

Feigenbaum 分岐の摂動理論

Marburg 大学物理 藤坂博一*

(1981年4月28日受理)

§ 1. はじめに

最近, ある種の力学方程式において chaos 出現の前駆現象としてかなり普遍的に現われる熊手型分岐 (Feigenbaum 分岐) の研究が精力的に行なわれるようになった¹⁾。研究は主に一次元差分方程式に基づいた数値計算で行なわれており, chaos 研究の重要な一分野を形成しつつあるように思われる。現在, 現実の物理体系との直接の比較は十分なされているとは言い難いが, 近い将来この方向の実験も多く行なわれることが期待される。熊手型分岐は元来周期状態間の転移であり, ここに表われる特徴的な量は chaos とは一応何の関係もないが, 最近 chaos の Lyapunov 数と関連しているという議論²⁾ や周期的 chaos での議論³⁾ があり, 熊手型分岐の新しい側面があらわになりつつある。本稿では, 主に一次元差分系に基づいて研究されている熊手型分岐の議論を, 一般的な微分方程式に基づいて摂動論を用いて行なおうと試みるものである。

§ 2. 摂動理論

自律系の力学方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t); r) \quad (1)$$

が, 励起パラメータ r を増加させたときある r の範囲で熊手型の連続分岐 (Feigenbaum 分岐) を示すとしよう。この仮定より明らかに状態ベクトル \mathbf{X} の成分数 N は $N \geq 3$ を満たさなければならない。 T_f を(1)の基本的な周期とすると r_{n+1} で周期 $\approx 2^n T_f$ の周期運動は不安定となり, これよりわずか上では周期 $\approx 2 \cdot 2^n T_f$ の周期運動が実現されることになる。ここで $n = 0, 1, 2, \dots$ 。通常これらの不安定点 $\{r_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ で r_∞ に集積し, それより上では chaos が実現される。 $r_n < \bar{r}_n < r_{n+1}$ を満たすある適当な値 \bar{r}_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して, この値での周期運動の振動数を $\Omega(\bar{r}_n)$ とおくと (以下も同様にある r に対する周期を $T(r)$ と書き振動数を $\Omega(r) (\equiv 2\pi/T(r))$ と書く), 上の設定より

*FUJISAKA, Hirokazu

$$\mathcal{Q}(\bar{r}_{n+1}) = 2^{-1} \mathcal{Q}(\bar{r}_n) (1 + \bar{\zeta}_n) \quad (2)$$

が成立する。ここで $\bar{\zeta}_n$ ($|\bar{\zeta}_n| \ll 1$) は基本振動数のずれを表わし、 $n \rightarrow \infty$ で $\bar{\zeta}_n \rightarrow 0$ を満す。更に、(2)より次式が成立することがわかる。

$$\mathcal{Q}(\bar{r}_n) = \bar{C}_n \Delta_n^\nu \quad (3)$$

ここで、 $\Delta_n \equiv r_{n+1} - r_n (> 0)$ は周期 $\approx 2^n T_f$ の周期解が安定に存在する区間の長さを表わし、 $\nu (> 0)$ は $n \rightarrow \infty$ で n に依らないとし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{C}_n \neq 0, \infty$ とする。 $\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (r_\infty - r_n) / (r_\infty - r_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / \Delta_{n+1}$ として

$$\nu = \ln 2 / \ln \delta \quad (4)$$

であり、 δ は Feigenbaum 比と呼ばれ、実験的には多くの差分方程式系に対して $\delta = 4.669 \dots$ なる値が得られている。本稿の目的の一つは Feigenbaum 分岐をなす微分方程式系に摂動論を用い、 δ を解析的に求めることである。

$r_n < r < r_{n+1}$ を満す r に対して(1)は $t \rightarrow \infty$ で周期 $T(r) (\approx 2^n T_f)$ の周期解を持つ。 r での周期解を $\mathbf{X}(t)$ とおくと、 $\hat{Q}(t, r)$ を周期 $T(r)$ の周期関数とし、 $\hat{\Lambda}(r) = T^{-1}(r) \exp_+ [\int_0^{T(r)} \hat{G}(\mathbf{X}(s); r) ds]$ とすると Floquet の定理より

$$\exp_+ [\int_0^t \hat{G}(\mathbf{X}(s); r) ds] = \hat{Q}(t, r) \exp [t \hat{\Lambda}(r)] \quad (5)$$

