物性研究 36−6(1981−9)

本多の磁気理論と，わが国における Weiss 理論の受容の過程 V

─ 聞書きにもとづく物性物理学史(3) ─

信州大・理　勝木　渥

(1981年8月20日受理)

(承前)[214)]

本多の弟子たちがどのように本多理論にかかわり，またどのようにそこから脱却していったか，その過程をしらべることを，まず広根の仕事を追うことからはじめたい。

宮原はかつて広根を，強磁性の Heisenberg 理論に若干の修正を加えた広根−彦坂の論文[215)]にふれつつ，本多スクールに内包されていた変異遺伝子とみなした[216,217)]。 これに対する河宮の批判[218)]にこたえて，広根についてさらに「広根氏は理研(傍点は宮原による)本多研究室の研究員として，金研内の本多名誉教授室の一隅に机をおいて，主として理論的な研究にたずさわっておられた。30年代の同氏の仕事には2つの型があると思う。一つは本多の研究の数理的計算の担当者として，本多のアイディアをそのまま計算にうつす仕事であり，他は氏の独自ないわば自由な仕事であった。……要するに，本多の弟子たちの中で広根，茅氏らはWeiss理論の受容に屈折があったとは思われず，　ためらうことなく Heisenberg への道をすすんだものと思われる[219)]。」と述べた。そこで，以下の考察では，広根の“自由な仕事”とみなしても異論は生じないであろうと思われる4論文，すなわち1931年の広根−彦坂の強磁性理論の論文[222)]，1934年の広根単名の強磁性理論についての若干の問題を論じた論文[226)]，1935年の広根単名の強磁性体の電気抵抗異常についての理論の論文[227,228)]および1937−8年のニッケルおよびニッケルを主成分とする二，三の合金の磁性についての論文[229,230)]をとりあげ，それらを詳しく検討しながら，広根の強磁性についての考えの展開のあとを追うことにしたい。

さて，まず広根−彦坂の論文であるが，実はこれを本当に分ろうと思ったら，Heisenberg の強磁性の論文[231)]をちゃんと読んでおかなくてはならない，すなわち，いわゆるHeisenberg Hamiltonian を用いた議論ではなく，Heisenberg の原論文の群論にもとづくかなりごたごたした議論[232)]に即して Heisenberg のやったことを理解しておかなくてはならない。　広根

KATSUKI, Atsushi

－彦坂はこの Heisenberg の論文を下敷きにし，Heisenberg の議論のすじ道に沿って彼らの議論を展開しているからである。私の経験に即して考えるに[234]，Heisenberg の強磁性理論を Heisenberg の原論文に即して勉強したことのある人は，昭和生まれではほとんどいないのではあるまいか。少くとも昭和２桁生まれでは皆無だと断言して間違いはないと思われる。したがって，Heisenberg がかれの強磁性の論文で展開した議論の筋道をここで辿ってみておくこともまんざら無益ではあるまい。

Heisenberg がやったことは，その前年に Heitler と London[240] が水素分子（２原子２電子系）の結合力の解明のために導入して成功した交換相互作用を考慮に入れて $2n$ 原子 $2n$ 電子系を取扱い，そのことによって Weiss の分子場を量子力学的交換相互作用に帰着せしめたことであった（ここまでは誰でも知っている）。では，Heisenberg は，具体的にはどのような議論を展開したのであろうか。彼は $2n$ 個の原子が各々１個ずつの電子をもっていて結局 $2n$ 個の電子があるような系を考察する。彼は非摂動状態として各原子が１個の価電子をもった状態を想定し，電子間，原子間，および電子－原子間のクーロン相互作用を摂動としてとり，摂動エネルギーの交換項とクーロン項の積分表式を与える。ついで，強磁性の統計的取扱いは全スピン量子数 s の任意のある与えられた値に属するすべてのエネルギー値が計算されれば可能だが実際にはそのような計算が不可能だから，全スピン量子数の値が s であるような多重項の数と，そのような多重項のエネルギーの平均値と平均２乗偏差とを計算しようと述べて計算にとりかかる。彼は，Wigner，Hund，Heitler らの先行する仕事[241] を援用しつつ，全スピン量子数が s であるような多重項の数は

$$f_\sigma = (2n)!(2s+1)/(n-s)!(n+s+1)!$$

であることを示し[242]，このような多重項の集合を“ある多重度をもった項の系（Termsystem)” σ と名付ける[243]。ここで群論をもちこみ，Heitler を引用しつつ，エネルギー値を与える永年方程式から，項の系 σ におけるエネルギー平均値 E_σ が

$$E_\sigma = \frac{1}{f_\sigma}\sum_{P} \chi_\sigma^{\mathrm{P}} J_{\mathrm{P}}\ , \qquad (\mathrm{H}\cdot 5)^{244)}$$

エネルギーの平均２乗偏差 $\overline{\Delta E_\sigma^2}$ が

$$\overline{\Delta E_\sigma^2} = \frac{1}{f_\sigma^2}\sum_{PP'} (\chi_\sigma^{\mathrm{E}} \chi_\sigma^{\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}'} - \chi_\sigma^{\mathrm{P}} \chi_\sigma^{\mathrm{P}'}) J_{\mathrm{P}} J_{\mathrm{P}'}, \qquad (\mathrm{H}\cdot 12)$$

で与えられることを示す。ここで χ_σ^{P} は置換 P に対する群の指標であり，J_{P} は電子の置換 P に対する“置換積分”[245] である。χ_σ^{E}（E：恒等置換）は f_σ に等しく，J_{P} は恒等置換と互換以外

の P に対しては 0 となる。J_P のこの性質から (H・12) における P，P' は E と互換だけをとればよく，従って $\chi_\sigma^{P\cdot P'}$ としては χ_σ^{E}，$\chi_\sigma^{(12)}$，$\chi_\sigma^{(123)}$，$\chi_\sigma^{(12)(34)}$ の型のものだけをとればよい。これらの指標の値は Heitler の"刈込み"法 (Methode Schurs) で計算できるとして，それらの表式を (H・13) 式として与える (この式をここに示すことは省略する)。ここまでの計算には模型の設定はあるが近似はない。これから先に次のような近似をやる。すなわち，① J_E および最近接原子間の電子の変換に対する J_P だけが 0 にならずに残るとし，② n，$s \gg 1$ として (H・13) 式に与えた χ_σ^{P} の表式において n，s の最高次の項だけを残す[246]。①, ② の近似の結果，最近接原子数を z として，

$$E_\sigma = -z\frac{s^2+n^2}{2n}J_0 + J_E \tag{H・14}$$

および

$$\overline{\Delta E_\sigma^2} = J_0^2 z\frac{(n^2-s^2)(3n^2-s^2)}{4n^3} \tag{H・17}$$

が得られる。ここで J_0 は最近接原子間の電子の交換に対する J_P がすべて同じ値をもつとした，その値である。

以上のようなエネルギーの平均値と平均２乗偏差をもつ系を統計力学的に扱おうとするわけであるが，まず，項の系 σ においてエネルギーの値が $E_\sigma + \Delta E$ と $E_\sigma + \Delta E + d\Delta E$ との間にあるような項の数が

$$\frac{f_\sigma}{\sqrt{2\pi\overline{\Delta E_\sigma^2}}}\, e^{-\frac{\Delta E^2}{2\overline{\Delta E_\sigma^2}}}\, d\Delta E$$

であると仮定する。つまり E_σ と $\overline{\Delta E_\sigma^2}$ が群論的考察から求まったので，この E_σ と $\overline{\Delta E_\sigma^2}$ を与えるようなガウス分布を仮定するのである。「Heisenberg の結果は多重項のエネルギーのガウス分布を仮定したために，小さな s の値をもつ項で無限に低いエネルギーをもつものがあることになり，そのために低温では正しくない結果を与える」ということがよく言われるが，そしてそれを聞くと「Heisenberg のような偉い人がそんな不合理な結果を与えるようなガウス分布をなぜ仮定したのだろう」と不思議に思えるが，それは，平均値と平均２乗偏差をまず群論的考察によって定めたのでそれらのみによって特徴づけることができる分布，すなわちガウス分布を用いることにしたためである。もっとちゃんとした近似のためには，$\overline{\Delta E_\sigma^3}$，$\overline{\Delta E_\sigma^4}$ 等々を計算し，それに対応する分布関数を作るべきだと Heisenberg 自身がこの論文の中で述べている[247]。

さて，ここで考えてきた系が外部磁場Hのもとにあるとき

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\mu_B H}{kT} \quad {}^{248)} \\ \beta &= \frac{zJ_0}{kT} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{H}\cdot 19)$$

とおいて，状態和Sは

$$\sum_{s=0}^{n} \sum_{m=-s}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta E \frac{f_\sigma}{\sqrt{2\pi\overline{\Delta E_\sigma^2}}} \mathrm{e}^{\alpha m + \beta\frac{s^2}{2n} - \frac{\Delta E}{kT} - \frac{\Delta E^2}{2\overline{\Delta E_\sigma^2}}}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{m=-s}^{s} f_\sigma \, \mathrm{e}^{\alpha m + \beta\frac{s^2}{2n} + \frac{\overline{\Delta E_\sigma^2}}{2k^2T^2}}$$

で与えられるが，αによらない因子を無視すれば

$$S = \sum_{s=0}^{n} \sum_{m=-s}^{s} f_\sigma \, \mathrm{e}^{\alpha m + \beta\frac{s^2}{2n} - \beta^2\frac{s^2(4n^2-s^2)}{8n^3 z}} \qquad (\mathrm{H}\cdot 20)$$

と書ける。ここで $\mathrm{e}^{\beta\frac{s^2}{2n} - \beta^2\frac{s^2(4n^2-s^2)}{8n^3 z}}$ を $g(s)$ とかき，$f_\sigma = \binom{2n}{n+s} - \binom{2n}{n+s+1}$ であることを考慮すれば，和の順序を入れかえて

$$S = \sum_{m=-n}^{n} \sum_{s=|m|}^{n} \mathrm{e}^{\alpha m} g(s) \left[\binom{2n}{n+s} - \binom{2n}{n+s+1} \right] \qquad (\mathrm{H}\cdot 20\mathrm{a})^{249)}$$

を得るが，部分積分に似た変形によって[250)]

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \sum_{m=-n}^{+n} \mathrm{e}^{\alpha m} g(m) \binom{2n}{n+m} + \sum_{s=0}^{n} \sum_{m=-s}^{s} \mathrm{e}^{\alpha m} (g(s+1) - g(s)) \binom{2n}{n+s+1} \end{aligned} \qquad (\mathrm{H}\cdot 20\mathrm{b})$$

$$S_1 = \sum_{m=-n}^{+n} \mathrm{e}^{\alpha m} g(m) \binom{2n}{n+m} \qquad (\mathrm{H}\cdot 20\mathrm{c})$$

$$S_2 = \sum_{s=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(s+1)} - \mathrm{e}^{-\alpha s}}{\mathrm{e}^{\alpha} - 1} \cdot (g(s+1) - g(s)) \binom{2n}{n+s+1} \qquad (\mathrm{H}\cdot 20\mathrm{d})$$

