自然現象をFokker-Planck方程式で表わし得る為の条件

九大・理　　飯塚　勝・松田博嗣

自然現象の確率論的記述は，確率微分方程式（以下SDE)，即ち，拡散過程として理想化して表現される事が多い。その仮定の下では，stochastic calculusが行なえるし，Dynkin, Kac等の公式があり，更には，Kolmogorovの前向き，後向き方程式（拡散方程式）により，分布関数や諸平均量を求める事ができる。しかし，現実の現象において確率的要因はwhite noiseではなく，相関を持ったものであると考えられる。従って，SDEによる記述は，自然現象の近似過程ないし極限過程であり，いかなる過程が，どの様な極限操作の下で拡散過程に収束するかを明らかにする事は基本的な問題である。更には，収束が証明されていない場合に，収束を仮定したとき，拡散方程式の拡散係数とドリフト係数がどう与えられるかという問題も，分布関数や諸平均量を求める事と結びついて重要である。これに関連して，いわゆる“modelling”の問題があり，rapidly fluctuating systemがIto型，Stratonovich型いずれのSDEで近似されるかが議論されている。しかし，極限として拡散過程で記述される現象はrapidly fluctuating casesに限られるのではなく，揺ぎの自己相関が本質的な場合においても，適切なscaling limitにおいて拡散過程として記述される場合がある。ここでは，揺ぎの自己相関が本質的な場合に，確率差分方程式で表現される確率過程の拡散過程への収束の問題を，集団遺伝学における“拡散近似”に即しながら考察する。

集団遺伝学 (population genetics)は，個体の集まりである生物集団を対象として，遺伝的組成（遺伝子の相対頻度）がどの様な法則の下に変化していくかを研究する。通常，遺伝子頻度の変化は，世代という概念と対応して，離散時間の確率過程として記述される。

いま，２つのタイプA_1，A_2からなる遺伝子の集団を考え，時刻k（第k世代）におけるA_1遺伝子の相対頻度をX_k（$0 \leqq X_k \leqq 1$）とすると，単位時間当りのX_kの変化は典型的な場合，

$$\varDelta X_k \equiv X_{k+1} - X_k = \frac{S_k(\omega) X_k (1-X_k)}{1-S_k(\omega)F(X_k)} + \mu(1-2X_k) + \zeta_k(\omega) \tag{1}$$

で与えられる。右辺第一項は自然淘汰 (selection) による変化を表わす。$S_k(\omega)$はA_1のA_2に対する有利度であり，その絶対値は小さい事が知られている。$\{S_k\}$は一般に autocorrelationをもつ random sequence である。第二項は突然変異による変化の項で，μは１つのタイプから他のタイプへの世代当りの変化率である。更に，$\zeta_k(\omega)$は個体数が有限であるために生じる確率的効果size effect (random sampling)である。従って，頻度の確率的変化の要因としては，stochastic selection と random sampling があるが，前者は更に independent selection（$\{S_k\}$ が autocorrelation をもたない場合）と autocorrelated selection に分ける事ができる。

一般に，(1)に基づいて，実験的に観測可能な量である遺伝子頻度の分布やモーメントを求める事は難しい。そこで，この離散時間確率過程を拡散過程で近似して，これらの諸量を求める事が heuristic に行なわれてきた（拡散近似）。autocorrelated selection 以外の場合には，離散時間過程から対応する拡散過程への収束について多くの研究がある（Markov chain から拡散過程への収束となる事が多い）。ここでは，autocorrelated selection（特別な場合として，independent selection も含む）を確率的要因とする離散時間過程の拡散過程への収束について，我々が得た結果を紹介する。但し，random sampling の効果はない場合を考える（ie. $\zeta_k(\omega)\equiv 0$）。

(1)をもう少し一般化して

$$\varDelta X_k = \varepsilon\sigma_k f(X_k) + (\varepsilon\sigma_k)^2 g(X_k) + \varepsilon^2 h(X_k) + \varepsilon^3 r(\sigma_k, X_k, \varepsilon) \tag{2}$$

で与えられる離散時間過程 $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ を考える。ここで，環境パラメータ $\{\sigma_k\}$ は次の混合性をもつ平均0の定常過程とする（ϕ-mixing process）。

$$|E\{\sigma_0\sigma_k\}| \leq \phi(k)E\{\sigma_0^2\},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\phi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty} k\,\phi(k) < \infty$$

