

目 次

6	河川の分岐について	徳 永 英 二 柏 谷 健 二	... F 32
7	血管の分岐の形態とその構築	戸 川 達 男	... F 40
8	植物形のパイプ・モデル理論とその展開	大 畠 誠 一	... F 48
9	生物体にみられる幾つかの空間分割	本 多 久 夫	... F 52
10	なわばりの形	長谷川 政 美	... F 59
11	二次元石けん泡の統計的「形」の問題	種 村 正 美	... F 64
12	集落, 住民の形態分析の手法について	原 広 司	... F 68
13	ランダムな図形の物理的表現	森 肇	... F 76
14	数理的にみた「形」についての諸問題	樋 口 伊 佐 夫	... F 80

「 形 の 物 理 学 」

筑波大・物工 小 川 泰

I

未だ形をなしていない形の物理学について語るのは困難なので、題名には「 」をつけてあります。この研究会の趣意や思想について述べたいと思いますが、提案者としての私にとっての形の物理学を語ることになり、これから発展すべき形の物理学の、ほんの一側面にすぎません。

さて、現在の科学は定量化が可能あるいは容易な事柄に偏っているように見受けられます。例えば物の形というものは、極めて豊かな情報を秘めていると思われるのに、私達の科学は、一体そのうちのどれだけを読みとっているのでしょうか？ 似た形には多少とも共通の成因が潜んでいると期待できます。しかし、そもそもわれわれが似た形と感ずるものは、より客観的にはどうしたことなのでしょうか？ 「如何なる概念によって形を表現するか？」という問題も「物理学」以前に先づあるようです。

いろいろな対象で起る振動現象や波動現象は、一つの振動論や波動論に抽象できます。また、電磁気学では電場等を非圧縮性流体になぞらえることにより、理解が深まります。これらに似た意味で、さまざまな対称に現れる似た形の成因を抽象し、理想化した模型に仕立てることが

できないものでしょうか？ このように、（数学的）表現の共通性に注目して理想化した描像を創るのも、物理学の一つの基本的態度といえましょう。こう考えると、「形の物理学」と呼べそうなものが、おぼろげながら想定できそうです。

形の表現と成因の両方が理解できている簡単な例を二、三挙げてみます。catenary（懸垂線） $y = a \cos(x/a)$ が充たす微分方程式の意味はよく知られており、変分に基づく表現も可能です。鸚鵡貝の殻、牛や羊の角等にみられる対数螺旋 $r = a\mu^{\theta}$ は、成長が一種の相似則に従っていることを物語っています。人間の爪も切らずに伸ばし続けると螺旋状になるそうです。Plateau (1801–1883) は、閉曲線を縁とする石鹼膜の形を、表面積最小の曲面を求める問題として定式化した。同様な形は放散虫の骨格にも見られ、成因を暗示しています。

1918年 D'Archy Thompson (1860–1948) はこのような類比を大胆に駆使した“On Growth and Form”¹⁾を著わしました。日本でも、寺田寅彦(1878–1935)、中谷宇吉郎(1900–1962)、平田森三(1906–1966)等、形についての物理学的研究の伝統があります。また最近、高木隆司の著書「かたちの探求」(1978)は、形の問題を広く概観しています。²⁾ 寺田、平田らは、田圃の干割れとキリンの斑との類比を行い、³⁾ 三毛猫の紋様が、つなぎ合わされることを試したりして、生物学者丘英通らとの論争⁴⁾がありました。これらの類比に限界はあるとしても、一笑に付すべきことではなく、その発想は尊重すべきだと思います。たゞ、その論争の段階では、一つにつなぎ合わさるという事柄に偏っていて、割れ方の議論が不足しているという印象を受けますが、割れ方の統計理論は後に平田らが発展させました。一つにつながることへの寺田の関心は、大陸移動説 (1912, Wegener) への関心と無縁ではないと思います。動物の紋様とひび割れとの類比は、日本人だけが行っているのではなく Stevens の“Patterns in Nature” (1974)⁵⁾ にも見られます。これらが独立な指摘かどうかは知りません。中谷は、雪を「天から送られた手紙」としてその解読に努めました。雪の物理学は形の含む情報を読みとるという意味での先進分野といえましょう。この研究会でも、最近の発展も含めて小林先生、黒田先生にお話しをお願いしてあります。

最近、非線型性による不均質解の出現という観点から Bénard 対流や Zhabotinsky 反応が関心を集め、紋様形成の機構が議論されています。これらも形のもつ情報を読みとる試みに算えることができます。