を得る。(H・20d)のS_2の式はmについての和を実行したあとのものである。HeisenbergはこのS_2について“$g(s)$はsの偶関数だから，この論文で一貫して用いる近似では，S_2の表式の中で$\mathrm{e}^{-\alpha s}$を含む項を取除きその代りに和を$s=-n$から$s=+n$まで拡げることがで

きる。そうすると大きさ1の程度の因子は別にして，S_2もまたS_1の形をもつ（もしS_2における和をとる添字sをmと書きかえれば）ことが分かる”[252]と述べて，結局状態和として

$$S = F \sum_{m=-n}^{+n} \mathrm{e}^{\alpha m}\, g(m) \binom{2n}{n+m} \qquad (\mathrm{H}\cdot 21)$$

という表式を与える。ここではFはαとβの関数でその大きさは1の程度である。（H・21）式で，状態和がmについての和の形で与えられていることに特に注目しておきたい。それはHeisenbergの強磁性理論がWeissの自発磁化の存在，すなわち磁場のかかっていない場合でも（より正確には，外部磁場0の極限で）有限の磁化が存在することと結びつくのは，状態和を（H・21）式のように全スピン磁気量子数mについての和の形に（全スピン量子数sについての和の形にではなく）あらわしたためであるからである。Heisenberg理論がWeissの自発磁化と結びつくのは（H・21）式によってであることの指摘はこれまで誰によってもなされていなかったと思うので，この意味での（H・21）式の重要性をここで指摘しておきたい。とはいえ私には，（H・21）式を導出する際のHeisenbergの計算は何だか軽業（かるわざ）のように見える。予知したあるべき結果（H・21）を導くために（あるいは状態和がS_1だけであったら好ましい結論が得られることを知って，余分の項S_2を事実上消しさるために），巧妙なトリックを用いたものというように見える。状態和をsについての和にあらわすかmについての和にあらわすかが，Weissの意味での自発磁化が出るか出ないかの分れ道になっていることが，あとで広根−彦坂の論文を論ずる時にわかるであろう。S_2はもともと0からnまでのsについての和としてあらわされていた（（H・20d）式を見よ）。これをsについての$-n$からnまでの和に書きかえ，ついで文字sの代りに文字mを使うことにして，そのことによってもともとは全スピン量子数sについての和であったものを全スピン磁気量子数mについての和ででもあるかのように物理的内容を変更する（すでに（H・20d）式がmについての和をとったあとのものであるのに！），そこの所がどうもすんなりとは私にはのみこめない[253]。ともかく以下では，（H・21）式に基づいたHeisenbergの議論をすすめよう。（H・21）式におけるSへの寄与は$m=m_0$（$m_0 \approx m$の平均値）で鋭い極大をもつとして$m=m_0+(m-m_0)$とおき，$g(m)$の指数を（$m-m_0$）の巾で展開して（$m-m_0$）の1次までとれば

$$g(m) \approx \mathrm{e}^{\beta \frac{m_0^2}{2n} + \beta \frac{m_0}{n}(m-m_0) - \frac{\beta^2}{8n^3 z}\{4m_0^2 n^2 - m_0^4 + 8m_0 n^2 (m-m_0) - 4m_0^3 (m-m_0)\}}$$

となり，これを用いて状態和Sは，αによらない因子を別にして

$$S = F \sum_{m=-n}^{n} e^{\left(\alpha+\beta\frac{m_0}{n}-\beta^2\frac{m_0}{nz}+\beta^2\frac{m_0^3}{2n^3z}\right)m} \binom{2n}{n+m}$$

$$= F\left[2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta\frac{m_0}{n}-\beta^2\frac{m_0}{nz}+\beta^2\frac{m_0^3}{2n^3z}}{2}\right)\right]^{2n} \qquad (\mathrm{H}\cdot 22\mathrm{a})$$

となり，これから最確値 m_0 が

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log S = n\tanh\left(\frac{\alpha+\beta\frac{m_0}{n}-\beta^2\frac{m_0}{nz}+\beta^2\frac{m_0^3}{2n^3z}}{2}\right) \qquad (\mathrm{H}\cdot 22)$$

と得られる（ $\log F$ の微分から出てくる項は n に対して無視される）。この（H・22）式が強磁性に対する Weiss の周知の式と本質的に同じであることを，Weiss の式における $\coth x - \frac{1}{x}$ の代りに $\tanh x$ があらわれるのは外場のもとで１個のスピンモーメントが２つの方向にしか向けないためだとことわりつつ，Heisenberg は指摘している。ついで

$$\frac{m_0}{n} = y, \quad \alpha+\beta\frac{m_0}{n}-\beta^2\frac{m_0}{nz}+\beta^2\frac{m_0^3}{2n^3z} = 2x \qquad (\mathrm{H}\cdot 23)$$

とおき，その解を

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}. & y = \tanh x \\ \text{と} & \\ \mathrm{II}. & 2x = \alpha + y\left(\beta - \frac{\beta^2}{z}\right) + \frac{\beta^2}{2z}y^3 \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{H}\cdot 24)$$

のグラフの交点を求めることによって得る。これから強磁性出現条件として

$$\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right) \geqq 2 \qquad (\mathrm{H}\cdot 25)$$

を得，β の関数としての（H・25）の左辺の極大値は $\beta = z/2$ のときに得られてそれが $\frac{z}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$ に等しいことから

$$z \geqq 8 \qquad (\mathrm{H}\cdot 26)$$

を得て，“このことから強磁性は一原子が少なくとも８個の隣接原子をもつような型の格子に対してのみ可能である”と結論する。（H・25）で等号をとってこのときの β を β_c とかけば $\beta_c = \frac{z}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{8}{z}}\right)$ を得るが，複号の負を選んで，これから臨界温度（Heisenberg は Curie 温度とはいわず，kritische Temperatur といっている）Θ として（$\beta_c = zJ_0/k\Theta$）

$$\Theta=\frac{2J_0}{k\left(1-\sqrt{1-\frac{8}{z}}\right)}$$

を得ている。また $\beta>\frac{z}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{z}}\right)$ つまり低温ではかえって強磁性が消失することになっているのは物理的には無意味で，これはエネルギー値の分布としてガウス分布を仮定したことに由来するとして，エネルギーの 3 次，4 次およびさらに高次の偏差を算出してそれに合うような項の系のエネルギー分布曲線を作ってやることによって理論を改良すべきだという方向を示唆している[254]。さらに $T>\Theta$ かつ $\alpha\ll 1$ の場合に $\tanh x$ を x の巾級数に展開して，Weiss 理論におけると同様，修正された Curie 則

$$m_0\propto\frac{1}{T-\Theta}\,\frac{T}{T\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{z}}\right)-\Theta\left(1-\sqrt{1-\frac{8}{z}}\right)}$$

を得ている[258]。

そのあと，状態和（H・21）の項が $m=m_0$ で非常に鋭い極大をもつことを m の m_0 のまわりの平均 2 乗偏差を論ずることによって立証し，ついで J_0 の大きさと符号について論じて J_0 の大きさが Fe，Ni，Co の臨界温度から期待される程度の大きさであることを指摘し，また $J_0>0$ となるのは主量子数が 3 以上になる場合であろうと結論する。

以上が Heisenberg の原論文に即しての Heisenberg 理論の骨子であるが，Heisenberg が状態和 S を全スピン磁気量子数 m についての和の形で与えているということに重ねて注意を喚起しておきたい。

この Heisenberg の強磁性理論に部分的な修正を加えた広根－彦坂の論文が書かれるのは 1931 年 8 月であるが，かれらの論文以前にヨーロッパでは（そして日本でも）数編の論文が Heisenberg 理論に関連して書かれていた。広根－彦坂の論文に立ち入る前にこれらの論文に目を通しておくことが，広根－彦坂の論文に対するより深い理解のためには望ましいであろう。それら諸論文の発信・受理・刊行の日付と掲載誌名・著者名を一覧表にまとめると第 1 表のようになる。これらについて，順に簡単な説明を加えることにしたい。

読者は，一見 Heisenberg の強磁性理論とは無縁にみえる Bloch の結晶内電子の論文[259]が Heisenberg の論文についでこの表の 2 番目にあげられていることに，奇異の念をいだくかも知れない。しかし，その出生の経緯からみて，Heisenberg の強磁性理論と Bloch の結晶内電子の理論とは，互いに双子の片割れ同士なのである。Hoddeson によれば Bloch こそは Heisenberg の最初の学生であった。Heisenberg は Bloch に強磁性の起源と金属の理論

第1表　Heisenbergの強磁性の論文と，1931年までに書かれた関連論文

発　信	受　理	刊　行	誌名・巻・頁	著　　者	文献番号
	'28. 5. 20	'28. 7. 16	Z. Phys. 49 619	Heisenberg	231
'28. 6. 25	'28. 8. 10	'28. 12. 17	Z. Phys. 52 555	Bloch（結晶内電子）	259
'28. 12. 31	'29. 2. 4	'29. 4. 4	Z. Phys. 54 277	Dorfman-Jaanus	268
〃	〃	〃	Z. Phys. 54 289	Dorfman-Kikoin	270
	'29. 3. 8	'29. 5. 2	Proc. Roy. Soc. A 124 1	Fowler-Kapitza	290
	'29. 3. 12	'29. 4. 6	Proc. Roy. Soc. A 123 714	Dirac	233
'29. 6. 10	'29. 6. 21	'29. 9. 10	Z. Phys. 57 545	Bloch（自由電子の強磁性）	282
'29. 7.		'29.	Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ 18 409	本多－大久保－広根	223
'30. 1. 28	'30. 2. 1	'30. 3. 29	Z. Phys. 61 206	Bloch（スピン波）	294
'30. 3.		'30. 7.	Phil. Mag. 10 27	Stoner	272
	'30. 5. 8	'30. 7. 7	Z. Phys. 63 141	本多	326
		'30	Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 19 745	本多	182
'31. 2.	'31. 5. 7	'31. 7. 6	Z. Phys. 70 395	Bloch-Gentile（異方性）	309
'31. 8. 4	'31. 8. 21	'31. 11. 24	Z. Phys. 73 62	広根－彦坂	215
	'31. 9. 14	'32. 2. 16	Z. Phys. 74 295	Bloch（磁壁）	295

との2つの課題（いずれも量子力学的研究）を提示し，その1つを選ぶことをBloch に求めたという。Blochは金属の理論をえらび，さればとHeisenberg は強磁性の問題を自らの課題とした。このような経緯で生まれたのがHeisenbergの強磁性理論の論文とBlochの結晶内電子の論文だったのである[260]。

Blochは，この論文の序論で量子力学的金属電子論の発展を，Fermi[264]を適用したPauli[265]，Sommerfeld[266]，Houston[267]らの自由電子模型の展開を簡単に辿ることによって，およびHeisenbergの強磁性理論を自由電子模型とは逆の極限すなわち束縛電子模型で分子場の説明を与えたものとみることによって，一瞥し，ついで，上記2つの取扱い方の中間にたつような立場，すなわち結晶と同じ周期をもつ力の場における電子の運動を論ずる立場に立たなければならないとの態度表明をしている。金属電子論の流れの中でこのBloch 理論の位置づけについてはHoddeson と Baym によって詳しくかつ興味深く（たとえばBlochがBloch関数をえたとき，それが平面波の周期的変調というあまりにも簡単なものだったので，Blochはそれを

