数理的にみた「形」についての諸問題

統計数理研究所　　樋　口　伊佐夫

1. はじめに

“「形」の物理学”は私にとって非常に魅力のある課題で，研究集会に参加させていただくにあたり，統計数理の面からは，この共通課題に対して，どのようなことが問題で，どのような寄与ができそうかを私なりに考えてみようと思った。しかしこれまでに考えをまとめることが出来なかったので，気になったいくつかのことを述べ，それにつけ加えて，私自身が以前に手がけたことの中から，（適切な例とはいい難いが）この課題に関連のありそうなものを被露したい。題名の“諸問題”というのは，多くの問題を綜合的系統的に叙述するという意味でなく，脈絡のないもろもろのことと解していただきたい。

1. 「形」について

まず最初に“「形」の物理学”の「形」は英語でどう言えばよいのか気になる。 おそらくshape だろうと思うが，form かも知れない。或いは figure だと主張する人があるかも知れない。学問の領域に対する呼称は，その領域の発展に応じて変ってしまうことが多いから，命名自体はさして深刻な問題とは思えないが，「形」という言葉の意味内容は甚だ深長である。ドイツ語では Form, Gestalt, Figur のほかに Umriß も形の意味でつかわれるようである。ドイツ語の Umriß は何となく見取図のようなものを連想させるので，われわれの「形」には適当しないと思うが逆に Form はギリシヤ哲学の εῖδοs，μωρφή のことを言う哲学用語であるので，ヨーロッパの知識人にとっては，単なる「形」以上に深い連想があるそうである。[1] 日本語の「かたち」は哲学や思想の歴史的な重みを感じない代りに，この類語の「かた」「すがた」と共に，一種の美学的な意味合いを感じる日本人が多いのでなかろうか。「かたち」に通じる漢字となると，形，容，相，貌，象，像，型，等日本語やヨーロッパ言語に比べて多い。これは漢民族が「かたち」の中味を熱心に伝えよう，説得しようとしたあらわれではないだろうか。文学的ないい方を許していただくならば「形」はまさに各民族の文化の中にいろいろの「形」をとって存在しているといえよう。「形」は人間の原初的知的活動としての抽象の産物である。（抽象は具象の反義語として「形」の抽き去られたものを意味するようであるが，よく考えると，まず始めに「形」を抽き出さねば具象がない）。

2. “「形」の数学”と“「形」の物理学”

「形」の数学というものは聞いたことがない。それは殆んどすべての数学が形の科学であるからだろう。数学の中のアラビア的性格（あいまいな感覚的なことばで申訳ないが，算術および実用的諸計算法が代表している性格）を別にすると，数学は常に形の追求をしているように見える。二次形式とか微分形式とかのような form となづけられている特定の対象だけでなく，一般に表現様式のことを形といっても不自然でない場合が多い。ところが shape という名によって定義された数学的対象はあまり見かけない。これは“以下の性質をみたすものを形(shape)とする”というような内包的定義をすることがむつかしいためか，その必要が感じられなかったためか，その両方であるか，或いはそのどちらでもなく単に偶然的成りゆきかも知れない。数学的概念の命名にあたって，対応する普通の概念を抽象しているかどうか，あまり考慮しないこともあるようだし，たとえば英語の field とか lattice のように同じ数学の中での別の分野ででてくる全く別の概念とぶっつかるという配慮さえないので，数学用語から背景を考察しても意味のないこともある。

それはとも角，このような状況で“「形」の数学”というと，その「形」は何をさすのか数学を少しでもかじった人は戸惑ってしまうだろう。しかし“「形」の物理学”における「形」の意味は，議論しなくても暗黙のうちに多くの人に共通に理解されているのではなかろうか。つまり物体や物象の素朴な意味での空間的な形である。素朴なという意味は視覚に直接結びついていて，通常三次元ユークリッド空間に描像できることである。勿論人によって多少の相違はあろう。たとえば四次元ミンコフスキー空間の幾何学的対象の形を含める人があるかも知れない。しかしいくら量子力学に関係があるとはいってもヒルベルト空間における多様体の形も含まれると思う人はまずいないだろう。

