

## 揺動力のある系の相互引き込み

東大・薬 山口 陽子

時間的秩序形成は、物理系、生物系を問わず処々に見られ、非平衡系を特徴づける一つの重要な性質となっている。自励振動の出現はその1例であるが、多数の要素的振動体がある系では、各々が相互に同期しあった時のみ、系全体のマクロな振動が観測可能となる。こうした相互引き込みについては、既にいくつかの研究があるが、各要素的振動子に外からのランダムな揺動力の作用があるときに、系の時間的秩序形成の振舞にどのように影響するかという問題は後に残されてきた。

ここでは、次のような外的揺動力を受ける同等な Van der Pol 振動子の集団をモデル系として設定して、系の挙動を解析的に調べた。

$$\ddot{x}_i + \omega_0^2 x_i - \varepsilon \omega_0 \kappa (1 - \beta x_i^2) \dot{x}_i - \frac{\varepsilon \omega_0 R}{N} \sum_{j=1}^N (\dot{x}_j - \dot{x}_i) = f_i(t) \quad (1)$$

$$\langle f_i(t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2 \varepsilon \omega_0^4 D \delta_{ij} \delta(t-t')$$

(1)式で  $x_i$  は  $i$  番目の振動子を記述する。 $\omega_0$  は調和振動成分の角振動数である。第3項以下は  $\varepsilon$  という小さなパラメーターを因子にもつ。 $\kappa$  は非線形性の大きさを現し、 $\beta$  は基本振幅を  $a_0$  として、 $\beta = 4/a_0^2$  を与える。左辺第4項は速度の差による、つまり散逸的な相互作用を示し、 $N$  個の振動子間で同等に作用するとしているので、 $R$  の大きさでの分子場的相互作用と等価である。 $\omega_0, \varepsilon, \kappa, \beta, R$  は正(又は0)のパラメーターである。(1)式で右辺を0と置いた系では、 $N$  個全ての振動子の位相が一致した状態が安定であることは容易に示せる。右辺の  $f_i(t)$  は Gaussian white noise として導入する。拡散定数の大きさは  $D$  で表わす。 $f_i(t)$  の項が加わったことによって、秩序の高い引き込み状態の実現を妨げようとする作用が期待される。

小さなパラメーター  $\varepsilon$  に着目して Multi-Time-Scale 法を用い、 $\omega_0$  の回転座標上の運動に変換して、 $X \equiv \sum x_i / N$  とおくと、 $\{x_i\}$  の対称分布の仮定の下で、 $X$  は秩序変数となり、系の巨視的振動の振幅に相当する量を表す。さらに、 $\kappa$  が1に比べて十分小さいという仮定を置くと、秩序変数の発展方程式は

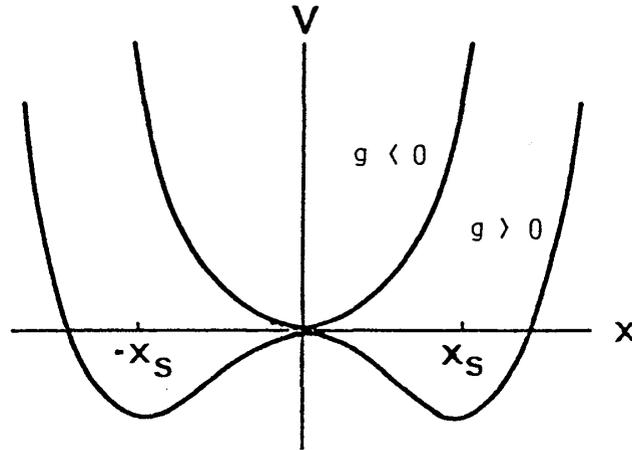
$$\dot{X} = gX - hX^3 + G(t) \quad (2)$$

と与えられる。ここで

$$g = \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{\beta D}{R}\right), \quad h = \frac{\beta \kappa}{8}$$

$$\langle G(t) \rangle = 0, \quad \langle G(t) G(t') \rangle = \frac{D}{N} \delta(t - t')$$