大事な発見だとは思わなかった，ところがそれを Heisenberg に見せたとき，Heisenberg は正しくもこう言った：“それだッ！”，というような挿話をも数多くまじえつつ）論じている[262]ので，ここでこれ以上は論じない。

1928年の暮にレニングラードから発せられた Dorfman と Jaanus の論文[268]は，強磁性における伝導電子の役割を実験的に明らかにしようとするものであった。彼らは「Heisenberg は１つの強磁性理論の建設を試み，強磁性を種々の原子に結びついた電子の協力作用とみなしたが，彼はそこでいささか分明ならざる仕方でこの束縛電子を伝導電子と同一視している」と批判し，「今や強磁性の真の起源についての問題は素磁石の問題に帰せられる」，素磁石が電子軌道ではなく電子スピンであることは磁気－力学的異常やレントゲン写真的研究から明白であるが，これだけでは主要問題が解けたとはいえない，「この“スピン”がどこに位置するのか，金属イオンに束縛されているのか，それとも伝導電子として遍歴するのか，あるいは両種の電子が同時にこの役を演ずるのか？」という重大な問題がのこっている，と問題提起をし，実験的にこれへの解答を与えようとした。彼らは，Weiss たちによって実験的にも確証されたように，Weiss 理論によれば Curie 点（彼らは Curie 点，Curiepunkt という用語を用いている）で比熱のとびが存在することに着目し，この比熱のとびがイオンからの寄与と伝導電からの寄与とから成っているとして，後者の寄与を評価する実験的な方法を考案することによって，強磁性への伝導電子の寄与を評価しようとしたのである。

彼らは，Curie 点 θ での原子あたりの比熱のとびを $\Delta_\theta c_\mathrm{a}$ と書けば（$\Delta_\theta c_\mathrm{a}$ はすでに Weiss学派によって熱量測定によって与えられている[269]），イオンあたりのそれを $\Delta_\theta c_\mathrm{i}$，伝導電子１個あたりのそれを $\Delta_\theta c_\varepsilon$ として，次式のように与えられると仮定してよいだろうとした。すなわち，

$$\Delta_\theta c_\mathrm{a} = \Delta_\theta c_\mathrm{i} + n \Delta_\theta c_\varepsilon,$$

ただし，n は１原子あたりの伝導電子数で，Curie 点での突然の変化はないとする。彼らは，熱起電力の測定から $\Delta_\theta c_\varepsilon$ を評価しようとした。金属AとBとで熱電対をつくり，その接合部の温度を T_1 と T_2 だとする。伝導電子の荷電を e，A，B内での伝導電子の比熱を $c_{\varepsilon \mathrm{A}}$，$c_{\varepsilon \mathrm{B}}$，熱起電力を E とすれば，Thomson 効果の理論により関係

$$eT \frac{d^2E}{dT^2} = c_{\varepsilon \mathrm{A}} - c_{\varepsilon \mathrm{B}}$$

が成立つ（$T = (T_1 + T_2)/2$）。ここでAを Curie 点 θ をもつ強磁性金属（たとえば Ni），Bを非強磁性金属（たとえば Cu）とすると，もし $c_{\varepsilon \mathrm{A}}$ が θ で $\Delta_\theta c_{\varepsilon \mathrm{A}}$ だけ突然変化するなら

$\left| eT \dfrac{d^2E}{dT^2} \right|_{T=\theta}$ も　$\Delta_\theta [eT \dfrac{d^2E}{dT^2}]$ だけ変化するが，その間には

$$\Delta_\theta \left[eT \frac{d^2E}{dT^2} \right] = \Delta_\theta c_\varepsilon$$

という関係があるというわけだ。つまりCurie点での熱起電力の変化をしらべることによって $\Delta_\theta c_\varepsilon$ が分ることになる。2種類のNi試料a，bに対して，このようにして調べたCurie点とそこでの比熱のとびは次の通りであった，

Ni (a)　$\theta = 359.5℃ = 632.5\,K$；$\Delta_\theta c_\varepsilon = 4.8 \times 10^{-24}$ cal / deg

Ni (b)　$\theta = 356.5℃ = 629.5\,K$；$\Delta_\theta c_\varepsilon = 4.7 \times 10^{-24}$ cal / deg

他方 $\Delta_\theta c_a$ はWeiss学派によって熱量測定から

Ni (b)　$\Delta_\theta c_a = 3.65 \times 10^{-24}$ cal / deg

Ni (別の試料)　$\Delta_\theta c_a = 3.87 \times 10^{-24}$ cal / deg

と与えられている[269)]。見ればすぐ分るように $\Delta_\theta c_\varepsilon$ の方が $\Delta_\theta c_a$ より大きい。$\Delta_\theta c_\varepsilon$ の測定精度は約8％だ(これは，誤差約8％のつもりであろう)とDorfmanら自身が言っており，熱量測定の精度はもっと高い。したがって $\Delta_\theta c_a < \Delta_\theta c_\varepsilon$ という結果は動かしがたい。他方

$$\Delta_\theta c_a = \Delta_\theta c_i + n \Delta_\theta c_\varepsilon$$

である。これらのことから，少くとも $\Delta_\theta c_\varepsilon$ は $\Delta_\theta c_a$ と同じ程度の大きさであり，さらに $n<1$ であると結論される。すなわち伝導電子の数は原子数よりいくらか小さい。またかなり大きな確率をもって $\Delta_\theta c_i = 0$ であり，それゆえ“強磁性的な性質に対して伝導電子だけが責任をもつ”すなわち“Niの素磁石は伝導電子に他ならない！”と彼らは結論する。

この論文につづくDorfmanとKikoinの論文[270)]は，第1論文でNiに対して得た実験結果から，理論的にいくつかの結論を導き出そうとするものであった。かれらは，第1論文で熱－電気的性質の異常から導いたNiの伝導電子1個あたりのCurie点における比熱のとびが，熱量測定によってWeissらによって得られた1原子あたりの比熱のとびとほぼ等しいことから，伝導電子がNiにおける素磁石の役割を演じているとまず考え，このことから伝導電子のスピンモーメントが1/2，すなわち伝導電子が1 Bohr磁子であること，およびNi金属の伝導電子数がCurie点で1原子あたり約0.79であることを導き出した。　前者の結論をかれらは次のようにして得た。すなわち，方向量子化を考慮すると素磁石あたりのCurie点での比熱のとび $\Delta_\theta c_m$ が

$$\Delta_\theta c_m = \frac{5}{2} k \frac{j(j+1)}{j^2+j+\frac{1}{2}} \quad {}^{271)}$$

で与えられ，この $\Delta_\theta c_m$ に第1論文で見出した $\Delta_\theta c_\varepsilon$ の値すなわち4.7または 4.8×10^{-24} cal/deg を入れると $j=0.465$ または0.482，平均して0.473を得るが，これは約5％の精度で（mit einer Genauigkeit von etwa 5％，日本語としては，5％の誤差で，と訳すのが正しいのであろうがあえて直訳しておく）$j=1/2$ だ，というわけである。さらに彼らは，他方周知のように $g=2$ であるから，1個の伝導電子の磁気モーメントの最大成分に対して Bohr 単位[273] M_B ではかって，$2\times0.473M_B=0.946M_B\cong1M_B$ という，理論的推測 $1M_B$ とよく一致する値が得られる，我々の知る限り金属中の伝導電子のスピンモーメントの絶対値を実験に得たのはこれが最初である，と述べている。続いて彼らは，原子あたりの伝導電子の数を次のようにして推定した。Dorfman-Jaanus の得た $\Delta_\theta c_\varepsilon$ の値（平均 4.75×10^{-24}）と Weiss-Forrer や Lapp の得た $\Delta_\theta c_a$ の値（平均 3.72×10^{-24} —— この平均値を出すとき Ni(b) に対する $\Delta_\theta c_a$ の値が第1論文に引いた 3.65×10^{-24} の値でなく 3.59×10^{-24} になっている。第1論文の数値が誤記または誤植か？）とを比べると，その不一致は測定誤差より大きく20％以上のちがいがある（$3.72/4.75=0.784$），したがって両者の違いは測定誤差ではなく，実際に存在するにちがいない。熱電気的測定で得た $\Delta_\theta c_\varepsilon$ は電子すなわち素磁石あたりの比熱のとびであり，熱量測定で得られた $\Delta_\theta c_a$ は原子あたりのそれである。素磁石（電子）の数 N_ε と原子の数 N_a とはちがっており，

$$\frac{\Delta_\theta c_a}{\Delta_\theta c_\varepsilon} = \frac{N_\varepsilon}{N_a} = n_\theta = 0.785$$

でなくてはならぬ。このようにして n_θ が評価されるが，念のため，別の方法でも n_θ を算して比較しておこう。磁気の温度変化の実験から熱量測定とは全く独立に n_θ を評価することができる。1モルあたりの磁化 σ の温度変化 $|d\sigma^2/dT|_{T=\theta}$ の表式は n_θ およびモル原子数，Curie 温度等の既知または測定可能の量を含み，したがって，$\sigma-T$ のデーターから n_θ が評価できる。こうやって得た n_θ の値は0.793で，前に得た値0.785と誤差の範囲内で一致している。この両者の平均0.79を Curie 点における原子あたりの伝導電子数とみなす。他方，Weiss の低温での磁化測定から $n_0=0.60$，Curie 点以上での磁化率測定から Curie-Weiss 則によって導いた Curie 定数より753Kと904Kの間で $n_T=0.842$ と評価される。つまり伝導電子数はこのような温度依存性を示す。

このような議論を展開しつつ，Dorfman と Kikoin は，強磁性に関して伝導電子が本質的

な役割を果しているのだと力説する。と同時に，もしそうだとすれば，強磁性理論は若干の困難に直面する，それは「“分子場”の存在に対しておそらく責任のある交換効果は……“自由”電子間には生じえない」からだ，「……それゆえ強磁性金属中の伝導電子は閉じていない量子軌道を運行すると仮定せねばならず，従って金属の Sommerfeld-Pauli の理論[275]はひとつの第1近似にすぎない」[276]と指摘する。そのあと，伝導電子を供出したのこりの Ni イオンの磁気的ふるまいについて若干の考察をし，また Fe に対する同様の実験的研究が進行中であり，そこからは Fe に対して原子あたりの伝導電子数が約3個であると推論されるが詳細は後日にゆずると，第3論文の予告をしている[283]。

要するに Dorfman-Jaanus-Kikoin の仕事は，Ni の熱－電気効果の Curie 点での異常に関する実験的研究に基づいて，伝導電子が強磁性に本質的な役割を果していることを立証し，そのことから，Heisenberg の強磁性理論は伝導電子の強磁性を扱ったものではないしまた自由電子においては交換効果が生じえないのだから，金属の伝導電子に関する理論としては，Heisenberg のそれも Sommerfeld-Pauli の自由電子論も何ら満足すべきものではないということを主張するものであった。