と書ける。ただし、 $G_{\mu\nu}(\mathbf{X}; r) = \partial F_\mu(\mathbf{X}; r) / \partial X_\nu$ 。 $\exp_+ [\dots]$ は通常の ordered exponential を表わす。 $\hat{\Lambda}(r)$ の固有値を $\lambda_\alpha(r)$ 、それに対応する規格化された固有ベクトルを $|\alpha, r\rangle$ とおくと、

$$\hat{\Lambda}(r) |\alpha, r\rangle = \lambda_\alpha(r) |\alpha, r\rangle, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

この固有値は次の性質を持つ。

- (i) これらの固有値のうち一つ ($\alpha = 1$ とする) は 0 である。
- (ii) 残り ($\alpha = 2, \dots, N$) の固有値の実数部分は $r_n < r < r_{n+1}$ なる r に対しては常に負である。なぜならこの領域では周期 $T(r)$ の周期運動は安定だから。

熊手型の連続分岐は各不安定点で single mode 不安定の結果として生ずる。なぜならこの転移では新しい独立な振動数の運動 (トーラスを形成する) は励起されない。 r をあげたとき r_{n+1} でこの運動は不安定になり r_{n+1} より上では周期 $\approx 2^n T_f$ の運動はもはや安定ではない。従って、

0モード以外のモードのうちの一つ ($\alpha = 2$) の固有値 λ_2 は r_{n+1} より下では負であるが r_{n+1} で0にならなければならない。他の固有値 ($\alpha = 3, \dots, N$) は r_{n+1} では負のままである (有限の負とする)。以下では各転移点で転移が連続的だと仮定して $r \gtrsim r_{n+1}$ での新しい状態を摂動論を用いて議論しよう。

不安定点 r_{n+1} での周期運動 $\mathbf{X}_n(t)$

$$\dot{\mathbf{X}}_n(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n(t); r_{n+1}) \quad (7)$$

に従う。ただし、 r_{n+1} では λ_2 は0となるので任意の初期条件から出発したとき、周期軌道におち入るには無限の時間がかかる。この意味で $\mathbf{X}_n(t)$ を定義するのは簡単ではないが、ここでは次の極限軌道として $\mathbf{X}_n(t)$ は定義されていると解釈されるべきものである。

$$\{\mathbf{X}_n\} = \lim_{r \rightarrow r_{n+1}^-} \lim_{t \rightarrow \infty} \{\mathbf{X}(t)\}_r \quad (8)$$

ここで $\{\mathbf{X}(t)\}_r$ はパラメータ r での周期軌道を表わす。

r_{n+1} よりわずかに上の r での解 $\mathbf{X}(t)$ は次の形に求まるとする。

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_n(\phi_n) + \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha(t) \hat{Q}_n(\phi_n) | \alpha \rangle_n \quad (9)$$

ここで $\phi_n(t) = 2\Omega(r)(t+t_0)/\Omega(r_{n+1})$ で $\hat{Q}_n(t) \equiv \lim_{r \rightarrow r_{n+1}^-} \hat{Q}(t, r)$ は周期 $T(r_{n+1})$ の周期関数、 $| \alpha \rangle_n \equiv \lim_{r \rightarrow r_{n+1}^-} | \alpha, r \rangle$ である。 $\Omega(r)$ は新しい運動の正確な特性振動数で、今の場合 $\Omega(r) = 2^{-1}\Omega(r_{n+1})(1 + \zeta_n(r))$ である。 $\zeta_n(r)$ は $r \rightarrow r_{n+1}^+$ で0にならなければならないので、

$$\zeta_n(r) = \beta_n (r - r_{n+1}) + O((r - r_{n+1})^2), \quad (10)$$

と展開できるだろう。(9)で x_α は古い周期軌道 \mathbf{X}_n からのずれを表わし、 t_0 はこのずれが常に微少であることを保障する定数であるが、今の場合一般性を失わず初期条件を適当に選ぶことによって0とおける。 $r = r_{n+1} + \varepsilon^2 \Delta_{n+1}$ とおこう。ここで $\varepsilon (> 0)$ は $0 < \varepsilon < 1$ を満し、 r_{n+1} からのずれを測る量である。(9)を(1)に代入することにより、次式を得る。