である。



Effective Potential for X

図1

秩序変数の振舞は図1に示すような2次と4次のポテンシャル上の粒子の運動に還元される。引き込みが起きて、巨視的な振動が現れる条件は(2)式が定常解  $X_s \neq 0$  を持つことである。すなわち、 $g > 0$  より

$$R > \beta D \tag{3}$$

の時、引き込み状態が安定化する。(3)式は相互作用の大きさと、揺動力との競い合いで前者が勝った時に引き込み状態が出現することを意味し、因子  $\beta$  は揺動力の効果が基本振幅  $a_0$  の2乗でスケールされて現れることを示している。 $\langle X^2 \rangle$  の定常値  $\langle X^2 \rangle_s$ 、及び初期状態として無秩序状態を仮定したときの秩序の発現に要する時間  $t_0$  は、Dynamical Scaling Theoryを用いて、各々、次式で与えられる。

$$\langle X^2 \rangle_s = \frac{4}{\beta} \left(1 - \frac{\beta D}{R}\right) + O(1/N) \tag{4}$$

$$t_0 = \frac{-1}{\kappa(1 - \beta D/R)} \ln \left\{ \frac{\beta}{4(1 - \beta D/R)} \left( \frac{D}{N\kappa(1 - \beta D/R)} + \langle X^2(0) \rangle \right) \right\} \tag{5}$$

(2)式中、 $g = \kappa/2$ 、つまり揺動力に比べて相互作用が十分大きい時、引き込み過程は、1体の振動子の自己励起に一致する。 $\beta D/R$  が1に比べて無視できない程度に大きくなると(2)式の  $g$

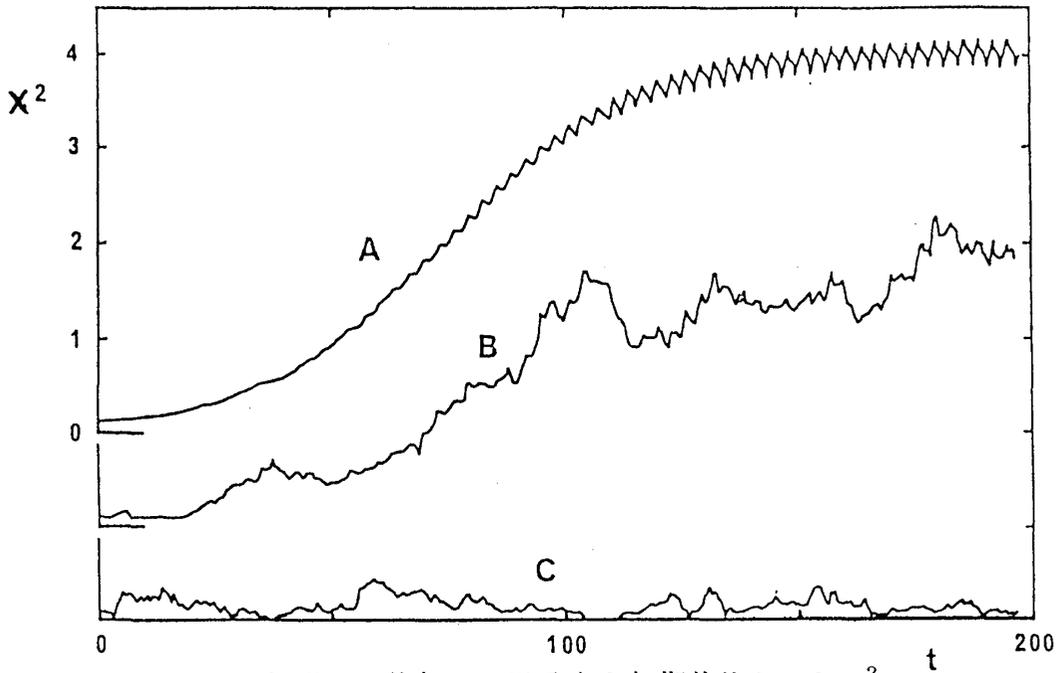


図2 各振動子の位相の一様分布を初期状態とした  $X^2$  の時間発展。A:  $D=0$ , B:  $D=1$ , C:  $D=3$ 。  
他に  $R=2$ , [ $N=50$ ,  $\omega_0=1$ ,  $\varepsilon=0.1$ ,  $\beta=1$ ,  $\kappa=0.5$ ] で  $D_c=2$ 。

