物性研究 36−1（1981−4）

惑星により反射された太陽輻射のエントロピー

（1981年3月2日受理）

大阪医大・教養　　青　木　一　郎*

§1　序

輻射のエントロピーは反射により，鏡面反射の場合を除いて，一般に増大する。輻射の反射は，幾何光学的な非可逆過程である。本報は，反射された輻射のエントロピーの計算法を示し，これを地球およびその他の太陽系惑星により反射された太陽輻射の場合に用いる。さらに，これを前報[1)]の結果と合せて，惑星上のエントロピーの流れおよびエントロピー生成について論ずる。先ず，はじめの数節でいくつかの準備を行う。

§2　輻射の比強度

空間内の面積要素 $d\sigma$ を通って，時間 dt 内に，(θ, φ) 方向の立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 内に放射される，振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある輻射のエネルギー E_ν は，dt，$d\Omega$，$d\nu$ および $\cos\theta d\sigma$ に比例する。そこでこれを

$$E_\nu = K(\nu)\, d\nu\, dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \tag{2−1}$$

と表わす。$K(\nu)$ はエネルギー輻射のスペクトル比強度とよばれる。これは一般に (θ, φ) にも依存する。また，$d\sigma$ を通り dt 内に (θ, φ) 方向の立体角 $d\Omega$ 内に放射される輻射の全エネルギー E を

$$E = K dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \tag{2−2}$$

と表わす。K はエネルギー輻射の比強度とよばれる。K は $K(\nu)$ の ν についての積分として表わされる：

$$K = \int_0^\infty K(\nu)\, d\nu \tag{2−3}$$

同様に，$d\sigma$ を通り dt 内に (θ, φ) 方向の立体角 $d\Omega$ 内に放射される，振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある輻射のエントロピー S_ν を

$$S_\nu = L(\nu)\, d\nu\, dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \tag{2−4}$$

---

*) AOKI Ichiro

と表わす。$L(\nu)$ はエントロピー輻射のスペクトル比強度とよばれる。これは一般に(θ, φ) にも依存する。また，$d\sigma$ を通り dt 内に (θ, φ) 方向の立体角 $d\Omega$ 内に放射される輻射の全エントロピー S を

$$S = L dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \tag{2-5}$$

と表わす。L はエントルピー輻射の比強度とよばれる。L は $L(\nu)$ の ν についての積分として表わされる：

$$L = \int_0^\infty L(\nu)\, d\nu \tag{2-6}$$

温度 T の黒体輻射の場合，E_ν，S_ν はそれぞれ

$$\begin{cases} E_\nu = \dfrac{2h}{c^2} \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^3 d\nu\, dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \\ S_\nu = \dfrac{2k}{c^2} [(1+\xi) \ln(1+\xi) - \xi \ln \xi]\, \nu^2 d\nu\, dt\, d\sigma \cos\theta\, d\Omega \end{cases}$$

ここに，

$$\xi = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

で与えられるから，これを $K(\nu)$，$L(\nu)$ の定義式と等置して，

$$\begin{cases} K(\nu) = \dfrac{2h}{c^2} \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^3 \\ L(\nu) = \dfrac{2k}{c^2} [(1+\xi) \ln(1+\xi) - \xi \ln \xi]\, \nu^2 \end{cases} \tag{2-7}$$

が得られる。K, L はそれぞれ，

$$\begin{cases} K = \displaystyle\int_0^\infty K(\nu)\, d\nu = \frac{1}{\pi} \sigma T^4 \\ L = \displaystyle\int_0^\infty L(\nu)\, d\nu = \frac{1}{\pi} \frac{4}{3} \sigma T^3 \end{cases} \tag{2-8}$$

となる。ここに，

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.670 \times 10^{-12} [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K^4}]$$

は Stefan-Boltzmann 定数である。

太陽輻射の比強度は，太陽を $T = 5800$ [K] の黒体とみなし，(2−7)，(2−8) で T=5800 [K]