Bloch の自由電子の強磁性の論文は Dorfman たちのこのような Heisenberg 理論批判に対する回答としての意味をもつものであった[285]。すなわち Bloch は，Heisenberg はかれの計算の基礎に水素分子に対する Heitler-London 模型をおいたから磁性と電気伝導とは結びつかなかったが，最初から電気伝導を保証するような模型から出発しても Heisenberg の考えは本質的に成立つと主張して，実際に自由電子気体でそのことをやってみせるのである。Bloch にとってこのことが可能であるためには，自由電子の波動関数が前もって分っている必要があったが，それを Bloch はかれ自身の結晶内電子の論文[259]でなしとげていた。運動量の固有関数が平面波であり，自由粒子に対してはそれが Schrödinger 方程式の解でもあることは，Bloch 以前にも分っていたことであったろう[286]。しかし，そのことからは直ちには金属内自由電子の波動関数が平面波であるとは結論されなかった。論理的にはそうでありえたかも知れないが，少くとも歴史的にはそうではなかった。Bloch は周期場内電子の波動関数がそのポテンシャルの周期で変調された平面波であることを一般的に示すことによって，その1つの極限の場合として，自由電子のそれが平面波，すなわち全く当然にも自由粒子の波動関数であることを確かめえたのである。この波動関数を用いて，Bloch は，自由電子の強磁性の論文において交換積分を算出し，自由電子気体が自発的に磁化した場合の運動エネルギー（零点エネルギー）と交換エネルギーとを考慮することによって，自由電子気体がある臨界濃度より稀薄であるときに強磁性になりうることを示したのであった。Bloch は，ある金属が強磁性であるか

どうかを決めるのに零点エネルギーの問題も本質的な役割を演ずるのだ，また電気伝導にあずかる電子が強磁性を担うということもありうるのだ，ということをもってこの論文の結語としている。Bloch がこの論文で与えた自由電子の強磁性についての議論の大筋は，今日われわれが多くの成書で「自由電子の強磁性」の項目のもとにみることができるもの[287]とほぼ同様であるので，これ以上の説明はここで省略し，ただ副次的に次の3点だけを指摘しておきたい。

その第1は，この論文で Bloch が，全スピン量子数が s であるような多重項[288]の数が

$$f_s = \binom{2n}{n+s}\frac{2s+1}{n+s+1}$$

であることを，初歩的なやり方で群論的手段にはよらないで導き出すとわざわざことわった上で，導出してみせている点である。そのやり方は，私が Heisenberg の f_σ の表式に対して註 242 でその導出法を説明した，それと基本的に同じものであった。してみると，Heisenberg は私が註 242 で説明したのとは別のやり方で f_σ を導き出したのであるらしい[289]。

その第2は，Bloch と Slater との間にはかなり緊密な情報交換があったらしく，Bloch がこの論文の中で草稿で読んだ Slater の論文（おそらく Slater 行列式の論文[293]であろうと思われる）に与えられる方法，つまり Slater 行列式を用いて，電子の相互作用エネルギー $\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\frac{e^2}{r_{ij}}$ の平均値を $E - \sum_{\text{spin } r \,/\!/\, \text{spin } s} e^2 \int \frac{\phi_r(x_1)\phi_s(x_2)\phi_r(x_2)\phi_s(x_1)}{r_{12}}\, d\tau_1 d\tau_2$，ただし E は電荷雲の相互作用，として求めた，ということである。その後の論文[294, 295]でも Bloch は，Dirac 流のベクトル模型の方法よりも Slater 流の行列式の方法を好んで用いている。

その第3は，現在の

$$J_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} = \frac{e^2}{V}\iint \frac{\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r}'$$

に相当する計算を行なうにあたって $\int_0^\infty \sin x\, dx = 1$ の関係とか，クーロン相互作用の代りに遮蔽されたクーロン相互作用を用いてその場合にあらわれる $\mathrm{e}^{-\alpha r}$ の α を積分を行なったのちに0にもってゆく技巧とかは用いず，われわれが $\int_0^\infty \sin x\, dx = 1$ の関係を用いて計算の次のステップに進むところで，被積分関数をその中にあらわれる $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|$ に相当する量（$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|$ に比例する量）が $v - \Delta v$ と $v + \Delta v$（ただし $\Delta v \ll v$）の間にあるような場合の被積分関数の平均値でおきかえることによって，結果的には $\int_0^\infty \sin x\, dx = 1$ を用いて得るのと同じ表式を $J_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$ に対して得ているということである。 この計算の仕方は，今の目からみると，ややぎこちない感じがする。

さて，画期的な論文・歴史的な論文の原論文（実物）は多くの場合濁酒のようなものである。その上澄みをとった形で伝えられる銘酒の面影とは似ても似つかぬものである。Heisenberg

の強磁性の論文もまたその例外ではなかった。すでにみてきたように，磁性研究者になじみ深い Heisenberg Hamiltonian $-\sum_{\{i,j\}} 2J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j$ を連想させるようなものは Heisenberg の原論文のどこにも見当らない，Heisenberg Hamiltonianという名称自体はHeisenbergのこの論文にちなんでつけられているのに。この濁酒の上澄みをとり，これをのちの人々が優雅・繊細・まろやかな銘酒に仕立ててゆく。のちの人々によって銘酒に仕立て上げられて行きうるような原酒としての濁酒，これが画期的な論文の最初の姿なのだ。Heisenberg の強磁性の論文から，今われわれになじみ深い Heisenberg Hamiltonian にいたる最初の道を開いたもの，それが Dirac の多電子系の量子力学の論文[233]であった。

Dirac は多重項の理論を簡単に振返ったのちに，これらの理論は群論に基づいて展開されており読者に純粋数学の分野に通じていることを要求しているが，そこで使われている群論は，積の交換法則を満さない量の理論であるのだから，群論によって得られた結果は量子力学の言葉に翻訳できるはずだ，ここに自分の論文の目的がある，量子力学の線にそって議論を展開すれば物理的意味はずっと簡単明瞭になるし，また必要な結果が群論のくだくだしい議論ぬきで簡潔に得られるという利点もあるのだ，とまず述べ，量子力学の線にそって論をすすめると，電子間の交換相互作用が電子スピン間の結合におきかえられると指摘する。

Dirac は n 個の同種粒子より成る系を考え，その r 番目の粒子を記述する一般座標を q_r とし，q_1，q_2，…，q_n にほどこされる任意の置換 P が量子力学的には力学変数とみなされうること（ただし，これへの古典的対応物はない）をまず示し，ついで Hamiltonian の対称性から P が運動の恒量であることを示す。さらに電子の互換に対する全系の波動関数の反対称性から，空間座標に作用するある置換 P_r とスピン座標に作用する同じ置換 P_r^σ との間に，置換の偶奇に応じて

$$P_r = \pm P_r^\sigma$$

の関係があること，スピン座標の互換 P_{12}^σ と $\frac{1}{2}\{1+(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\}$ なるスピン演算子の関数とが同じ交換関係をみたし，かつ，この両者の平均値がともに $\frac{1}{2}$ であることから，この両者の間に

$$P_{12}^\sigma = \frac{1}{2}\{1+(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\}$$

の関係があること，したがって前述の P_r と P_r^σ の関係から（互換は奇置換だから）

$$P_{12} = -\frac{1}{2}\{1+(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\}$$

の関係が得られることを示したのちに，摂動エネルギー V が交換エネルギー V_{P} を数係数としてもつ置換変数 P の１次関数

$$V=\sum_{P} V_{\mathrm{P}} P$$

で与えられ，電子間にクーロン力のみを仮定すれば恒等置換と互換のみが残って

$$\begin{aligned} V &= V_1+\sum_{r<s} V_{rs} P_{rs} \\ &= V_1-\frac{1}{2}\sum_{r<s} V_{rs}\{1+(\boldsymbol{\sigma}_r\cdot\boldsymbol{\sigma}_s)\} \end{aligned}$$

となることを示す。Dirac はこの式の等号は単に両辺の固有値が等しいことを意味するだけであって，力学変数または演算子として両辺が完全に等しいという意味ではないと，注意している。このようにして，Heisenberg Hamiltonian $-\sum_{\{i,j\}} 2J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j$ の原型が Diracによって与えられたのである[296)]。

Fowler と Kapitza[290)] は，Heisenberg 理論を Weiss の分子場の量子力学的基礎づけととらえ，従って，Weiss の分子場理論で説明できる現象，たとえば再熱現象 (recalescence) —その本質は Curie 点をよぎるときの比熱の大きな変化にある—は Heisenberg 理論で説明できるだろうとして，Heisenberg 理論でのそれの説明を試みる。また Curie 点での比熱の変化と Weiss の熱磁気効果との関係に似た対応関係が，Curie 点をよぎるときの比較的大きな体積変化と磁歪との間にあるはずだが，Curie 点での体積変化についても，磁歪についても，それらの相互関係についても，まだ理論がないとして，Heisenberg 理論に基づいた理論をつくってそれの説明をこころみる。これらのことによって，錦上に多少の刺繍をほどこそうとするのだと，彼らは述べている。彼らのアイデアを彼らは次のように説明する。各々１電子をもつ２原子より成る系が２つの可能なエネルギー準位，すなわち，軌道波動関数が対称（したがってスピン波動関数は反対称）で引力的な低いエネルギー準位と，軌道波動関数が反対称（したがってスピン波動関数は対称)で斥力的な高いエネルギー準位をもっているとする。問題の強磁性体をこのような原子対の集まりと考える。磁場をかけると電子磁石の軸の分布がかわり，スピン対称・スピン反対称の原子対の相対数が変化し，したがって，原子対間の平均の斥力または引力が変化し，強磁性体は誘起された磁化に応じて変形する。実際の過程はもっとずっと複雑であろうが，その本性はこういうものであろう，というのが彼らの考えである。

彼らは，Heisenberg が状態和の表式においてあらわには書かなかった因子をあらわに書くことが彼らの問題を扱う上に必要であるとして，Heisenberg の計算を彼ら自身の論文におい

てもう一度たどり[297]，彼らの計算に必要な分配関数の表式として，（H・20）の代りに，

$$K=\sum_{s=0}^{n}\sum_{m=-s}^{s}f_\sigma \exp\left[\alpha m+\frac{\beta s^2}{2m}-\frac{\beta^2 s^2}{8zn^3}(4n^2-s^2)\right]$$
$$\times\exp\left[\frac{n}{2}\beta+\frac{3n}{8z}\beta^2-\frac{J_E}{kT}\right] \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 10})^{298)}$$

を得た（彼らは状態和を文字Kであらわした）．ここで×のあとに書いた因子がHeisenbergのあらわに書かなかった因子である。ついで彼らは，単に“ある変形によってこの式は次のようになる”とだけ述べて，$O(1)$を1の程度の大きさの因子として，（H・21）に相当する式

$$K=O(1)\cdot\left[\sum_{m=-n}^{n}\frac{2n\,!}{(n+m)!\,(n-m)!}\exp\left\{\alpha m+\frac{\beta m^2}{2n}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\beta^2\frac{m^2(4n^2-m^2)}{8zn^3}\right\}\right]\times\exp\left\{\frac{1}{2}n\beta+\frac{3n}{8z}\beta^2-\frac{J_E}{kT}\right\} \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 11})$$