アリストテレスの εῖδος，μωρφή の和訳「形相」の「相」の方は物性論の大方が相(phase)の研究に精進しているので，これを「形」に含める人は少いだろう。

3. 外形と内形，一般の形

前述のように物理学における（狭義の）形は素人にも明瞭にとらえられるように思う。ただ花模様のような空間的パターンも「形」の物理学の形に入るのかどうかわからなかったが，物理の方々の感覚としては入れるのが当然のようであるので安心した。このようなものは“内形”と呼ぶにふさわしい。inner form というのは哲学用語として構造をあらわすそうであるが，内部の幾何学的構造を狭義の内形と考えると，このようなものが「形」の物理学の対象となるのはきわめて自然である。空洞の内側の形などを内形と呼ぶことがあるかも知れないが，ここで

言う意味ではそれは外形の一部である。

内形，外形を問わず形には境界と連結という概念が重要であるが，境界（点，線，面）が「形」そのものであるかというと，そうではなく，もち論，合同変換，相似変換で移れるものは同じ形であるから，そうした群による類概念であることは言うまでもない。客観的な一般論としての形はここまでであろうが，普通「形」と言うとさらに何らかの特徴をもつものとして，余分の期待が持たれる。それは，形の特徴による分類を期待することであり，分類基準の導入や選択には主観的にならざるを得ない面がある。たとえば，物体の形はその表面をあらわす三次元空間の閉曲面 $f(x, y, z)=0$ によってあらわしつくされているから f が得られれば万事解決というのは味気ないし，誤りであろう。形はその先の問題で，f の性質や特徴に属することである。まだ形としての特徴は f の解析的性質の特徴とは必ずしも一致しないので，ただ f をくわしく知るというだけでは形の本質に近づけないこともあろう。たとえば非常に面倒な式であらわされる平面上の閉曲線で，図を書けば三角形としか見えないものがある。これを三角形と見る方が正しい場合もあろうし，解析的なその複雑な函数の族の図形の一つと見るべき場合もあろう。どちらをとるべきかは f の性質だけによって客観的にきまって来るものでもない。ここに形の科学のむつかしさと面白さがあると思うが，下手をすると科学でなくなる危険もある。

4.　形の数理と形の物理

もし物理学に必要ならとも角，さもなくば数学的・抽象的な形を“「形」の物理学”で考える必要はない。しかし“「形」の物理学”は形の数理を考えないわけにはゆかないことは自明であろう。ここでいう「物理」「数理」は「形」の生成と変化に関与する「物理的要因」と「数理的要因」の意味で，明確にわけられない場合は致し方ないとして，なるべく区別を認識することが，現象の深い理解と明瞭な説明の第一歩であると思う。

たとえばエネルギーや力は物理的理由で生じたり存在したりするが，そのあとそれが現実の形に結びつく過程は全く純然たる数量的，乃至幾何学的論理で説明されるとき，それを物理学者が扱うか，数学者が扱うかに関係なく，前の部分が物理，あとの部分は数理といえよう。現象によっては「形」に対して数理が非常にきいていて，物理の関与の少いものもあろう。もち論，同じ現象に対して説明はユニークでなければならぬことはないので，数理，物理の割りふりがアプリオリにきまっていると考えるのは誤りだろう。

形の生成や変化の過程の研究に対し，形そのものの表現の問題は，狭義の数理でもなく狭義の物理でもない。広義の物理とも広義の数理ともいえよう。これは問題追求における目的意識