とおくことによって得られる。

エネルギー輻射の比強度$K(\nu)$, Kは，ⅰ)通過する媒質での吸収，反射，散乱等によるエネルギー損失が無い場合には，輻射線に沿って一定であることが示される。これはimplicitには，Planck[2]の昔から想定されていたことであるが，explicitには1963年にNicodemus[3]によって示された。Nicodemusはまた，同様の議論により，ⅱ)反射率ρの鏡による反射によって，輻射の比強度は反射前の値Kから反射後のρKに変化すること，ⅲ)二つの媒質1，2の境界面での反射，屈折において，媒質1，2での輻射の比強度をそれぞれK, K'，屈折率をそれぞれn，n'とし，境界面での媒質1から2へ向う輻射の反射率をρとすると，

$$\frac{K'}{K}=\frac{n'^2}{n^2}(1-\rho) \qquad (2-10)$$

が成り立つこと，ⅳ)また，輻射の通過する媒質中での吸収により，吸収前後の輻射の比強度をK, K'，媒質の透過率をτとすると，

$$K'=\tau K \qquad (2-11)$$

が成り立つことを示した。[3]

§3　球による輻射の反射

輻射の波長に比べて十分大きい半径rをもつ球による輻射の反射を考える。輻射は微小立体角$d\Omega$を通って球へ入射するものとし，入射する輻射線に垂直な，球の中心を通る断面を$d\sigma=\pi r^2$とする。時間dt内に$d\sigma$へ入射する輻射のエネルギーは，Kを入射してくるエネルギー輻射の比強度として，$K dt\, d\sigma d\Omega = K dt\, \pi r^2 d\Omega$である。球による輻射の反射率を$a$とすると，入射した輻射のエネルギーのうち反射されるエネルギーは，

$$aK dt\, \pi r^2 d\Omega \qquad (3-1)$$

となる。

次に，$d\Omega$は十分小さくて，球に入射する輻射線はほぼ平行であるとし，輻射によって照射されている半球面上の微小領域を$d\Sigma$とすると，$d\Sigma$から(θ_1, φ_1)方向の立体角$d\Omega_1$の内に反射される輻射のエネルギーは，K_1を$d\Sigma$から反射されるエネルギー輻射の比強度として，$K_1 dt\, d\Sigma \cos\theta_1 d\Omega_1$である。反射は乱反射であって，$K_1$が$(\theta_1, \varphi_1)$によらないとし，これを$d\Omega_1$について積分すると，

$$K_1 dt\, d\Sigma \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi/2} \cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1 = \pi K_1 dt\, d\Sigma$$

さらに，K_1が$d\Sigma$の位置によらないとして，これを$d\Sigma$について輻射によって照射されている半球面上で積分すると，

$$\pi K_1 dt \int_{半球面} d\Sigma = \pi K_1 dt\, 2\pi r^2 \tag{3-2}$$

となる。エネルギー保存により，これを(3−1)と等置して，

$$\frac{K_1}{K} = a\frac{d\Omega}{2\pi} \tag{3-3}$$

が得られる。スペクトル比強度についても同様の関係が成り立つ：

$$\frac{K_1(\nu)}{K(\nu)} = a(\nu)\frac{d\Omega}{2\pi} \tag{3-4}$$

ただし，この場合反射率aは一般にνの関数になる。このように，入射する輻射のK, $K(\nu)$がわかれば，反射率および$d\Omega$から，反射した輻射のK_1, $K_1(\nu)$を知ることが出来る。

太陽輻射の地球による反射の場合には，反射率（アルベドー）は$a = 0.30$であり，[1] 地球から見た太陽の立体角$d\Omega$は0.6810×10^{-4}であるから，

$$\frac{K_1}{K} = a\frac{d\Omega}{2\pi} = 3.251 \times 10^{-6} \tag{3-5}$$

また，簡単のために$a(\nu)$がνによらず一定であると仮定すると，

$$\frac{K_1(\nu)}{K(\nu)} = a(\nu)\frac{d\Omega}{2\pi} = 3.251 \times 10^{-6} \tag{3-6}$$

となる。

§4　輻射の温度

次に，$L(\nu)$の表現を得るための準備として，輻射の温度なる概念について述べる。[2,4] 黒体輻射では，振動数νの輻射のスペクトル比強度$K(\nu)$は，黒体の温度（したがって，それと熱平衡にある黒体輻射の温度）Tを用いて，(2−7)式：

$$K(\nu) = \frac{2h}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\nu^3$$

と表わされた。これをTについて解くと，

$$T = \frac{h\nu}{k}\frac{1}{\ln\left[1 + \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{K(\nu)}\right]}$$