$$\dot{x}_\alpha = \varepsilon^2 \Delta_{n+1} r_\alpha^{[n]}(\phi_n) + \lambda_\alpha^{[n]} x_\alpha + \sum_{\beta, r} \theta_{\beta r}^{[n]\alpha}(\phi_n) x_\beta x_r + O(\varepsilon^2 \Delta_{n+1} x, x^3), \quad (11)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, N,$$

$$r_\alpha^{[n]}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha | \hat{Q}_n^{-1}(\phi) [\mathbf{F}'(\mathbf{X}_n(\phi); r_{n+1}) - \beta_n \dot{\mathbf{X}}_n(\phi)] \quad (12)$$

$$\theta_{\beta r}^{[n]\alpha}(\phi) = 2^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha | \hat{Q}_n^{-1}(\phi) [(\partial^2 / \partial x_\beta \partial x_r) \mathbf{N}(\mathbf{X}_n(\phi); \hat{Q}_n(\phi) \mathbf{x})]_{\mathbf{x}=0},$$

藤坂博一

および $F'(X; r) \equiv \partial F(X; r) / \partial r$ 。 N は $F(X_n + \sum_{\alpha} x_{\alpha} \hat{Q}_n | \alpha >_n; r_{n+1})$ を x で展開したときの非線型項であり、 $\lambda_{\alpha}^{[n]}$ は r_{n+1} での Floquet 指数で $\alpha = 1, 2$ に対して 0 となる。

§ 3. 相似則と Floquet 指数

$\alpha = 1, 2$ に対して $x_{\alpha}(t) = \varepsilon \Delta_n^{1/2} \xi_{\alpha}$ ， それ以外は $x_{\beta} \sim \varepsilon^2 \Delta_n \xi_{\beta}$ ， ($\beta = 3, \dots, N$) と仮定しよう。ここで ξ_{α} ， $\xi_{\beta} = O(\Delta_n^0)$ である。 $r_{\alpha}^{[n]}$ や $\theta_{\beta r}^{[n]\alpha}$ は周期 $T(r_{n+1})$ の周期関数なので、 $\tau = \phi_n / T(r_{n+1}) (= 2t / T(r))$ としたとき、

$$\Gamma_{\alpha}^{[n]}(\tau) \equiv r_{\alpha}^{[n]}(\phi_n), \quad \Theta_{\beta r}^{[n]\alpha}(\tau) \equiv \theta_{\beta r}^{[n]\alpha}(\phi_n) \quad (13)$$

によって定義された Γ ， Θ は τ に関して周期 1 の周期関数である。これらを用いて、各 τ で $\xi_{\alpha}(\tau)$ は $O(\Delta_n^0)$ の量であることを要求することにより、

$$\nu = \frac{1}{2} \quad \text{即ち} \quad \delta = 4 \quad (14)$$

を得る。このようにして、最終的な運動方程式は

$$\frac{d}{d\tau} \xi_{\alpha}(\tau) = \frac{1}{2} k_n \varepsilon \left\{ \tilde{\delta}_n^{-1} \Gamma_{\alpha}^{[n]}(\tau) + \sum_{\beta, r=1}^2 \Theta_{\beta r}^{[n]\alpha}(\tau) \xi_{\beta}(\tau) \xi_r(\tau) \right\}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (15)$$

$$\xi_{\beta}(\tau) = -\lambda_{\beta}^{[n]-1} \left\{ \tilde{\delta}_n^{-1} \Gamma_{\beta}^{[n]}(\tau) + \sum_{r, \delta=1}^2 \Theta_{r\delta}^{[n]\beta}(\tau) \xi_r(\tau) \xi_{\delta}(\tau) \right\}, \quad \beta = 3, \dots, N, \quad (16)$$