を与えている[299]。Heisenbergが（F・K・11）に相当する式（H・21）$S=F\sum_{m=-n}^{n}e^{\alpha m}g(m)$ $\binom{2n}{n+m}$ から$m=m_0$の項が群を抜いて大きいとして$g(m)$の指数を（$m-m_0$）の巾で展開してその1次までをとることによって最確値m_0を与える（H・22）を得たのに対し，Fowler と Kapitza は，Heisenberg とはちがったやり方で，すなわち，（F・K・11）の和の記号の中の各項を$\exp[f(m)]$とおき，$f(m)$の中の$\log\binom{2n}{n+m}$にStirlingの公式を用い，定常状態でのmの値は$f'(m)=0$の根で与えられるとして，（H・22）と全く一致する式

$$\frac{m_0}{n}=\tanh\frac{1}{2}\left\{\alpha+\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\frac{m_0}{n}+\frac{\beta^2}{2z}\frac{m_0^3}{n^3}\right\} \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 14})$$

を得た。また，状態和の中で$m=m_0$の項のみを残して

$$\log K=2n\left[\log 2+\log\cosh\frac{1}{2}\left\{\alpha+\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\frac{m_0}{n}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2}{2z}\frac{m_0^3}{n^3}\right\}-\frac{1}{4}\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\frac{m_0^2}{n^2}$$
$$\left.-\frac{3\beta^2}{16z}\frac{m_0^4}{n^4}+\frac{1}{4}\beta+\frac{3\beta^2}{16z}-\frac{J_E}{2nkT}\right] \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 16})$$

とし，この式から$E=kT^2\dfrac{\partial}{\partial T}\log K$によって，磁化に関係するエネルギー$E_I$として$\dfrac{m_0}{n}(=\zeta)$を含む項のみを残して

$$E_I=-2nkT\left[\frac{1}{2}\alpha\zeta+\frac{1}{4}\beta\left(1-\frac{2\beta}{z}\right)\zeta^2+\frac{\beta^2}{8z}\zeta^4\right] \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 20})$$

を得，これから T_c におけるモル比熱のとびとして，$H=0$（$\alpha=0$）のとき

$$(C_v)_I \sim -RT_c\left[\frac{1}{4}\beta\left(1-\frac{2\beta}{z}\right)\right]_c\left[\frac{d\zeta^2}{dT}\right]_c \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 21})^{300)}$$

を得た。彼らは $T\to T_c$ で $\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\to 2$ となる（（H・25）式をみよ）ことから（F・K・21）の T_c の次の角括弧でかこった因子を $\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$ だとし，また（F・K・14）から $\left[\frac{d\zeta^2}{dT}\right]_c\to -\frac{3}{T_c}$ となるとして，$(C_v)_I\to\frac{3}{2}R$ を得た。ところが（F・K・21）の T_c の次の角括弧の中にあるのは $\beta\left(1-\frac{2\beta}{z}\right)$ であって $\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)$ ではない。bcc Fe を念頭において $z=8$ ととれば $\beta_c=4$ であって，$\beta_c\left(1-\frac{2\beta_c}{z}\right)=0$ となる[301]。また同様に ζ を（F・K・14）から求めて $\left[\frac{d\zeta^2}{dT}\right]_c$ を計算すると

$$\left[\frac{d\zeta^2}{dT}\right]_c=\frac{24-6\beta_c}{T_c\{3\beta_c-10\}}$$

となり，$z=8$ のときは $\left[\frac{d\zeta^2}{dT}\right]_c=0$ となる。つまり，Heisenbergのままでは $z=8$ のときには T_c での比熱のとびはあらわれないことになる。形式的に $z=\infty$ とおけば $\beta_c=2$ であり，Fowler と Kapitza のいうような結果がえられる。

Curie点での体積変化を問題にするために Fowler と Kapitza は，（F・K・16）の $\log K$ の表式中 α と ζ による項を残し，体積に依存する経験的な項 $\frac{A}{V^p}-\frac{B}{V^q}$ を加えて

$$\begin{aligned}\log K' = 2n\Big[\log 2+\log\cosh\frac{1}{2}\Big\{\alpha+\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\zeta \\ +\frac{\beta^2}{2n}\zeta^3\Big\}-\frac{1}{4}\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\zeta^2-\frac{3\beta^2}{16z}\zeta^4 \\ +\frac{A}{V^p}-\frac{B}{V^q}\end{aligned} \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 22})$$

とする。体積は

$$p=kT\frac{\partial}{\partial V}\log K'(H,V,T)=0 \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 23})$$

からきまるが，$T>T_c$，$H=0$ では $\zeta=0$ で

$$\frac{Ap}{V^p}-\frac{Bq}{V^q}=0, \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 24})$$

$T<T_c$，$H=0$ では

$$\frac{Ap}{V^p}-\frac{Bq}{V^q}-V\frac{\partial\beta}{\partial V}\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\zeta^2+\frac{\beta}{8z}\zeta^4\right]=0 \qquad (\mathrm{F\cdot K\cdot 25})$$

となり，磁化にともなう体積の増加 δV は（F・K・24）と（F・K・25）から

$$\frac{\delta V}{V}=\frac{1}{q-p}\left(\frac{V\ \partial\beta/\partial V}{-V\partial(AV^{-p})/\partial V}\right)\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\zeta^2+\frac{\beta}{8z}\zeta^4\right] \qquad (\text{F・K・26})$$

で与えられる。彼らは（F・K・26）式中の第1の因子を（$q-p$）～2と見積って1/2，第2の因子をFeを念頭において若干の議論ののちに1/15，第3の因子を $\zeta\sim1$（かつ $z=\infty$）として1/4と見積り，Curie点を通過するときの磁化による完全な体積変化を $\delta V/V\sim1/120$ と評価した。Curie点の上下での鉄線の長さの変化の観測値が1/300～1/600であることから，これを体積変化になおせば1/100～1/200となる。ところで注意すべきはCurie点を通っての温度上昇の際収縮が観測されることであって，これは $\partial\beta/\partial V>0$ でなくてはならぬことを意味するが，このことは，決して不可能ではないけれども，いささかびっくりさせられることだ，と彼らは付言している。また，長さの変化が T_c の効果なのか T_c より100°ほど高い所にある $\beta\to\gamma$ 変態点の効果が及んでいるのか実験では判別し難い；膨脹計のよみと磁気測定とを同時にやって，長さの変化を磁気的状態の変化と正確に関連づけることによってのみ，理論の検証は可能である；Ni-Fe合金に対してはそういう測定があるが，Ni-Fe合金の性質はFeより複雑だから（Feに対する）新しい測定が望まれる；とも付言している。磁歪に関しては，巨視量の（in bulk）鉄が実際に磁化するときに観測される長さの変化である（つまり，外から磁場をかけることによって微結晶の磁化方向がそろい，そのことによって各微結晶の感ずる磁場が変化し，そのことによって当該微結晶の磁化が変化し，その磁化の変化によって長さが変化する）として，まず（F・K・26）から

$$\frac{\delta l}{l}=\frac{1}{240}\zeta^2$$

と評価し，この式から，微結晶が磁場を感じて ζ が $\delta\zeta$ だけ変化したときの長さの変化 $\delta' l$ として

$$\frac{\delta' l}{l}=7.5\times10^{-3}\,\delta\zeta$$

を得，ついで $\delta\zeta$ は α の変化 $\delta\alpha$ によるとして（F・K・14）から

$$\delta\zeta\cdot\left[\frac{1}{1-\zeta^2}-\frac{1}{2}\beta\left(1-\frac{\beta}{z}\right)-\frac{3\beta^2}{4z}\zeta^2\right]=\frac{1}{2}\delta\alpha$$

を得る[302]。彼らは角括弧内の各項を順に25/9, 3/2, 1 と見積って（この見積りの仕方がよ

く分らぬ）

$$\delta\zeta = 4.7 \times 10^{-3}$$

（これは常温 300 K で磁場を 1 ガウス程度変化させた場合に相当している），それゆえ

$$\frac{\delta' l}{l} = 3.5 \times 10^{-5}$$

を得て，これは観測の最大値 2.0×10^{-5} とよく一致していると述べている。

Fowler と Kapitza のこの論文は，Heisenberg 理論を用いて，たとえ大ざっぱにではあれ，“定量的”に（ほとんど“定性的”の域を出てはいないが，ともかく“定量的”に）実際の物質の実際の磁気的性質を論じようとした最初の論文であった。そして，たしかに彼らは，Curie点における比熱のとびや，体積の変化や，磁歪を Heisenberg 理論で扱うには，どのような処方箋でやればよいかを示したのであった。

われわれが今 Heisenbergの強磁性の論文を読んだときに感ずるであろう 1 つの違和感は，彼が結晶全体を 1 つの系として取り扱い，各格子点にある 1 つ 1 つの原子の磁気モーメントがどちらを向いているかというようには議論を展開していないことから生じる。Stoner[272] は，全系の項体系のエネルギー分布を仮定して議論をすすめる Heisenberg のやり方の代りに，結晶を原子の集団とみなし，各原子において磁性に寄与する電子は結晶の磁化と平行または反平行に向くことができ，そのときのエネルギーが

$$\pm \frac{zJ_0}{2} \frac{\bar{\mu}}{\mu}$$

である，という近似を行なうことを提案した。ここで $\bar{\mu}/\mu$ は相対磁化である。Stoner はこの論文の前半で Langevin-Weiss 理論を復習し， 古典論での，および量子化された体系，つまり磁気の担い手の磁気モーメント μ が $\mu = {}_j g \mu_B$ で与えられその方向が量子化されている系での，磁化，Curie 点，磁化率の表式を与える。この前半部分は要領よくまとまった総合報告になっている。ついで Stoner は Curie 点での比熱の変化を古典的 Langevin-Weiss 模型および量子化された Langevin-Weiss 模型で論じ，モル比熱のとび ΔC（Stoner は $(\Delta S_M)_{T=\theta}$ と書いているが，簡単のために以下では ΔC と書く）が，古典論では

$$\Delta C = \frac{5}{2} R \ ,$$

量子論では

$$\varDelta C = \frac{5R}{2} \frac{j^2+j}{j^2+j+1}$$

で与えられることを示す。以上のような準備のもとでStonerはHeisenberg 理論の検討にとりかかる。彼はWeiss理論の表式とHeisenbergの(H・22)式(ただし外場が0の場合)とを比較して，Weiss理論の分子場の最大値NI_0(Nは分子場係数，I_0は単位体積あたりの飽和磁化)が，Heisenberg理論では

$$NI_0 = \frac{zJ_0}{2\mu}\{1-\frac{J_0}{kT}+\frac{J_0}{2kT}(\frac{\bar{\mu}}{\mu})^2\} \qquad (\mathrm{S}\cdot 39)$$[303)]