となる。

さて，この関係式の意味を拡張して，必ずしも黒体輻射ではない振動数νの任意の単色輻射について，その“温度”を定義することにしよう：すなわち，振動数νの任意の輻射線のスペクトル比強度を$K(\nu)$とするとき，その輻射線に温度$T(\nu)$なる量を随伴させ，その$T(\nu)$は，

$$T(\nu)=\frac{h\nu}{k}\frac{1}{\ln\left[1+\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{K(\nu)}\right]} \tag{4-1}$$

で定義されるものとする。

このように定義された$T(\nu)$が熱力学的温度の意味をもつことは簡単に示される。（証略）

§5　エントロピー輻射の比強度

振動数ν，温度$T(\nu)$の輻射で満たされている体積Vの領域を考え，その領域における輻射のエネルギー，エントロピーをそれぞれ$U(\nu)$，$S(\nu)$とする。いま，その領域の表面の面積要素$d\sigma$上に，時間dt内に，(θ,φ)方向の立体角$d\Omega$を通って，振動数ν，温度$T(\nu)$の輻射が入射して来るものとする。その輻射のエネルギーfluxは，入射するエネルギー輻射のスペクトル比強度$K(\nu)$を用いて，$K(\nu)d\nu dt d\sigma\cos\theta d\Omega$，またその輻射のエントロピーfluxは，入射するエントロピー輻射のスペクトル比強度$L(\nu)$を用いて，$L(\nu)d\nu dt d\sigma\cos\theta d\Omega$と表わされる。したがって，領域$V$における輻射エネルギーの変化量あたりの輻射のエントロピーの変化量は，

$$\left(\frac{\partial S(\nu)}{\partial U(\nu)}\right)_V=\left(\frac{\partial L(\nu)}{\partial K(\nu)}\right)_V \tag{5-1}$$

となる。ところで，熱力学的関係式$(\partial S/\partial U)_V=1/T$を熱力学的系としての，領域$V$のなかの輻射に適用すると，

$$\left(\frac{\partial S(\nu)}{\partial U(\nu)}\right)_V=\frac{1}{T(\nu)} \tag{5-2}$$

したがって，(5−1)により

$$\left(\frac{\partial L(\nu)}{\partial K(\nu)}\right)_V=\frac{1}{T(\nu)} \tag{5-3}$$

$T(\nu)$の定義(4−1)を用いると，

$$\left(\frac{\partial L(\nu)}{\partial K(\nu)}\right)_V=\frac{k}{h\nu}\ln\left[1+\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{K(\nu)}\right] \tag{5-4}$$

ここで，

$$\xi_\nu \equiv \frac{c^2 K(\nu)}{2h\nu^3} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT(\nu)}} - 1} \tag{5-5}$$

とおくと，

$$\left(\frac{\partial L(\nu)}{\partial \xi_\nu}\right)_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2}\{\ln(1+\xi_\nu) - \ln \xi_\nu\} \tag{5-6}$$

が得られる。これをξ_νで積分して，$K(\nu)=0$のとき$L(\nu)=0$とおくと，

$$L(\nu) = \frac{2k\nu^2}{c^2}[(1+\xi_\nu)\ln(1+\xi_\nu) - \xi_\nu \ln \xi_\nu] \tag{5-7}$$

あるいは，

$$L(\nu) = \frac{kK(\nu)}{h\nu}\left[\left(1+\frac{1}{\xi_\nu}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\xi_\nu}\right) - \frac{1}{\xi_\nu}\ln\frac{1}{\xi_\nu}\right] \tag{5-8}$$

となる。このように，$K(\nu)$あるいはξ_νあるいは$T(\nu)$がわかれば$L(\nu)$が求められることになる。これをνについて積分してLが求められる：

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty L(\nu)\,d\nu = \frac{2k}{c^2}\int_0^\infty \nu^2[(1+\xi_\nu)\ln(1+\xi_\nu) - \xi_\nu \ln \xi_\nu]\,d\nu \\ &= \frac{k}{h}\int_0^\infty \frac{K(\nu)}{\nu}\left[\left(1+\frac{1}{\xi_\nu}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\xi_\nu}\right) - \frac{1}{\xi_\nu}\ln\frac{1}{\xi_\nu}\right]d\nu \end{aligned} \tag{5-9}$$