にかかわることである。私自身は情報学におけるパターン認識の問題として考えたいと思っている。

5. 実験から

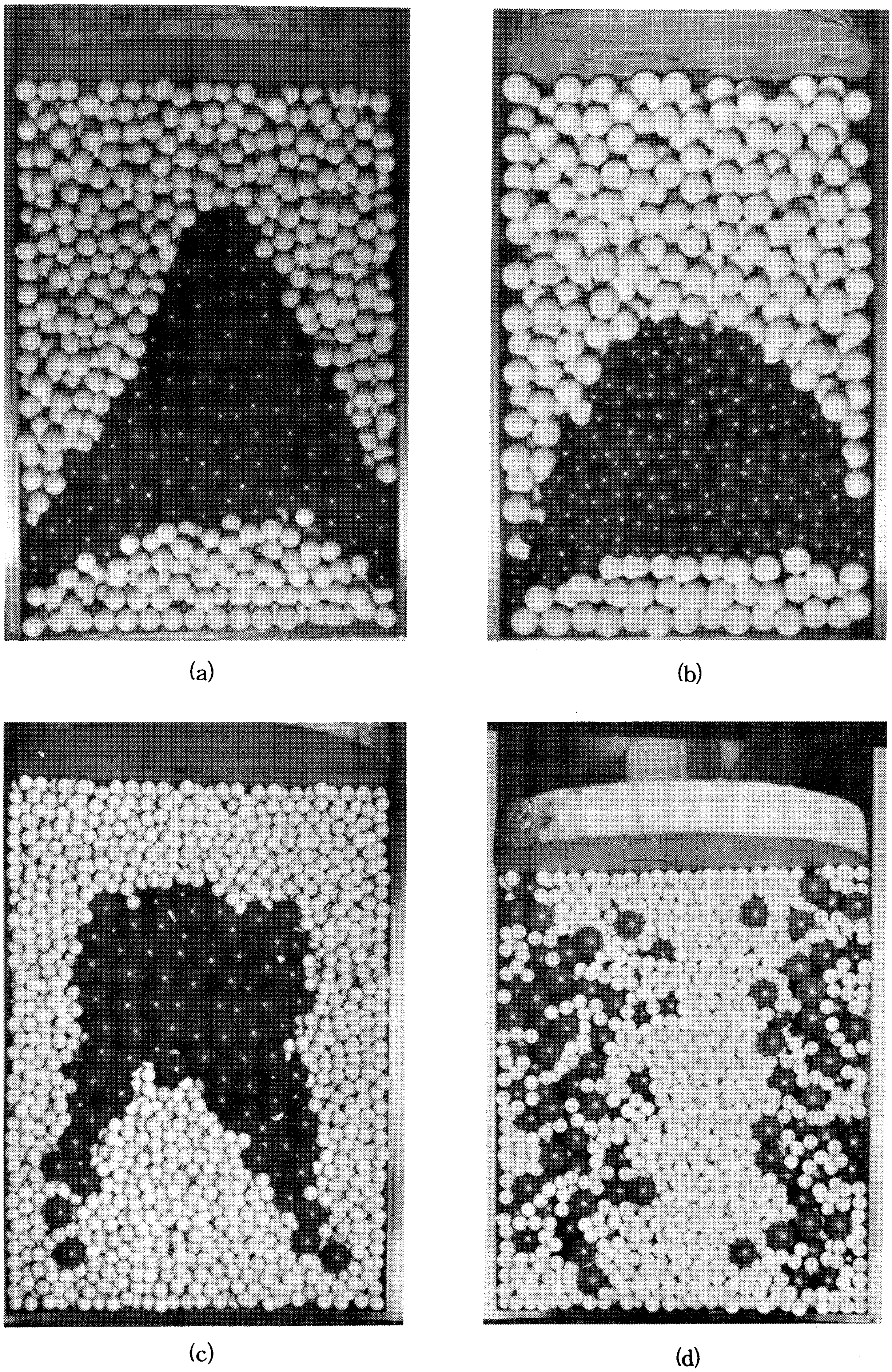
(i) 粒子の振盪実験に際して生じた形[2)]