とおきかえられていることを指摘する。これは私が註258で示したことと本質的に同じことである。Stonerの$\bar{\mu}/\mu$はHeisenbergのm_0/nに等しい。また，Heisenbergによる自発磁化出現条件

$$\frac{1}{2}(\beta-\frac{\beta^2}{z})>1 \quad (\beta=\frac{zJ_0}{kT})$$

にも簡単にふれ，自発磁化出現のための必要条件が$z \geqq 8$であること，一般に自発磁化が生じるβの極限値が

$$\beta^2-2\beta z+2z=0$$

の根β_cで与えられ，それに対応する温度が

$$T=\frac{2J_0}{k\{1\pm\sqrt{1-\frac{8}{z}}\}}$$

であること，したがって温度が高温から下ってくると，自発磁化は

$$T=\frac{2J_0}{k\{1-\sqrt{1-\frac{8}{z}}\}}$$

ではじまって次第に大きくなり，ほぼ

$$T=\frac{2J_0}{k}$$

で極大になり，それから減少して

$$T = \frac{2J_0}{k\{1+\sqrt{1-\frac{8}{z}}\}}$$

で消失することになると述べている。そして $z=8$ のときは，自発磁化のこれから始まろうとする温度と自発磁化が消えようとする温度とが一致する，つまり自発磁化はちょうど生じないのだ，と述べている。このように Stoner は，低温における自発磁化消失温度の存在を近似もしくは仮定の不適切さからくる物理的に無意味な解として恣意的に切り捨てる道はとらず，Heisenberg 理論の帰結を忠実になぞり，それが自発磁化の温度変化の実験と全く違った結果を与えることをもって，Heisenberg 理論のもっている弱点とみなしたのである。さらに Fowler と Kapitza[290] がえたモル比熱のとびの式 $\varDelta C = 3R/2$ は正当化できない近似に基づいているとして，$T \sim \theta$ で $(\bar{\mu}/\mu)^4$ の項を無視したときHeisenberg 理論から出てくる結果として

$$\varDelta C = -R\left[\frac{1}{4}\beta_c\left(1-\frac{2\beta_c}{z}\right)\right]\left\{\frac{d(\sigma/\sigma_0)^2}{d(T/\theta)}\right\}_{T=\theta}$$

の表式を得 (σ/σ_0 は相対磁化で $\bar{\mu}/\mu$ に等しい)，さらに $\{d(\sigma/\sigma_0)^2/d(T/\theta)\}_{T=\theta}=-3$ と暗黙裡にみつもって[304]

$$\varDelta C = 3R\left[\frac{1}{4}\beta_c\left(1-\frac{2\beta_c}{z}\right)\right] \qquad (\mathrm{S}\cdot 44)$$

を得た。そして Stoner は，Fowler と Kapitza は (S・44) 式の角括弧の中を 1/2 と見積って $\varDelta C = 3R/2$ を得たけれども，

$$\beta_c = \frac{z}{2}\{1-\sqrt{1-\frac{8}{z}}\}$$

であるから，これを (S・44) に代入すれば

$$\varDelta C = \frac{3}{2}R\left[\frac{z}{8}\{1-\sqrt{1-\frac{8}{z}}\}\sqrt{1-\frac{8}{z}}\right] \qquad (\mathrm{S}\cdot 45)$$

となり，$z=8$ のとき $\varDelta C = 0$，$z=12$ のとき $\varDelta C = 0.55R$ となって，Fowler と Kapitza が得た比熱のとびに対する実験との一致は完全に失われる，と指摘した[305]。

このように Heisenberg 理論が磁化についても比熱のとびについても実験と一致しない結果を与えることを指摘したのちに，Stoner はこの不一致のもとをたどって，それを (H・22) 式の双曲線正接関数の引数の中に β^2 の項があらわれていることに帰した。そして，この β^2 の項は，項体系のエネルギー分布としてガウス分布を仮定したため，分配関数に因子

$$\exp \left\{ -\frac{E_\sigma}{kT} + \frac{\overline{\Delta E_\sigma^2}}{2k^2T^2} \right\}$$

があらわれ，この $\overline{\Delta E_\sigma^2}$ の項から（H・22）における β^2 の項が出てきたのであると指摘して，困難は結晶を全体として取り扱う群論的方法に本来備わったものである，と主張する。（H・17）式より明らかなように，$s=n$ に対して $\overline{\Delta E_\sigma^2}=0$ であり，また $s=n$ に対して $f_\sigma=1$ であるから，項体系のエネルギー分布としてガウス分布を仮定することは，飽和値よりも小さな磁化をもった状態で，飽和磁化の状態よりもエネルギーの低い状態が存在しうると仮定したことになる。磁化の温度変化が実験と合わないのはこのような仮定をしたせいである。また，理論と実験との不一致は，Curie 点での比熱のとびの考察から分るように，単に低温だけで起こるのではない，Curie 点でも起こるのだ。このように述べて Stoner は，有用な近似法として，結晶を全体として取り扱う代りに個々の系としての原子の集団とみなすこと，各原子の磁気に関与する電子の磁気モーメントが結晶の磁化に平行または反平行にのみ向くことができること，そのときのエネルギーが $\pm\frac{zJ_0}{2}\frac{\bar{\mu}}{\mu}$ であること，を提案するのである。この近似をおこなうと自発磁化に対する表式は

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \tanh\frac{zJ_0}{2kT}\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \tanh\frac{\beta}{2}\frac{\bar{\mu}}{\mu} \qquad (\mathrm{S}\cdot 51)$$

となり，$j=1/2$ の量子化された体系に対する Langevin-Weiss 理論と形式的に一致し，Weiss の分子場係数 N は

$$N = \frac{zJ_0}{2\mu I_0}$$

によって交換積分 J_0 と簡潔に関係づけられる。確かに Heisenberg のもともとの理論においては，分子場と交換積分の関係はこれほど明解には与えられていなかった，交換相互作用が分子場の原因であることは示されたけれども。

ついで Stoner は，強磁性の基本問題は磁気の担い手の本性に関する問題および分子場の本性に関する問題であり，この見地からは強磁性体の多くの実験結果は二義的な重要性しかもたぬと述べ，この見地から重要な実験として，磁気－回転効果，自発磁化の温度変化，Curie点での比熱の変化，熱－電気的性質，$T>\theta$ での磁化率をあげている。磁気－回転効果の実験については，強磁性体で常温で $g=2$ であることから，磁気の担い手として，(1)自由電子，(2) S－状態の原子またはイオン，(3)原子またはイオン内の自由に向きがかえられる電子が考えられるとし，(2)と(3)の違いを，(3)では原子またはイオンは“軌道”モーメントをもつがこの“軌

道”モーメントは異なる原子のある種の“l interlocking”によって磁気的に ineffective である，と説明している。自発磁化の温度変化については，Tyler[306)] が Weiss と Forrer の Ni の磁化の温度変化についての実験結果[307)] と種々の j に対する自発磁化の温度変化の理論曲線とを注意深く比較して，実験結果が $j=\frac{1}{2}$ の理論曲線とよく一致し，古典曲線あるいは $j>\frac{1}{2}$ の量子論的曲線とははっきり不一致であることを示したことを引用しつつ，自発磁化の温度変化から得られる $j=\frac{1}{2}$ の結論は回転－磁気効果から得られる結論と一致する，と述べている。そして，実験から得られる磁気－温度曲線の形は，結晶を全体として取扱う Heisenberg のやり方から得られる結果とは相容れない，しかし，結晶内原子を１つ１つの系とみなして交換相互作用を考慮に入れる取り扱いで得られる結果とは一致する，と付言している。Curie点での比熱の変化については，磁気の担い手が電子であると同定され，原子あたり f 個の担い手があればCurie 点でのグラム原子比熱のとびは

$$\Delta C=\frac{3}{2}Rf$$

になるが，この式は Heisenberg のもとのやり方では出てこないが，“量子化された”Weiss 理論あるいは修正された交換相互作用理論（（S・51）式）からは出てくる，また f は磁化の飽和値からも評価されるとして，Ni と Fe とで，比熱のとびから評価した f と磁化の飽和値から評価した f が，それぞれ，0.57 と 0.60，2.27 と 2.20 でほぼ一致していることから，磁気の担い手は電子，より正確には電子スピン角運動量，であることは疑いないとしている。熱電気的性質については，Dorfman と Jaanus の実験[268)] を引用して，Ni の Thomson 係数の Curie 点での突然の変化が伝導電子の比熱のとびの存在を意味するとの Dorfman らの解釈が成立つとすれば Curie 点での Ni の比熱のとびは伝導電子の比熱のとびによることになるが，Dorfman らの考えが成立つかどうかは疑問であるとしている。Curie 点以上の磁化率については，特に Fe に対して詳しく考察し，常磁性磁化率から算出した f が β_1 相で 5.8，β_2 相で 4.0，γ 相で 10.6，δ 相で 0.7 になることから，f の値がこんなに大きく変化するとは考えにくい，特に $f\approx 10$ になるようなことは考えられないとし，$T>\theta$ では軌道角運動量が磁性に何らかの役割を演ずるのであろうと結論している。そして，これらの諸実験は全体として，強磁性体における磁気の担い手は原子内電子，すなわち Heisenberg 理論の交換相互作用電子である，との見解を支持している，と結論している。 そして，Heisenberg 理論の detailed results は強磁性体での実験結果とは一致しないが，取り扱い方をわずかに変更することによって実験とよくあう結果が得られることになるのだと強調している。

Heisenberg 理論は，Weiss の分子場の量子力学的裏付けを得たとはいえ，Langevin-Weiss

理論との対応は一目瞭然というわけではなかった。それはLangevinが自由な素磁石が集った系の常磁性の理論を作り，それへWeissが相互作用を分子場の形でつけ加えたのに対し，Heisenbergは全系を一体のものと考えて理論を作ったからである。Stonerは，全系を個々の系としての原子の集まりとみることによって，Langevinの視点に立ち戻った。そのことによってLangevin-Weiss理論との直接の対応関係が明示されたのである。純粋に理論的な見地からは，全系を１つの系とみなして，全系のエネルギー固有値の分布を問題としてそこから議論を進めてゆくHeisenberg流のやりかたの方が，個々の系としての原子に着目するStoner流の近似法よりは正統的であるように，私には思えるが—。

また，Stonerの加えたHeisenberg理論への修正は，$\overline{\Delta E_\sigma^2}=0$とみなすことと同等である，との見方も可能であろう。このことは，（H・17）の代りに$\overline{\Delta E_\sigma^2}=0$とおいて（H・19）式以後の状態和の計算をHeisenbergの処方箋通りに行なうと，磁化に対する表式として（H・22）の代りに，外場0のときに，（S・51）が得られることからも分る。Heisenbergは実験との不一致をなくする方向として，項体系のエネルギー分布の高次のモーメントを正しく考慮に入れることを示唆したけれども，むしろStonerは２次モーメントをさえ無視することが実験との一致をもたらすことを示したのであった。