形の問題は、便宜上、形の表現とその成因の二つに分けることができるとは思いますが、既に表現は確立していて、その成因こそが問題になっている分野もあれば、形の表現を工夫しなければ先に進めない分野もあります。個々の問題は個別分野としての目標をもち、共通な部分だけで尽きてしまわないことは当然ですが、その相異点を充分認識した上で、共通な「形の数理」

乃至は「形の物理」が存在しそうに思えます。

但し、今回の研究会では、「物理学」に到達することは、到底無理であり、それはこれから目指すことです。今回は、形の問題を自己の問題として、さまざまな試みを行っていらっしゃる方々に集って頂き、特に形の把え方の試みについて話して頂き、個別問題としてはお互いに素人の間に、形の問題への共通の関心を介して、気軽に意見を述べあえる雰囲気ができ、いくらでも問題の整理ができれば成功だと思っております。枝分れ系と空間分割の問題は、いろいろな分野で問題になっていますので2日目のプログラムに組んであります。

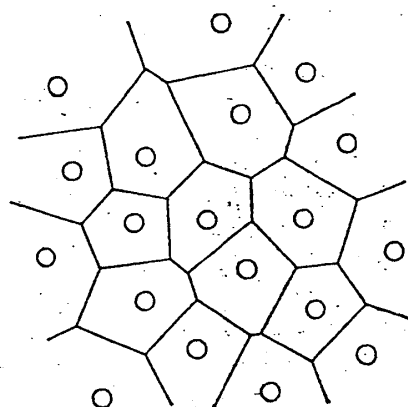
なお、アメリカでは1979年5月に3日間、*Mathematical Trees in Principle and Practice* という研究会が開かれ、今日御出席の本多さんが参加されました。

II

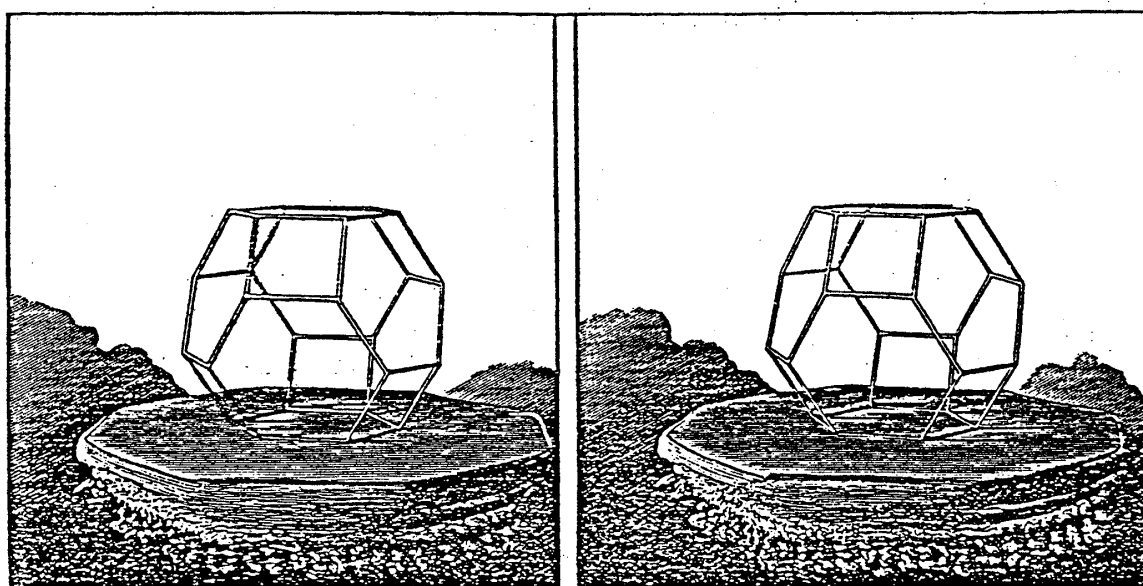
次に、自己紹介も兼ねて、私自身が関わって来た形の問題について述べ、若干の問題提起を行いたいと思います。