特に「形」を目的とした研究でなく，大きな粒子と小さな粒子を一緒にかき混ぜると大きな粒子が浮び上るという日常よく経験する現象を，条件をととのえて少し定性的に観察しようとしたことがある。容器に大小粒子を上下に分離して入れておいて上下に振盪し，混合，分離の過程を観察しようとした。容器は高さ10数cm，内径10cmのアクリル製円筒で，粒子は直径4mm，6mm，8mmの合成樹脂を用いた。振盪には(片)振幅が0～2cm，振動数が0～10Hzの範囲で任意に固定できる振動台を特製して用いた。振動の最大加速度が重力の加速度を越える場合は粒子は容器の中でほうり上げられて落ちる運動をするが，落ちた状態の配位を時間的にたどってゆくと，容器の中での流れが描像される。これは実験前に予想していたのと異り，衝撃による拡散のようなものが殆んどなく，容器壁面と粒子との摩擦に起因する対流が主なものである。これを見るために容器は縦割りに二つに割れるものを用い。一定時間振盪した後，内部の断面を出して観察した。時間経過の初期において，水平な境界面がどのように変ってゆくかを見ると，尖った山のような形になってくる場合から，上部が水平な長方形が生じる場合まで，与えられる振動エネルギー(厳密には振動数の組)によっていろいろある。図1(a)，(b)，(c)の(a)はエネルギーの小さい場合で容器の下部は組織が固くて流れが非常におそいために生じる形である。(c)はエネルギーの大きい場合で，上下の端の部分をのぞいて流れは垂直方向となる。((a)の方が(c)よりもずっと長く振盪した結果である)。ちなみに長く振盪をつづけると大きな粒子は次第に速度のおそい領域(死水域)の方におしやられる傾向がある(図1(d))。また振動数をずっと大きくしてゆくと，縄跳びの2回跳び，3回跳びのようにおちてくる迄に空まわりする。

話をもどし，図1(a)，(b)，(c)の形の生成の物理的原因は定性的に殆んどわかりつくしている ― 流れの速さの振巾依存に関してややわかりにくいことがあるにせよ ― 。それにも拘ら数理的定量的に成形の記述説明をするのがむつかしい。非可逆で非線型な現象のためだと思われる。材料力学での大きな塑性変形なども同様ではないかと思う。