Heisenbergは項体系のエネルギー分布としてガウス分布を仮定したために，エネルギー最低の状態である多重度最高の多重項よりもエネルギーの低い低多重度の項の存在を許したことになっているという欠点があり，そのため低温で全く実験と一致しない結果を与えた。Blochは低温で成立つ理論として，最多重度の基底状態およびそれからの低い励起状態を考慮に入れる理論を提出した。これが，今われわれがBlochのスピン波の理論と呼びならわしている理論であるが，Blochはこの論文ではまだ，彼の得た結果をスピン波というようなイメージでとらえることはしていない。BlochはSlater行列式の方法を用いてこの問題を取り扱った。彼はまずN原子より成る１次元輪状格子を考える。N個の軌道状態（原子）に各々１個ずつ配置されたN個の電子のうち，あるr個が右を向き，のこり（$N-r$）個が左を向いている状態は１つのSlater行列式であらわされるが，全スピン磁気量子数が$(N-2r)/2$であるような全系のエネルギー固有状態$\Psi(r)$は，このようなSlater行列式の１次結合で与えられる。この結合の係数aは，行列$A=eI-\mathscr{H}$（eはエネルギー固有値，Iは単位行列，$\mathscr{H}$はハミルトニアン）によって$A\Psi(r)=0$から定められるが，Aの行列要素をSlater行列式であらわされる状態を基底にとってあらわすと，最近接原子間以外の交換積分を0とみなし，最近接原子間のそれをJとすると，その対角項は

$$e-E_0+(N_1+N_2)J,$$

ここで N_1，N_2 はそれぞれ隣接左向き平行対の数および隣接右向き平行対の数，となり，その非対角項は，隣りあったスピン反平行の対１組を逆転することによって互いに移行しあう状態間でのみ J となり，それ以外では０となる。$e-E_0+NJ$ を ε と書けば，$A\Psi=0$ から aを決める式として

$$\varepsilon\, a(f)+J\sum_{f'}[\,a(f')-a(f)\,]=0$$

が得られる。ここで f は右向きスピンの位置が $(f_1 f_2 \cdots f_r)$ であるような配置を意味し，f' は f から任意の隣接反平行対の１組を逆転することによって得られる配置を意味する。また，Bloch は $a(f)$ のみたすべき境界条件として

$$a(f_1\cdots f_p\cdots f_r)=a(f_1\cdots f_p+N\cdots f_r)$$

をおく。このような周期的境界条件は，Bloch が結晶内電子の取り扱い[259]の際に考慮に入れ，みごとな成功をおさめたものであった。このような準備のもとに，Bloch は順次，$r=0$，$r=1$，$r=2$ の場合を考察する。$r=0$ のときは正確に $\varepsilon a=0$ から $a=1$，$\varepsilon=0$ が得られる。この状態は多重項 $s=\dfrac{N}{2}=n$ に属する。$r=1$ のときも正確に，境界条件からの $a_k(f)=e^{2\pi i k f/N}$（k は整数）を用いて，

$$\varepsilon_k=2J\left[1-\cos\frac{2\pi k}{N}\right] \qquad k=0,\ 1,\cdots N-1$$

が得られる。$k=0$ の状態は多重項 $s=n$ に属して $\varepsilon_0=0$ であり，$k\neq 0$ の状態は多重項 $s=n-1$ に属する。$r=2$ のときは２つの右向きスピンが隣接する場合を無視すれば

$$\varepsilon_{k,\,k'}=2J\left\{\left(1-\cos\frac{2\pi k}{N}\right)+\left(1-\cos\frac{2\pi k'}{N}\right)\right\}$$

が得られるこの取り扱いは $r\ll N$ の場合に一般化することができて

$$\varepsilon_{k_1\cdots k_r}=2J\sum_{j=1}^{r}\left(1-\cos\frac{2\pi k_j}{N}\right)$$

とあらわすことができる。ここで Bloch が問題にしているのは，全系の与えられた多重度をもつ多重項のエネルギーであり，それがエネルギーの低い方からどのように分布しているかということである。その意味でこれは Heisenberg の延長上にあり，Heisenberg理論に対する低温での改良になっているのである。Bloch は，あくまで全系の多重項のエネルギーをその低エネルギー部分に対してできるだけ正しくよりよい近似で求めることをめざしたのであって[308]スピン波の直観的イメージを確立することをめざしたのではなかった。むしろ Blochはスピン

波のような実体的なイメージをいわば“通俗的”に安易に抱かしめるよりは，量子力学の原理の上に論理的に築かれた，基礎のしっかりした量子力学的な取り扱いによって，観測にかかる物理量の期待されるふるまいを示すことを，ここではめざしていたのであった。このように，この論文を読んで，私には感ぜられる。量子力学の体系がほぼ浮かび上り，それの固体論への応用がようやく手がけられ始めたころの，Heisenberg 門下生の Bloch としては，まさにこういう行き方こそが彼自身にとって最も得心のゆく行き方であったろう。ついでBloch は，1次元格子の低エネルギー多重項のエネルギー準位をもとめる方法を平面格子（正方，六方）および立方格子（単純，体心）に適用してそれらでのエネルギー準位をもとめ，それから状態和と平均磁気モーメントを算出した。彼は1次元格子においても平面格子においても強磁性はあらわれず，立方格子においては（$z=6<8$ の単純立方格子においても）強磁性があらわれること，そしてそのとき，低温での磁化が $T^{3/2}$ に比例して減少することを示したのであった。 Bloch のこの論文はオランダの Utrecht から投稿されており，Kramers に謝辞が呈せられている。Bloch は Lorentz 基金からの援助を得て，オランダでこの仕事をしたのである。

量子力学は，強磁性出現に必要な Weiss の分子場を交換エネルギーによって説明した。しかし，実際の単結晶における磁化容易方向の存在を交換エネルギーは説明しない。交換エネルギーはその本性上固有関数の対称性については何事かを述べるが，スピンの方向については何も言わないからである。このように述べて Bloch と Gentile[309] は，強磁性単結晶の異方性を量子力学的に説明しようとする。そのためには結晶内部の磁気的な（下線は Bloch と Gentile によるイタリック）力を研究せねばならない。非摂動系（交換相互作用プラス外部磁場）に対しては，Heisenberg の強磁性の論文におけると同様，結晶格子の Heitler-London 模型をとる。原子あたり各々1個の電子があるとし，スピン励起のほかに原子の励起状態も考慮に入れて，全系の基底状態と低い励起状態とを問題にすることにすれば，非摂動状態はスピン波（彼らは引用符つきで“Spinwellen”という語を用いている。Bloch のスピン波の論文で与えられた状態が，ここで“スピン波”として把握されている）と原子の“励起波”とによって記述される。摂動としてはスピン軌道相互作用とスピン間の磁気双極子相互作用をとる。こうすることによって Bloch と Gentile は，六方結晶（Co，磁硫鉄鉱 $Fe_{1-x}S$）に対してはスピン間磁気双極子相互作用の第1近似あるいはスピン軌道相互作用の第2近似が，六回軸と磁化との間の角を Θ とするとき，$\cos^2\Theta$ の形のエネルギーを与えること，立方結晶に対してはスピン間磁気双極子相互作用の第2近似あるいはスピン軌道相互作用の第4近似が，α，β，γ，を結晶軸に対する磁化の方向余弦とするとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の形のエネルギーを与えることを示した。また Co においては，実際の異方性エネルギーと比較することによって，スピン軌

道相互作用の第２近似が異方性に主たる寄与をしていることを示した。Bloch と Gentile のこの論文は，量子力学が強磁性結晶の磁気異方性をも説明しうることを示したものであった。この論文の末尾には Heisenberg 教授への謝辞があり，著者たちの所属は Leipzig 大学の理論物理学教室となっている。

この異方性の論文につづく Bloch の磁壁の論文[295]は Leipzig の教授資格獲得論文(Leipziger Habilitationsschrift)であり，40頁をこえる長大な論文である。この論文の刊行は1932年２月であったが，直ちに犬井鉄郎によって同年７月の『日本数学物理学会誌』上に紹介された。

この論文の前半は，強磁性体の交換問題の定式化にあてられている。永年方程式の Slater によって与えられた形（つまり Bloch のスピン波の論文で用いた形）

$$\varepsilon\alpha(f_1\cdots f_r)+\sum_{f_1'\cdots f_r'} J_{st}\left[\alpha(f_1'\cdots f_r')-\alpha(f_1\cdots f_r)\right]=0 \qquad (\mathrm{B}\cdot 1)^{311)}$$

から，細胞（定常状態）$f(f=1,\cdots, Z)$ における右向きスピン電子数 N_f と左向きスピン電子数 n_f (N_f，$n_f=0$，1；$N_f+n_f=1$）の対 ($N_f n_f$) をすべての細胞に与えることによって全系の状態を指定するやり方に移行し，細胞 f における右向きスピンの数，左向きスピンの数を１つ増減させる演算子 $\Delta_f^{\pm}$ と $\delta_f^{\pm}$ を導入し，さらに

$$\varphi=\sqrt{N}\,\Delta^- \quad , \qquad \varphi^*=\sqrt{N+1}\,\Delta^+ \quad ,$$
$$\phi=\sqrt{n}\,\delta^- \quad , \qquad \phi^*=\sqrt{n+1}\,\delta^+$$

なる演算子を導入することによって，永年問題が

$$\varepsilon\, a\,(N_f n_f)=\frac{1}{2}\sum_{s\neq t} J_{st}(\phi_t^*\varphi_s^*-\varphi_t^*\phi_s^*)\times(\phi_t\varphi_s-\varphi_t\phi_s)\,a(N_f n_f)$$

の形にかけ（ここで $(N_f n_f)$ ですべての対 $(N_1 n_1)(N_2 n_2)\cdots(N_Z n_Z)$ を代表させてある），これはハミルトニアン

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum_{s\neq t} J_{st}(\phi_t^*\varphi_s^*-\varphi_t^*\phi_s^*)(\phi_t\varphi_s-\varphi_t\phi_s) \qquad (\mathrm{B}\cdot 8)^{312)}$$

をもった Schrödinger 方程式を解くことと同等であることを，まず Bloch は指摘する。ついで，ハミルトニアンの回転不変性から，スピン角運動量の成分

$$\frac{\hbar}{2}\sum_{s=1}^{Z}(\varphi_s^*\varphi_s-\phi_s^*\phi_s)=m_z$$
$$\frac{\hbar}{2}\sum_{s=1}^{Z}(\phi_s^*\varphi_s+\varphi_s^*\phi_s)=m_x$$

$$\frac{\hbar}{2i}\sum_{s=1}^{Z}(\phi_s^*\varphi_s-\varphi_s^*\phi_s)=m_y$$

が運動の恒量であること，また細胞 s のスピン角運動量

$$m_z^s=\frac{\hbar}{2}\sigma_z^s=\frac{\hbar}{2}(\varphi_s^*\varphi_s-\phi_s^*\phi_s)$$

$$m_x^s=\frac{\hbar}{2}\sigma_x^s=\frac{\hbar}{2}(\phi_s^*\varphi_s+\varphi_s^*\phi_s)$$

$$m_y^s=\frac{\hbar}{2}\sigma_y^s=\frac{\hbar}{2}(\phi_s^*\varphi_s-\varphi_s^*\phi_s)$$

を用いて，ハミルトニアンが

$$\mathcal{H}=\frac{1}{4}\sum_{s\neq t}J_{st}\left[(\varphi_s^*\varphi_s+\phi_s^*\phi_s)(\varphi_t^*\varphi_t+\phi_t^*\phi_t)-(\sigma^s\sigma^t)\right]$$

とあらわされ，$\varphi_s^*\varphi_s+\phi_s^*\phi_s=1$ であるので

$$\mathcal{H}=\frac{1}{4}\sum_{s\neq t}J_{st}\left[1-(\sigma^s\sigma^t)\right]$$

とあらわされる（ここで σ は成分 σ_x，σ_y，σ_z をもったベクトルで，（$\sigma^s\sigma^t$）はそれの内積である）こと，を Bloch は示した。彼は，この形でのハミルトニアンはすでに Dirac[233] が置換演算子の力学的性質の研究から提出しているが，自分は以下の議論で，はっきりしていて分り易い Slater の方法に直接関連する“スピノル”記法（B・8）を，角運動量ベクトルによる Dirac の方法よりも，好んで用いるとことわっている。

