Title	固有関数展開による断熱消去法(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)
Author(s)	金子, 邦彦
Citation	物性研究 (1981), 35(6): F21-F24
Issue Date	1981-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90205
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

(i) f_Bの相関L_Bがプレート上の位置に依存していれば，転移の smoothing が起こる。

(ii) L_Bが一定ならば，転移はsharpであり，転移点近傍の振舞について

(ii−1) 揺ぎf_{th}, f_Bによって転移点がシフトする。また磁場がかかっておれば，f_Hは相乗的に働く雑音となり，転移点をシフトさせる。

(ii−2) 揺動については，f_{th}, f_B, f_Hの強さの大小に依存して様相を変え，平衡系の臨界現象と異なった振舞を示すことが可能となる。例えば，$H = 315$ ersted ($d_0 = 1$ cm) の時，f_{th}が支配的ならば転移点近傍で揺動力R^{tot}のうち，Rによるスペクトル密度は，全体の少なくとも約$\frac{1}{4}$をしめ，二次相転移的な臨界揺動とのズレを与える。また相乗的雑音となるf_Hが支配的ならば，それによる分散は決して発散しない。

このように，非平衡相転移の特徴的な性質を研究するためには，オーダーパラメーターに対して外から直接働く雑音だけでなく，モード結合を通じて生ずる揺ぎを考慮することが重要である。

参考文献

1) H. Mori, T. Morita and K. T. Mashiyama, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1865.

2) T. Morita, H. Mori and K. T. Mashiyama, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 500.

3) A. M. Pedersen and T. Riste, Z. Physik **B37** (1980), 171.

4) I. W. Smith, Y. Galerne, S. T. Lagerwall, E. Dubois-Violette and G. Durand, J. de Physique (Paris) Colloque **36 C1** (1975), 237.

5) S. Kai, T. Kai, M. Takata and H. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1979), 1379.

固有関数展開による断熱消去法

東大・理　　金　子　邦　彦

§1　序

最近，確率過程での速い変数の断熱消去法[1)〜4)]やそれに伴う乗法的確率過程[6)〜10)]が興味を集めている。ここでは固有関数展開の方法を用いて，系統的な変数消去法を述べる。形式論を主に述べ，具体的問題は光学系への応用の一例を挙げるにとどめる。

§2　一般論

次のLangevin方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,\ y)+\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_x(t) \\ \dot{y}=-\gamma a(x,\ y)+\sqrt{\gamma}\,\xi_y(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，ξ_x，ξ_y はGauss白色雑音とし，その強さは$<\xi_x(t)\xi_x(t')>=Q_x\delta(t-t')$，$<\xi_x(t)\xi_y(t')>=Q_{xy}\delta(t-t')$．$<\xi_y(t)\xi_y(t')>=Q_y\delta(t-t')$で与えられるとする。今，$\gamma$が大きいとして，$x$に比べ速く動く変数$y$を$1/\gamma$展開の形で消去していく。そのために(2.1)と等価なFokker-Planck 方程式を考え確率分布$P(x,\ y,\ t)$をyについて積分して，射影を行なう。まずxをパラメタとした変数yでの固有関数系$\{\varphi_n(y;x)\}$（φ_nは

$$\frac{Q_y}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi_n(y;x)\varphi_0(y;x))+\frac{\partial}{\partial y}a(x;y)(\varphi_n(y;x)\varphi_0(y;x)) = -\lambda^n(x)(\varphi^n\varphi^0) \tag{2.2}$$

をみたす）によって$P(x,\ y,\ t)$を$\sum_n P_n(x,\ t)\varphi_n(y;x)\varphi_0(y;x)$の形で展開する。$x$への射影は$\{\varphi_n\}$の直交性から$P_0(x,\ t)$を求めることにより実行される。$P_0(x,\ t)$の式にあらわれる$P_k(x,\ t)(k\neq 0)$の影響を順次とり入れることにより，$1/\gamma$の展開をおこなうことが出来，$O(1/\gamma)$までで

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial x}<f\varphi_0^2>P(x,\ t)+\frac{Q_x}{2\gamma}\ \frac{\partial^2}{2x^2}P(x,\ t)+\sum_{k\neq 0}\frac{\partial}{\partial x}<\varphi_k f\varphi_0> \\ &\times\ \frac{1}{\lambda_k(x)}\{\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}<\varphi_k f\varphi_0>+<f\varphi_0^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\varphi_k}{\varphi_0})> \\ &+\frac{2}{\gamma}Q_{xy}(\frac{\partial}{\partial x}<\varphi_k\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}>-<\varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\varphi_k}{\varphi_0})>)\}P(x,\ t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

