事が知られており，いわゆる化学振動子 (chemical oscillator) の重要な例となっている。このような系が周期外力に対してどのような応答を示すかを調べる事は，地上の殆んどの生物が，少くとも，day–night cycleという周期外力下にある事を考えると，重要かつ興味の