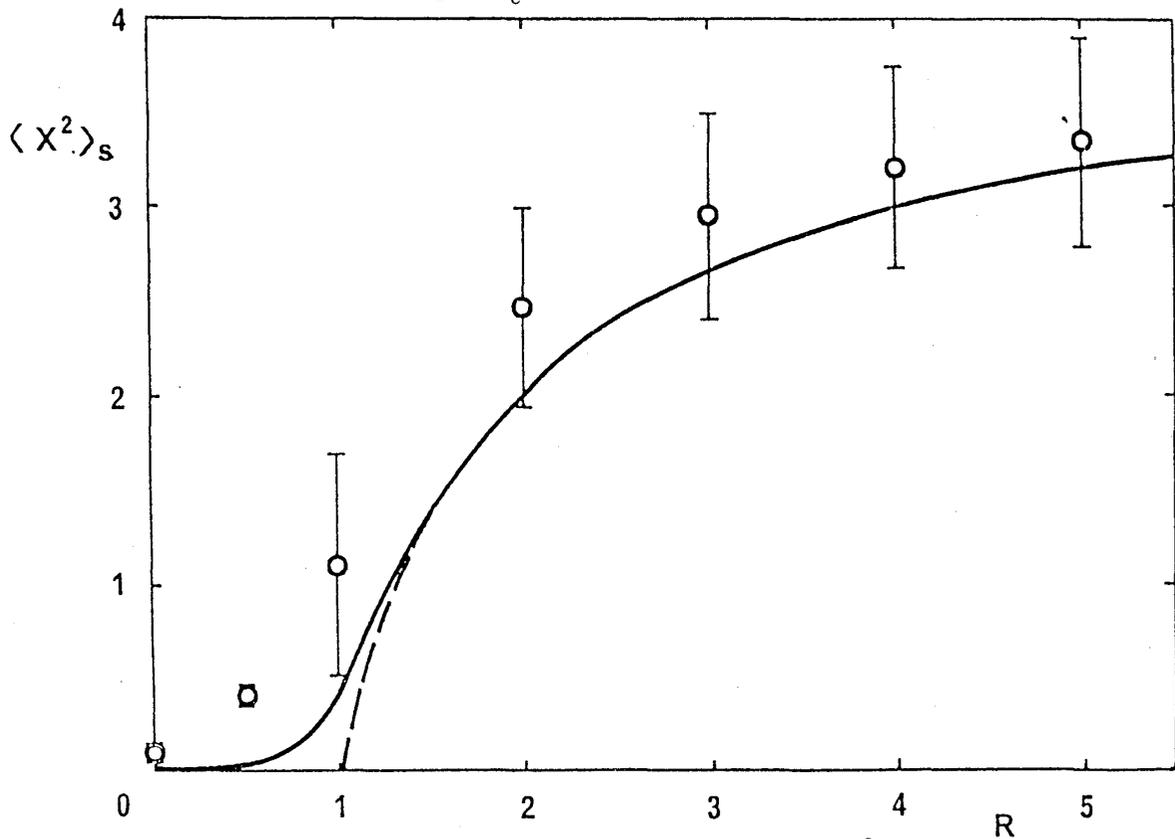


図3 相互作用の大きさ  $R$  に対する定常値  $\langle X^2 \rangle_s$ 。  
破線は  $N=\infty$ , 実線は  $N=50$  に対する理論値を,  
白丸は計算機実験より求めた  $\langle X^2 \rangle_s$ , 縦の実線  
はその標準偏差を各々表す。  $D=1$ , 他は[...]  
に同じで  $R_c=1$ 。