となる。ここで $\tilde{\delta}_n \equiv \Delta_n / \Delta_{n+1}$ で k_n は $T(r_{n+1}) \equiv k_n \Delta_n^{\nu}$ で定義した。(16) を導びくのに断熱近似の条件

$$|\operatorname{Re} \lambda_{\beta}^{[n]}| \gg 1/T_f, \quad \beta = 3, \dots, N \quad (17)$$

を仮定した。(15) に関して。これらの解は $\tau \rightarrow \infty$ で有界で周期解を持つとする。明らかにこの周期 τ_p は整数値でなければならない。なぜなら係数 Γ_{α} ， $\Theta_{\alpha\beta}$ は周期 1 の周期関数であるから。更に、我々は今、熊手型の分岐を議論しているので $\tau_p = 2$ と仮定する。即ち(15) は τ に関して周期 2 の周期関数とする。このようにして r_{n+1} よりわずかに上での古い軌道からのずれ x_{α} は

$$x_{\alpha}(t) \cong \Delta_n^{1/2} \Xi_{\alpha}^{[n]}(p_n \Delta_n^{1/2} t) \quad (18)$$

なる相似形に書くことが出来る。ここで p_n は $O(1)$ の定数である。上式で x_{α} は n に依存しており、この意味で熊手型の連続転移の各転移点で時間および場をスケールすることによって n 依存性を完全に消去することはできない。勿論この依存性は非特異的であり、 δ や ν の計算に

は関与しない。

一方, $r > r_{n+1}$ での Floquet 指数は

$$\hat{A}(r) = \frac{1}{T(r)} \ln \exp_+ \left[\int_0^{T(r)} \hat{G}(\mathbf{X}(s); r) ds \right] \quad (19)$$

によって定義される行列の固有値として与えられる。ここで $\mathbf{X}(t)$ は(9)の $t \rightarrow \infty$ での解である。摂動論を用いて $\hat{A}(r)$ は次のように展開できる。

$$\hat{A}(r) = \hat{A}(r_{n+1}) + \varepsilon \Delta_{n+1}^{1/2} \hat{A}' \quad (20)$$

ここで \hat{A}' はある定数行列である。新しい運動は(15)で τ に関して周期 2 の周期運動であることから、一つの Floquet 指数 ($\alpha = 1$) は 0 でなければならない。更にこの周期運動は安定であるから他の指数はすべて負でなければならない。これらのことにより, $A'_{11} A'_{22} = A'_{12} A'_{21}$ ($A'_{\alpha\beta}$ は \hat{A}' の $\alpha\beta$ 成分) が成立し, $\varepsilon \Delta_n^{1/2}$ に関して一次のオーダーで

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -f_n \sqrt{r - r_{n+1}} \quad (21)$$

を得る。ここで $f_n = -(A'_{11} + A'_{22}) (> 0)$ で他の固有値は $\lambda_\alpha \simeq \lambda_\alpha^{[n]} + O(\sqrt{r - r_{n+1}})$ ($\alpha = 3, \dots, N$) となる。

§ 4. おわりに

微分方程式系の熊手型分岐を摂動論を用いて調べた。非自律系の運動方程式でも本稿と同様な取り扱いができ, $\delta = 4$ が得られる。本稿の結果 $\delta = 4$, $\nu = 1/2$ は実験値 $\delta_{\text{exp}} = 4.669 \dots$, $\nu_{\text{exp}} = 0.4498 \dots$ と比べるとそれ程よい値とは言えないが, Feigenbaum 分岐の普遍的性質を微分方程式を用いて調べる足がかりの一つにでもなれば幸いである。

感 謝

本稿のアイデアは著者が九州大学物理教室にいたとき抱いたものである。有意義な議論をしていただいた森肇先生はじめ研究室の諸氏に謝意を表したい。

文 献

- 1) M.J. Feigenbaum, Comm. Math. Phys. 77 (1980), 65.
V. Franceschini, J. Stat. Phys. 22 (1980), 397.
- 2) B.A. Huberman and J. Rudnick, Phys. Rev. Lett. 45 (1980), 154.
- 3) S. Thomae and S. Grossmann, Preprint (Correlations and Spectra of Periodic chaos Generated by the Logistic Parabola: J. Stat. Phys. に掲載予定)