A. 液体構造と凝固過程

物質の三相（気相・液相・固相）のうち、気相には、全く相互作用のない質点の集合という理想気体、固相には完全に周期的に配列した安定点のまわりの微小振動という理想像があります。しかし、固相の場合に近い高密度をもちながら、配置が乱れた液体については、なかなか納得のゆく簡単な理想像が作れません。液体及び融解現象の綺麗な描像はまだないといえます。そこで、思考実験の強力な延長として、計算機実験が重要な役割を果たします。私達のグループ（種村、樋渡、松田、小川、萩田、上田）⁶⁾ が過冷却液体について行った *molecular dynamics* による計算機実験で突然圧力が減少する現象が見られました。計算機実験ですから、各粒子の座標や速度は全て追跡できるのですが、何らかの *idea* に従って解析してみないことには、徒らに何千、何万の *data* を書き出しても、何が起ったのか判りません。私達は以前か Voronoi 多面体という概念を使う構造解析や統計理論を試みていた⁷⁾ ので、この考えに基づく解析を行ってみました。ある瞬間の全粒子の座標が与えられたとき、空間の各点を一番近い粒子に割りふると、各粒子毎に Voronoi 多面体（結晶の場合には Wigner-Seitz cell と一致する）と呼ばれる多面体領域が定まり、空間は粒子数だけの多面体領域に分割されます。そこで、この空間分割の特長をみるために、どんな多面体がどれだけあるかという統計をとります。多面体の分類は先づ面数によって何面体かということ、次に何角形面をいくつもつ多面体であるかをみて、 (n_3, n_4, n_5, \dots) （但し n_k はその多面体がつ k 角形面の数）というようにすることができます。液体の座標 *data* をこの方法で解析しますと、大雑把にいて 10 面体から 16 面体位の



第1図 2次元での Voronoi 分割：○で与えられる粒子中心の配置に対する Voronoi 分割。各多角形の辺は，“隣接”する2粒子を結ぶ線分の垂直二等分線になっている。○は位置をはっきりさせるためにのみ大きさをもたせたものであって，粒子の形や大きさを意味しない。



第2図 Kelvin の14面体の立体図：4角形面6ケと6角形面8ケをもつので(0608)と分類される。
Kelvin は *Phil. Mag.* 24 (1887), 503 で，合同な多面体による空間分割のうち，境界面積最小のものという意味づけを行った。この図は Kelvin の論文 *Proc. Roy. Soc.* 55 (1894), 1 にあるもの。

間の実にさまざまな多面体に分布が広がっています。一方：固体ではほんの限られた種類の多面体しか現れません。殆んど完全な体心立方格子では(0608)と分類される Kelvin 14 面体と呼ばれる一種類しか現れませんし、格子振動等で多少乱れても、せいぜいこの多面体の一、二ヶ所をいじったもの位しか現れません。

さて、前に述べた圧力降下の前後での多面体分布の変化を調べてみますと、結晶に固有な多面体が時を同じうして急増していることが判りました。こうして、我々が観測した圧力降下は、部分的な結晶化によるものであるということが結論できます。更に、結晶化がどの場所で起り、どのように成長して行ったかも見ることができます。

ここで一言注意しておきたいことは、極微の結晶の芽のような、不完全な結晶を記述するには、周期性という無限系に対する結晶の定義では不十分で Voronoi 多面体によるような局所的定義が必要だということです。

B. 超微粒子

超微粒子の構造は、その物質の巨視的な結晶の構造とは違うことがあります。3次元の正多面体の種類は、4-、6-、8-、12-、20-面体の5種類の Plato 多面体に限られます。そのうち、12面体と20面体は、無限に連ねて結晶的な長距離秩序を作ることができません。そこで無限に大きい場合には結晶的な秩序構造が安定でも、充分小さい場合には別の構造が現われることがあるということです。つまり、局所秩序を決める原理と、長距離秩序を決める原理は別物で、時には矛盾することがあるということです。古典力学に従う二体力の系の場合、充填の効率が構造決定の要因になっており、小さい系では20面体的構造、充分大きな系では面心立方的構造が有利です⁸⁾。電子が原子間を動き回るとしますと、構造の空間的対称性が、電子準位の縮重度に関係して来ます。また、電子が Fermi 統計に従う粒子であるということも関係します。電子数によっては、縮重度を減らすために、空間的に対称性を悪くした、歪んだ構造をとろうとする Jahn-Teller 効果の傾向が現われます。一方、電子間の相互作用を考慮すると、空間的には対称性を高く保って縮重度を稼ぎ、交換相互作用で得をして、磁性を生じるという傾向も現われます。これらの傾向の強弱は物質によって異り、かなり複雑です⁹⁾。

今述べたことと似ていますが、実は別のこととして、微粒子の外形と構造は別問題だということがあります。1000Å位の大きさの金属微粒子で見られる5角形の輪郭は、微視的構造は結晶のときと同じ面心立方型で、5ヶの正4面体結晶を多少歪めて貼り合わせたようなものであり、歪み、表面、界面の三種のエネルギーのかねあいによって決まって来る外形です¹⁰⁾。これは、巨視的物理学の問題ですが、粒子数の少ない極限を考えたのが、前に述べた対称性の問題です。