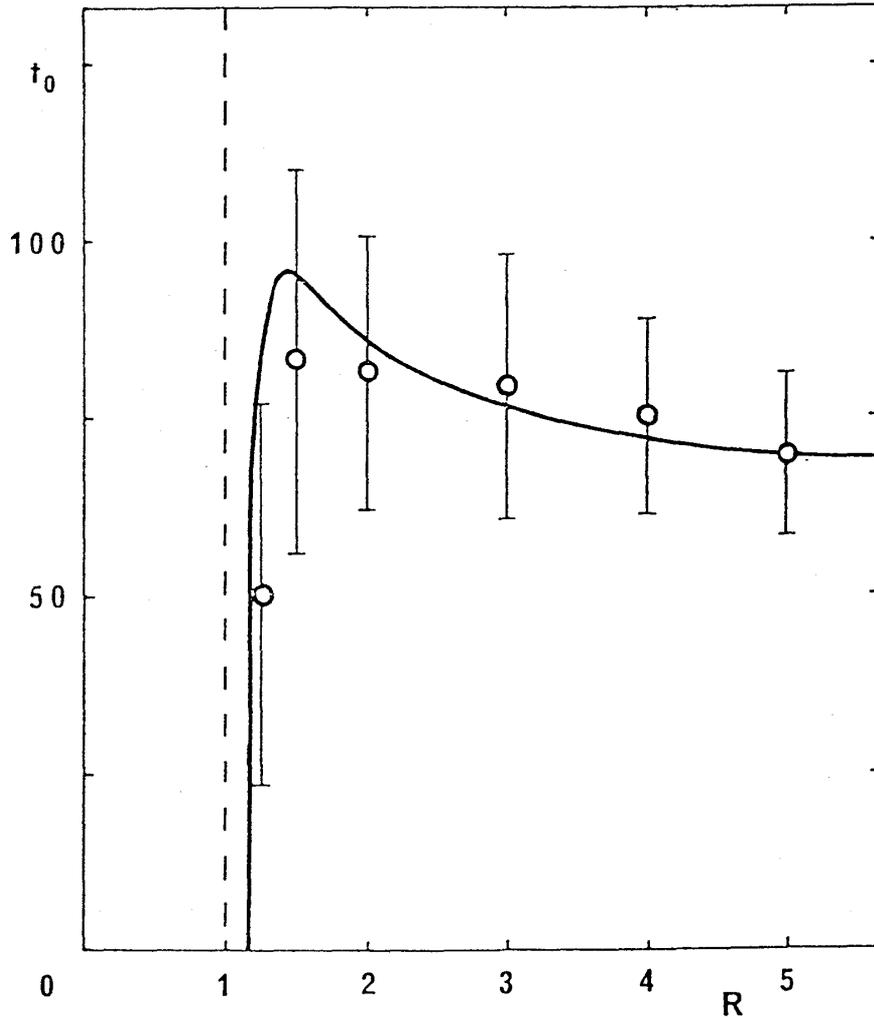


図4 秩序発現時間  $t_0$  の  $R$  依存性, 実線が理論値。白丸が計算機実験値, 縦の実線がその標準偏差を表す。パラメータの値は図3に同じで,  $R_c$  を破線で示した。

が小さくなるので,  $\langle X^2 \rangle$  の立上りは遅くなるが, (4)式にあるように  $\langle X^2 \rangle_s$  が  $g$  の減少と共に小さくなるので, (5)式の  $t_0$  は  $R$  又は  $D$  の変化に対してある点で最大値をとる関数になっている。

図2は(1)式による計算機実験から求めた  $X^2$  の時間発展を3種の  $D$  についてプロットしている。 $D$  の臨界値  $D_c$  の前後で著しい変化が認められる。図3は(4)式の  $\langle X^2 \rangle_s$  を, 図4は(5)式の  $t_0$  を各々  $R$  に対してプロットし, 計算機実験値と比較している。いずれもよい一致を得ている。

以上の結果より, (1)式の系は, 1図のような簡単なポテンシャルで議論できる相転移を起こすことが示された。

最後に本研究で多大な御協力を戴いた大分医科大学, 米谷快男児先生と東大薬学部, 清水博教授に感謝致します。