§6　地球により反射された太陽輻射のエントロピー

地球により反射された太陽輻射のスペクトル比強度$K_1(\nu)$は，(3−6)式：

$$K_1(\nu) = 3.251 \times 10^{-6} \times K(\nu)$$

において，$K(\nu)$として$T=5800$[K]としたときの(2−7)式：

$$K(\nu) = \frac{2h}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\nu^3$$

を用いることによって得られる。この$K_1(\nu)$を(5−5)の$K(\nu)$に代入すると，(5−7)から地球により反射されたエントロピー輻射のスペクトル比強度$L_1(\nu)$が求められる。これをνについて積分して，地球により反射されたエントロピー輻射の比強度L_1が求められる。計算の結果，

$$L_1 = 0.6833 \times 10^{-5}\ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}] \tag{6-1}$$

となる。

さて，地球の太陽側を向いた半球面上の面積要素$d\Sigma$から，時間dt内に，(θ_1, φ_1)方向の立体角$d\Omega_1$のなかに反射される輻射のエントロピーは，

$$L_1\,dt\,d\Sigma\cos\theta_1 d\Omega_1 = L_1 dt\,d\Sigma\cos\theta_1\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

である。これを，L_1が(θ_1, φ_1)によらないとして，(θ_1, φ_1)について積分して，

$$L_1 dt\,d\Sigma\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi/2}\cos\theta_1\sin\theta_1 d\theta_1 = \pi L_1 dt\,d\Sigma$$

さらにこれを，L_1が$d\Sigma$の位置によらないとして，$d\Sigma$について地球の太陽側を向いた半球面上にわたって積分すると，

$$\pi L_1 dt\int_{\text{半球面}}d\Sigma = \pi L_1 dt\,2\pi r^2$$

ここにrは地球半径。これを地球全表面にわたってならすと，地球表面の単位面積あたり，

$$\frac{\pi L_1 dt\ 2\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\pi L_1 dt$$

単位時間あたりでは，

$$s_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\pi L_1 = 0.1073\times 10^{-4}\ [\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}] \tag{6-2}$$

となる。この値は，地球表面の単位面積あたり，単位時間に，反射により外部空間に放出されるエントロピー flux の大きさを表わしている。

§7　地球上での輻射エントロピーの流れ

地球に入って来る太陽輻射のエントロピーは，$\bar{s}_1 = 0.08018\times 10^{-4}[\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}]$であり，[1] 地球から出て行く輻射のエントロピーは，地球から放射される赤外輻射のエントロピー[1]：$s_2 = 1.270\times 10^{-4}\ [\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}]$と，地球で反射されて出て行く太陽輻射のエントロピー（6−2）：$s_{\mathrm{r}} = 0.1073\times 10^{-4}\ [\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}]$の和である。正味のところ，地球へは，

$$\frac{d_{\mathrm{e}}S}{dt} = \bar{s}_1 - s_2 - s_{\mathrm{r}} = -\,1.297\times 10^{-4}\ [\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}] \tag{7-1}$$

だけのエントロピーが流入する。

エントロピーの流れ$d_{\mathrm{e}}S/dt$は，地球による輻射の吸収および放射による項$\Delta S_{\mathrm{a\text{-}e}}$と，地球による太陽輻射の反射による項$\Delta S_{\mathrm{r}}$とに分けられる：

$$\frac{d_{\mathrm{e}}S}{dt} = \Delta S_{\mathrm{a\text{-}e}} + \Delta S_{\mathrm{r}} \tag{7-2}$$

先ず，$\Delta S_{\mathrm{a\text{-}e}}$は次のようにして求められる。太陽輻射の地球−大気系による反射率をaとすると，

地球ー大気系に吸収されるエネルギー輻射のスペクトル比強度は，(2−10)が$K(\nu)$についても成り立つとし$n' \approx n$として，

$$K_1(\nu) = K(\nu)(1-a)$$

で与えられる。$K(\nu)$に太陽輻射のスペクトル比強度((2−7)で$T=5800$ [K] としたもの)を用い，観測値$a=0.30$を用いると，$K_1(\nu)$が求められる。この$K_1(\nu)$を(5−5)の$K(\nu)$に代入し，(5−7)を用いると，吸収されるエントロピー輻射のスペクトル比強度$L(\nu)$が求められ，これをνについて積分して，エントロピー輻射の比強度Lが得られる。計算の結果，

$$L = 0.3580 \ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}]$$

となる。地球に吸収される輻射のエントロピー flux は，$d\Omega$を地球から見た太陽の立体角として，$Ld\Omega$であり，地球が吸収するエントロピーは，$Ld\Omega\pi r^2$となる。これを，地球表面全体にわたってならすと，

$$\frac{Ld\Omega\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{4}Ld\Omega = 0.06095 \times 10^{-4} \ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}]$$