微粒子の場合に限らず、もう少し一般的に局所の形の問題と、全体としての形あるいは外形

の問題とが、関わりつつも別問題としてあると思います。例えば、金米糖の形の場合に、一本の角の形や、その生える機構の問題と、外形全体の長さをどう捉えるか、それを決めているものは何か — というように。

C. 統計幾何学の諸問題

幾何学的な量がからんだ統計や確率論にはいろいろと基礎づけるべきことが多いようです。何に対して等確率と考えるかについて Bertland の逆説というのが有名です。「単位円に任意に弦を引くとき、その長さが内接正三角形の辺の長さ $\sqrt{3}$ より長くなる確率」は、①直径上に弦の中点を選べば $\frac{1}{2}$ ②円周上に弦の端を選べば $\frac{1}{3}$ ③円内に弦の中点を選べば $\frac{1}{4}$ 、等々と、様々な答が出せます。「任意に弦を引く」という表現が、問題を完全に設定していないから生じる混乱であり、random という言葉を安易に使うことへの反省を促しますが、問題を完全に設定すれば、上記の各々は、お互いに変数変換を正しく行って重みをつければ済むことです。従ってこれは本当の逆理ではありません。多変数の場合には、変数の独立性も問題になりますので、独立な確率変数を、あるべき個数だけ選ぶにはどうすればよいかということが問題です。共有結合物質のアモルファスの構造模型として結合手の長さや、結合角に分布を許して、計算機なり、手作りなりで模型を作ることがしばしば行われています。出来上がった模型は実用上は正しく便利なものになっているのかも知れませんが、確率論的な基礎は不明です。例えば、一原子から出る4本の結合手の間には、6ヶの結合角がありますが、立体角が 4π で押えられているために、全てが独立ではありません。統計力学の立場では、正準変数が特別の意味をもち、 N ヶの質点からなる系の、内部構造の自由度は $3N - 6$ の筈です。多面体の性質を統計的に調べようとする際にも、何角形面がどれ程の頻度で出現するかという分布を調べようとしますと、4面体は4票しか権利がないのに、20面体は20票を投じることになります。不手をすると、現象の本質とは全く関係のないものを見ることになってしまいます。

形についての、幾何学的情報を扱う際に、平面角は 2π 、立体角は 4π で閉じるという制約は、非常に重要だと思います。これらの変数の周期的性質のために、中央極限定理も無限変域の場合とは異ってきます。

幾何学的制約が余りに支配的な現象は、科学あるいは物理学の対象としては余り興味深くないと考える方も多いと思います。しかし幾何学的に決ってしまう部分を除去して、現象の本質をより鮮明にとり出そうとするには、幾何学的な部分について充分に知ることが先づ必要だと思います。

References

- 1) D'Arcy W. Thompson: "On Growth and Form" (Cambridge University Press, 1917; 2nd ed. 1942).
- 2) 高木隆司「かたちの探究」(ダイヤモンド社, 1978)
- 3) 平田森三「キリンのまだら」(自然選書, 中央公論社, 1975)
- 4) 平田森三 科学 3 (1933), 461 ; 4 (1934), 6
丘 英通 科学 3 (1933), 503
- 5) P. S. Stevens: "Patterns in Nature" (Little, Brown & Co. 1974; Penguin Books, 1976).
- 6) M. Tanemura, Y. Hiwatari, H. Matsuda, T. Ogawa, N. Ogita, and A. Ueda: Prog. Theor. Phys. 58 (1977), 419.
- 7) T. Ogawa and M. Tanemura: Prog. Theor. Phys., 51 (1974), 399.
- 8) M. R. Hoare: Adv. Phys., 20 (1971), 161.
- 9) T. Ogawa: Z. Phys. B28 (1977), 73. T. Ogawa and S. Nara: Z. Phys. B33 (1979), 69.
- 10) S. Ino: J. Phys. Soc. Japan, 21 (1966), 346.
- 11) J. Bertrand: "Calcul des Probabilites" (Paris, 1907).
M. G. Kendall and R. A. P. Moran: "Geometrical Probability" (Charles Griffin & Co. Ltd., 1963).

単位要素(分子)の形の相転移に及ぼす影響

名大・工 中野藤生

小川氏の講演「形の物理学」の後の討論時間に述べたコメント

小川さんのお話に出てきた問題(分子は点とみなして, 多数の点が液相などではどのように分布しているか, Voronoi 多面体の統計分布に基いてそれを調べる)のほかに, むしろそれ以前に分子(単位要素)の形がどのようなものであるかが現象形態を規定することがあると思われる。そのことに関連して私どもの研究室における最近10年ばかりの研究経験に照して感じたことを述べる。対称破りポテンシャルの方法¹⁾に基いて体系の自由エネルギーを秩序パラメータの