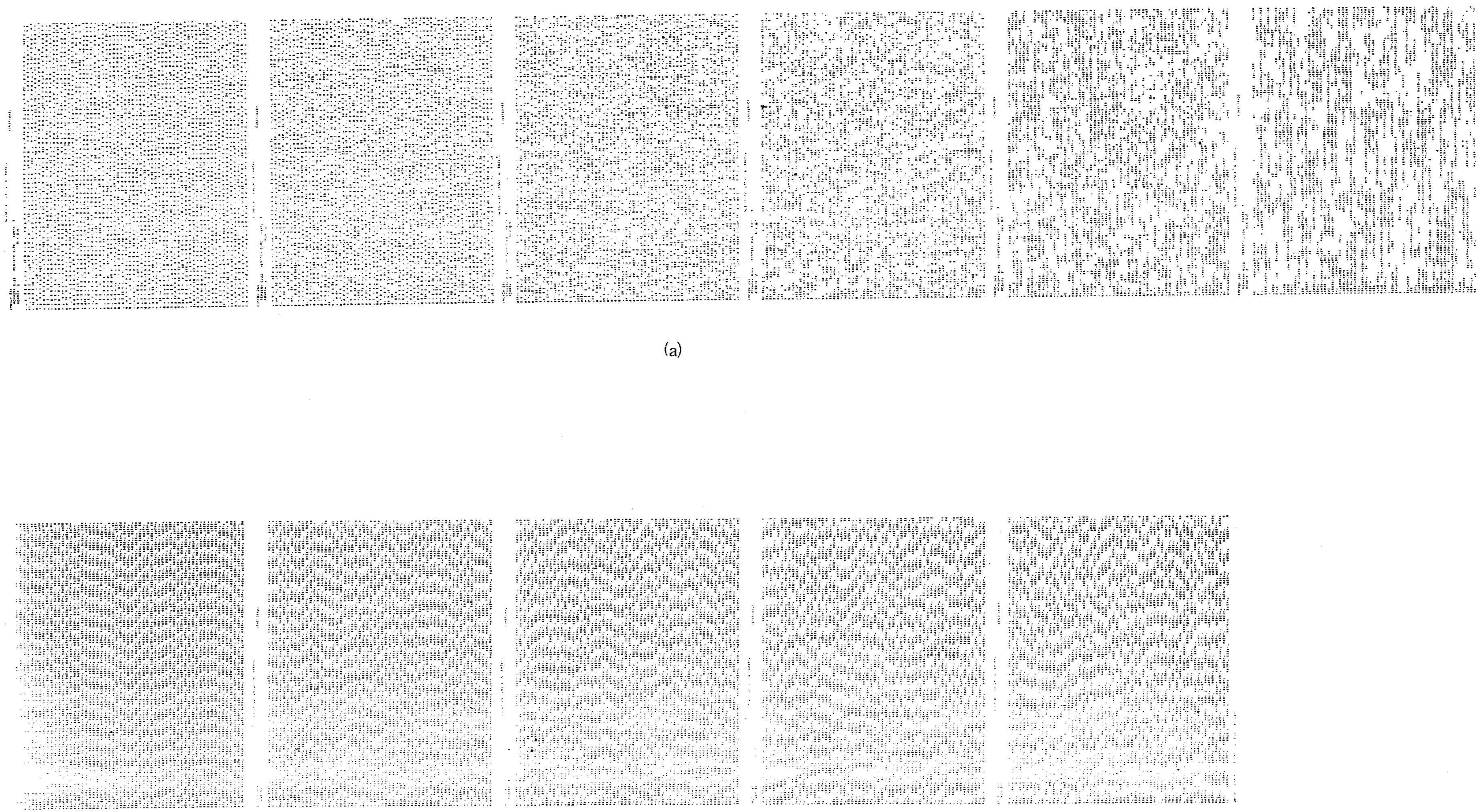
(ii) ランダム模様のコンピュータ実験

空間的なランダムパターンを分類したり測定したりすることも最近行われるようになって来ているが，経験もなくいきなり与えられた図柄に統計的手法を加えても，その特徴をつかみ出すことは期待しがたい。そこで逆に既知の確率過程に従って描がけばどのようなものになるかをい



(a) (b) (c) (d)

図 1



(a)

(b)

図　2

ろいろ多く知ることが，勘を養うことになるだろう。規則性，不規則性，みかけ上の規則性など，空間的パターンとしては我々にはどのように感じられるかを知るためコンピューターで図柄を書いてみることにした。乱数を使って模様を書くことだけなら，1960 年頃から行われているが，いろいろの確率モデルを目で見るという立場のものはあまりみかけない。本来ならXYプロッターを用いるべきであるが，まず安直にラインプリンターで打出すことにした。従って方向性が限られた縞模様だけである。図２はその一例で，(a)は系列がつづく確率 p_1 と系列が消えているときに再び起る確率 p_2 を与えたときのランダム系列をずらっと並べたものである。用いた文字は６通りで，それが周期的に出現するが，系列が一たん消えると，改めて出発の文字をランダムに選ぶようにしている。この場合 $p_1 + p_2 = 1$，すなわち系列の中文字の占める割合はすべて 0.5 である。p_1 は上から 0.1，0.2，0.4，0.6，0.8，0.9 である。図２(b)は６文字が必ず連続してあらわれるが，ブロック間の空隙の長さがランダムである場合である。長さは１～l の中の整数をランダムに選ぶが，図の上から $l = 1$，2，3，4，5 の場合である。各系列の最初の出発の文字は６文字の中からランダムに選ばれている。

文　献

1) 渡辺　慧：認識とパタン（岩波新書）

2) I. HIGUTI: Bewegungen und Mischungen von zweierlei Kugeln durch Rüttelung; Proc. 15th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1965) 109.