したがって，

$$\Delta S_{\mathrm{a-e}} = \frac{1}{4}Ld\Omega - s_2 = -1.209 \times 10^{-4} \ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}] \qquad (7-3)$$

これは，前に簡単な方法[1)]で求めた値：

$$\frac{1}{4}(1-a)s_1 - s_2 = -1.214 \times 10^{-4} \ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}]$$

とほぼ一致しており，以前に用いた簡単化された方法の正当性をうらづけている。

この$\Delta S_{\mathrm{a-e}}$を用いて，ΔS_{r}は

$$\Delta S_{\mathrm{r}} = \frac{d_{\mathrm{e}}S}{dt} - \Delta S_{\mathrm{a-e}} = -0.088 \times 10^{-4} \ [\mathrm{J/cm^2 \cdot s \cdot K}] \qquad (7-4)$$

となる。このようにΔS_{r}が負になることは，反射によりエントロピーが増大することを示している。これは，反射前の太陽からの方向のそろった輻射が，地球による反射(乱反射であるとした)によりその方向が不そろいになり，それだけ randomness が増大したことによる。ΔS_{r}の値は，地球の幾何光学的特性を反映している。

§8　地球上でのエントロピー生成

地球－大気系がエントロピー的に定常であるとすると，負のエントロピーの流れd_eS/dtを打消して，全エントロピーの変化をゼロにするような，正のエントロピー生成d_iS/dtが存在しなければならない：

$$\frac{d_iS}{dt}=-\frac{d_eS}{dt}=-\Delta S_{a\text{-}e}-\Delta S_r=1.297\times10^{-4}\,[\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}] \qquad (8-1)$$

ところで，地球に吸収され，それにひきつづいて種々の運動，反応をひきおこす過程に関係するエントロピー生成は$-\Delta S_{a\text{-}e}$である。$-\Delta S_r$は単に地球の幾何光学的条件によってひき起されるエントロピー生成であるにすぎず，エネルギー吸収とそれにひきつづいておこる諸過程とは無関係である。そこで，地球上にひき起された種々の運動，反応の激しさを表わす尺度としてのエントロピー生成という面にのみ注目すれば，$-\Delta S_r$の項を無視することができる。かくして，この意味での地球上でのエントロピー生成の値は，

$$-\Delta S_{a\text{-}e}=1.209\times10^{-4}\,[\mathrm{J/cm^2\cdot s\cdot K}] \qquad (8-2)$$

となる。前報[1)]におけるエントロピー生成はこの意味に解されるべきである。

同様の計算を他の太陽系惑星についても行った結果を表に示す。

表

	a	$-\Delta S_{a\text{-}e}$ [J/cm²・s・K]	$-\Delta S_r$ [J/cm²・s・K]	$\frac{d_iS}{dt}$ [J/cm²・s・K]
水　　星	0.058	6.085×10^{-4}	0.111×10^{-4}	6.196×10^{-4}
金　　星	0.77	0.8485×10^{-4}	0.370×10^{-4}	1.218×10^{-4}
地　　球	0.30	1.209×10^{-4}	0.088×10^{-4}	1.297×10^{-4}
火　　星	0.20	7.178×10^{-5}	0.276×10^{-5}	7.454×10^{-5}
木　　星	0.42	0.9108×10^{-5}	0.0555×10^{-5}	0.9663×10^{-5}
土　　星	0.76	1.904×10^{-6}	0.304×10^{-6}	2.208×10^{-6}
天 王 星	0.93	2.662×10^{-7}	0.978×10^{-7}	3.640×10^{-7}
海 王 星	0.84	2.528×10^{-7}	0.384×10^{-7}	2.912×10^{-7}
冥 王 星	0.14	5.920×10^{-7}	0.043×10^{-7}	5.963×10^{-7}

参 考 文 献

1) 青木一郎，物性研究 **34** 111, 241 (1980).

2) Planck, M., *Theory of Heat Radiation* (Dover, 1959).

3) Nicodemus, G. E., Am. J. Phys. **31** 368 (1963).

4) Landsberg, P. T., *Thermodynamics* (Interscience, 1961).