の形の$P(x,\ t)$に対するFokker-Planck 方程式がえられる。（ここで$<\cdots>$はyでの積分をあらわす。）

§3　応　　用

一般式(2.3)において，$a(x,\ y)$がyについて線型の場合は固有関数はHermite関数になり，容易に計算できる。たとえば，$a(x,\ y)=\gamma c(x)(y-\alpha(x))$，$f(x,\ y)=f(x)+g(x)y+h(x)y^2$の場合，ドリフト項，拡散項は最低次でそれぞれ

$$-\frac{\partial}{\partial x}(f(x)+\alpha(x)g(x)+(\alpha(x)^2+\frac{Q_y}{2c(x)})h(x))P(x,\ t), \tag{3.1}$$

$$-\frac{1}{\gamma}\Big(\frac{Q_x}{2}+(g+2\alpha h)^2\frac{Q_y^2}{2c^2}+\frac{Q_y^2}{4c^2}h^2+\frac{Q_{xy}}{c}(g+2\alpha h)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) \qquad (3.2)$$

で与えられる。$O(1/\gamma)$ ではドリフト項に更に $O(1/\gamma)$ の補正が加わる。$h=0$ の場合，この結果は森田・森・増山の結果[3]を再現する。また $g=0$ の場合，y をレーザー光のモード，x をStokes-shiftを受けた光のモードと考え，α, c, h を適当にとると上はラマン散乱の簡単なモデル[6]になっている。但し，レーザー光の減衰 γ がモード x の減衰に比べ，大きいと考えた。特に閾値近傍では x が小さいとして，定常分布 $P_{\mathrm{st}}(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{st}}(x)\sim\exp\Big\{&\frac{2}{Q_x}\Big(P^2\kappa+\frac{Q_y}{2}-\gamma_x\Big)\Big(\frac{x^2}{2}-\frac{4Q_{xy}}{Q_x}P\kappa\frac{x^3}{3}\Big)\\&-\Big(2P^2\kappa^2+\frac{Q_y}{2}\kappa\Big)\frac{x^4}{4}\Big\}\end{aligned} \qquad (3.3)$$

となる。ここで P はポンピングの強さ，κ は x と y のカップリングの強さをあらわす。Q_y による閾値のシフトがみられる。

この他，化学反応系のモデルへの応用なども可能である。また，Stratonovichの本[2]にあるように，Ornstein-Uhlenbeck過程からの運動量の消去はこのやり方の最も簡単な例を与えている。

§4　非白色雑音の問題

最近，白色雑音でない有限の記憶をもった雑音を受けている確率過程が多く調べられている。[5),7)~10)] Gauss 雑音の場合には，この問題は

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+g(x)\eta(t)\\ \dot{\eta}=-\gamma\eta+\gamma\xi(t)\,; \qquad \langle\xi(t)\xi(t')\rangle=Q\delta(t-t'),\ \text{Gaussian}\end{cases} \qquad (4.1)$$

の確率過程から $\eta(t)$ を消去することに帰着するので，今までの方法が使える。結果は連分数展開の形でまとめることが出来る。特に，$1/\gamma$ の1次まででで切断し，白色雑音からの最低次の補正を求めると，J. M. Sancho, M. San Miguelの結果[7]のより簡単な導出を与えている。

§5　ま と め

色々と調べられている変数消去法の統一的な取扱いの一つについて述べた。この方法では，原理的には $1/\gamma$ の高次まで求めていくことが可能であるが，多くの場合，$1/\gamma^2$, $1/\gamma^3$ の次数まで調べると $\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}$ などを含む Fokker-Planck 型でない項があらわれてくる。この報告で述べた計算や結果の詳細，他の応用などについては論文11)を参照して戴きたい。

謝辞　研究を進める上での鈴木先生からの有益な助言や激励，また研究会期間中の久保先生，森先生，長谷川先生からの貴重なコメントに心から感謝致します。

References

1) H. Haken, *Synergetics* (Springer-Verlag, 1977).
2) R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach, New York, 1963) Vol. 1.
3) T. Morita, H. Mori, and K. T. Mashiyama, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 500.
4) H. Hasegawa, M. Mabuchi, and T. Baba, Phys. Lett. **79A** (1980) 273.
5) R. Kubo, in *Fluctuations, Relaxations, and Resonance in Magnetic Systems,* ed. D. ter Haar (Oliver & Boyd, Edinburgh, 1962).
6) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev. **20A** (1979) 1628.
7) J. M. Sancho and M. SanMiguel, Z. Phys. **B36** (1980) 357.
8) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. Supplement (1981).
9) K. Kitahara, W. Horsthemke, and R. Lefever, Phys. Lett. **70A** (1979) 337.
10) M. Suzuki, K. Kaneko, and F. Sasagawa, Submitted to Prog. Theor. Phys.
11) K. Kaneko, Submitted to Prog. Theor. Phys.

Dynamics of the "Noise-Induced Phase Transition"

東京工大・理　　濱　田　義　保

いわゆる，非平衡開放系が注目され始めてから久しい。その中でも，最近特に，多くの研究者の注目を集めているのが雑音によって誘起される相転移現象である[1]。この現象は，雑音の大きさがある閾値をこえた時，系の状態を記述する変数に対する定常確率密度関数の形が，ドラスティックに変ることから，この名がつけられている。平衡状態における２次相転移では，転移点において臨界緩和がおこり，動的にも，緩和時間が発散するという異常がおこることは，よく知られていることである。ここでは，雑音によって誘起される相転移でも同様なことが見られるか否かについて考えている。平均値の時間変化を考える限り，転移点において，臨界緩