ϕ-mixing の厳密な定義については，たとえば，Billingsley, P. (1968) Convergence of Probability Measures, Wiley, New York を参照の事。連続時間 t と離散時間 k とを $k=[t/\varepsilon^2]$（[　] はガウス記号）で対応させ，$x^{(\varepsilon)}(t)=X_{[t/\varepsilon^2]}$ とおく。このとき，次の２つの命題が成立つ。

［命題１］

$f,\ g,\ h,\ r$ は有界とする。

$x^{(\varepsilon)}(0)=\xi$ を初期値とする $x^{(\varepsilon)}(t)$ を $x^{(\varepsilon)}(\xi, t)$

$x(0)=\xi$ を初期値とする拡散過程 $x(t)$ を $x(\xi, t)$ とする。

任意に固定した ξ，t に対して，$\varepsilon\to 0$ のとき $x^{(\varepsilon)}(\xi, t)$ が $x(\xi, t)$ に分布収束するならば，$x(t)$ のみたす拡散方程式の拡散係数は $V^2 f(x)$，ドリフト係数は $\frac{1}{2}(V-v)f(x)f'(x)+vg(x)+h(x)$ である。但し，$V\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}E\{\sigma_0\sigma_k\}$，$v\equiv E\{\sigma_0^2\}$。

［命題２］

$f,\ g,\ h,\ r$ は次の条件をみたすとする。

ある開区間 $L=(x_-, x_+)$，$(|x_\pm|<+\infty)$ が存在して

$f(x)>0$ on L　，　$f(x_\pm)=0$

$x_\pm$ のある近傍の $x\in L$ に対して

$f(x)\leqq O(|x-x_\pm|^{\alpha_\pm})$，${}^{\exists}\alpha_\pm\geqq 1$

f, g, h, r はL上，有界かつなめらか

g/f, h/f, r/f がLにて有界（突然変異の効果を含まない事に対応）

$\varepsilon \to 0$ のとき，$x^{(\varepsilon)}(t)$ は［命題 1］の拡散係数とドリフト係数をもつ拡散過程 $x(t)$ に関数空間D［0, 1］で弱収束する。

但し，D［0, 1］は［0, 1］上の右連続，左極限の存在する関数全体にSkorohod topologyを入れた距離空間であり，詳しくは前掲，Billingsleyを参照の事。また［命題2］により，任意の有限次元分布の弱収束が分る。なお，［命題2］の証明にはGikhman, I. I.: Convergence to Markov Processes, Ukrainian Math. Jour. **21** (1969) p. 263 の定理を用いた。

2種類のランダムネスを持つランダムウォークの理論

東北大・工　原　啓明

濃厚高分子溶液[1)-2)]，原子炉雑音[3)]等では，考える系にいくつかの異なるランダムネスを与える“雑音源”が含まれている。

前回の研究会[4)]につづいて，ここでは区別出来る2種類のランダムネスを持つ系を，

（Ⅰ）２つの内部ランダムネスを含む（例，濃厚高分子溶液）

（Ⅱ）１つの内部ランダムネスと外部からのランダムネスを含む

場合に分け，これ等の系のランダムウォーク (RW) の漸化式に対して，“粗視化”を行い，一方のランダムネスを消去して得られるRWの漸化式について論ずる。

RWの漸化式は

$$W(m, N) = \sum_{\alpha=\pm,0} P_{N-1}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot 1)W(m-\alpha\cdot 1,\ N-1) \tag{1}$$

$$\sum_{\alpha} P_{N-1}^{\alpha}(m+\alpha\cdot 1|m) = 1$$

である[4)]。$W(m, N)$ はウォーカーがN回のステップ後，場所mに到達する確率，又 $P_{N-1}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot 1)$ は $m-\alpha\cdot 1$ からmにとび移る確率を表わす。更に，詳細な記述では，P_N^{α} 自身もWと複雑に関係し，[5)] (1)は

$$W(m, N) = \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=-L}^{L} P_{N-k}^{\alpha}(m|m-\alpha\cdot l\,;W)\,W(m-\alpha\cdot l,\ N-k) \tag{2}$$