さて，Slater の式（B・1）は逆向きスピンの数がごく少ないときに近似的に解くことができ，逆向きスピンが隣接格子上に並ぶ場合を無視すれば，スピンが互いに独立に平面波の形で格子を通って移動する（下線は勝木による。Bloch はここで，Blochのスピン波の論文で求めた励起状態を，はっきりスピン波とみなしたわけである），と解釈することができる。しかし，逆向きスピンの数が多くなると別の方法が求められねばならないとして，Bloch はスピン密度の微分方程式を次のようにしてつくる。φ と ϕ はスピン密度振巾の意味をもつが，Hamilton の正準運動方程式 $\dot{q}=\partial H/\partial p$，$\dot{p}=-\partial H/\partial q$，あるいは量子力学的に $\hbar\dot{q}/i=Hq-qH$，$\hbar\dot{p}/i=Hp-pH$ において，φ，ϕ を q に対応させ，$i\hbar\varphi^*$，$i\hbar\phi^*$ をそれぞれ φ，ϕ に対する正準共軛運動量に対応させれば

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi_s}{dt}=\sum_t J_{st}\phi_t^*(\varphi_s\phi_t-\phi_s\varphi_t)$$

等が得られる。強磁性体の場合，細胞を指定する s， t は原子または格子点の座標(fgh)であらわされる。最近接原子間の交換積分のみが J で他は0とみなすと，単純立方格子の場合ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = J\cdot\sum_{fgh}(\varphi^*_{fgh}\,\phi^*_{f+1,g,h}-\phi^*_{fgh}\,\varphi^*_{f+1,g,h})(\varphi_{fgh}\,\phi_{f+1,g,h}-\phi_{fgh}\,\varphi_{f+1,g,h})$$

$$+(\varphi^*_{fgh}\,\phi^*_{f,g+1,h}-\phi^*_{fgh}\,\varphi^*_{f,g+1,h})(\varphi_{fgh}\,\phi_{f,g+1,h}-\phi_{fgh}\,\varphi_{f,g+1,h})$$

$$+(\varphi^*_{fgh}\,\phi^*_{f,g,h+1}-\phi^*_{fgh}\,\varphi^*_{f,g,h+1})(\varphi_{fgh}\,\phi_{f,g,h+1}-\phi_{fgh}\,\varphi_{f,g,h+1})$$

となり，低温で φ， ϕ 等がごくゆるやかに変化しているときは

$$\varphi_{f+1,g,h}=\varphi_{fgh}+a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\cdots\cdots,$$

ただし a は格子定数，とすることができて，その結果

$$\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi}=Ja^2\{2(\nabla\phi^*,\ \varphi\nabla\phi-\phi\nabla\varphi)+\phi^*(\varphi\triangle\phi-\phi\triangle\varphi)\}$$

等が得られる。これがスピン密度に関する運動方程式である。もし逆向きスピン数が非常に小さく，たとえば φ が非常に小さくて ϕ を場所的にも時間的にも一定で1とみなしてよい場合には，上式は簡単に

$$\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi}+Ja^2\triangle\varphi=0$$

となる。

このような準備のもとでBlochは残留磁気現象と履歴現象の理論を作ることをこころみる。それまでにも残留磁化に対するBeckerの説明[313, 314] — 内部歪の存在を前提とし，それによって生ずる異方性と関連させての — などがあった。しかし，磁気異方性はAkulov[315]が強調したようにもともと歪みなしでも存在しているし，茅[316]の研究した六方コバルト単結晶が六回軸を磁化容易方向としつつも残留磁気を示さず，Gerlash[317]の研究した鉄の単結晶も残留磁気を示さぬこと等から，Blochは，残留磁化の説明への別の道を，結晶内の素磁石(スピン)の分布がみたすべき条件あるいはむしろ一般に磁化反転過程が開始されうる条件を詳しく論ずることによって開こうとした。特に，ちょうどその頃発表されたSixtusとTonksの実験[318]は，Barkhausen効果のとびの際磁化反転は1つの結晶領域で一様に(一度に？ einheitlich)起こるのではなく，異なる磁区の間の境界の連続的な移動として起こるのだということを示し，その移動速度と加えた磁場の強さとの関係を明らかにした。Blochは次のように

考えた。飽和にまで磁化した磁区の中であるスピンを反転させようとすれば強い分子場がスピンの反転を妨げ，あえて反転させようとすれば磁区内のすべてのスピンを同時に反転させねばならないが，こういう事は実際には起こらない。しかし，磁区の境界面での個々のスピンの反転は単に境界面の移動にすぎず，それゆえ大してエネルギーを供給しなくてもすむ。しかし，交換力だけを考慮したのでは最低エネルギーの状態はスピン一様な分布となってしまい，この現象の説明には不充分である。そこでスピン間の磁気双極子相互作用を考慮に入れる。すると，これは結晶内のスピン配列に決定的な影響を与え，磁化が種々の方向を向いた細長い形の磁区をつくるが，磁区同士は比較的せまい境界でさかいされている。双極子エネルギーは

$$\frac{1}{2}\sum_{s\neq t}\frac{e^2}{2mc^2}\frac{-3(\boldsymbol{s}_s\boldsymbol{r}_{st})(\boldsymbol{s}_t\boldsymbol{r}_{st})+(\boldsymbol{s}_s\boldsymbol{s}_t)\boldsymbol{r}_{st}^2}{\boldsymbol{r}_{st}^5}$$

で与えられるが，この和を原子 s のまわりの半径数原子間距離の球とその外側の部分とにわけると，前者からの寄与は立方結晶においては消え，後者からの結晶の消磁場の寄与は結晶が細長くのびているとすれば無視でき，また磁区の消磁の影響も磁区が細長くのびているために無視でき，結局，外側の部分の内側の球形の境界面に起因する要素のみがのこるが，これは，I を単位体積あたりの磁化とすれば，結晶の全エネルギーに

$$\frac{2\pi}{3}\int I^2 d\tau$$

だけの寄与をする。z 軸を磁化容易軸とすれば I はその z 成分によって決まるとしてよい。すると

$$I^2=\frac{1}{a^3}\left(\frac{e}{mc}m_z\right)^2=\frac{\mu^2}{a^3}(\bar{\varphi}\varphi-\bar{\phi}\phi)^2$$

とおくことができる。ただし μ は Bohr 磁子である。$C=2\pi\mu^2$ とおけば系の全ハミルトニアンは

$$H=\frac{J}{a}\int\{|\varphi\phi_x-\phi\varphi_x|^2+|\varphi\phi_y-\phi\varphi_y|^2+|\varphi\phi_z-\phi\varphi_z|^2\}\,d\tau$$
$$-\frac{C}{a^3}\int(\bar{\varphi}\varphi-\bar{\phi}\phi)^2 d\tau$$

となり，スピン密度に関する運動方程式として

$$\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi}=Ja^2\{2(\nabla\bar{\phi},\ \varphi\nabla\phi-\phi\nabla\varphi)+\bar{\phi}(\varphi\triangle\phi-\phi\triangle\varphi)\}-2C\varphi(\bar{\varphi}\varphi-\bar{\phi}\phi)$$

等が得られる。これから φ が非常に小さく ϕ が近似的に 1 に等しいとみなせるとき，φ に対する方程式として

$$\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi} = -Ja^2\triangle\varphi + 2C\varphi(1-\overline{\varphi}\varphi)$$

が得られる。

$$\varphi = u(x)\, e^{i\frac{E}{\hbar}t}$$

の形の定常解をさがすと，u に対する方程式として，$\lambda = 2C/Ja^2$，$\varepsilon = \lambda - (E/Ja^2)$ とおけば

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda u^2 - \varepsilon)u = 0$$

が得られるが，この方程式の無限遠で 0 になる解は $A = \sqrt{2\varepsilon/\lambda}$，$b = \sqrt{\varepsilon}$ とおけば

$$u = A/\cosh\{b(x-x_0)\}$$

である。この式は φ が小さいとして得られた式であるが，中央で右向きスピンの密度が極大値となると仮定して $A=1$ とおく。すると $\varepsilon = \lambda/2$，$b = \sqrt{\lambda/2} = \sqrt{C/Ja^2}$，$E = C$ となる。スピン密度 u^2 は

$$\delta = 1/b = a\sqrt{J/C}$$

程度の距離で 1 から 0 に変化するとみなせるが，磁気的エネルギー C はほぼ 1K に相当し，J はほぼ 1000K 程度の Curie 温度に相当するから

$$\delta \cong a\sqrt{1000} \cong 30\text{原子間距離}$$

となり，これが反対向きの磁区の間の境界の厚さである。また，境界面の単位面積あたりのエネルギーとして

$$\Delta E \cong \frac{C}{a^3}\delta$$

が得られる。これをもとにして Bloch は抗磁力や残留磁化や磁化反転の芽などについて定性的な議論を展開している。Bloch は実験家ともいろいろ討論したらしく，この論文の途中(333 頁)の脚註で Becker 教授，Preisach 氏，Kersten 氏らに残留磁気問題についての討論を感謝している(Becker と Kersten は Berlin 工科大学理論物理学教室（と Berlin の AEG (電気会社)の研究所)の所属，Preisach は Dresden 工科大学の弱電技術研究所の所属である)。また，論文の末尾で Heisenberg 教授に多くの討論を感謝し， この論文を書きあげる間 Leipzig に滞在することを可能ならしめた Zürich 市の Brügger 基金と Zürich 州の大

学奨学基金に感謝している。なお，私がこの Bloch の論文の紹介を書くとき，犬井の解説[310]をある程度参考にした。

Bloch の結晶内電子の論文はドイツの Leipzig から 1928 年 6 月に，磁場中の金属の磁化率と抵抗変化の論文[319]と自由電子の強磁性の論文はスイスの Zürich からそれぞれ 1928 年 12 月と 1929 年 6 月に，スピン波の論文はオランダの Utrecht から 1930 年 1 月に，異方性の論文と磁壁の論文はふたたび Leipzig からそれぞれ 1931 年 2 月と多分 9 月に，投稿されている。Heisenberg のもとを巣立った若き Bloch がヨーロッパ各地を武者修行してまわりながら着々と仕事をしあげてゆくさまがうかがわれて興味深い。

以上，Heisenberg の強磁性理論発表の前後にヨーロッパであらわれた数編の論文[320]を通じて分ることは，ここに紹介した人々に代表されるようなヨーロッパの磁気研究者たちが，まず Weiss 理論をよく実験にあう理論だと認識していたこと，Heisenberg の強磁性理論があらわれる以前にも強磁性が交換相互作用の関与する現象であろうと洞察ないし予感していたこと，Heisenberg 理論を分子場に対する量子力学的裏付けとして基本的に（Heisenberg 理論のもつ定量的な不充分さに対する指摘に強弱の差はあれ，その根本のところはほとんど全面的に）受け容れたこと，（部分的修正は基本的受容の上にたってのことであること），強磁性の本質的な問題は磁気の担い手の問題と分子場の本性の問題であるとのほぼ共通した問題意識をもっていたこと，そして何よりも，強磁性の問題を単に強磁性の問題としてのみとらえるのではなく，量子力学の巨視的な系に対する有効性の 1 つの試金石としてとらえていたこと，等々である[322]。

さて，ヨーロッパにおけるこのような状況と比較して，日本における受けとりかた，すなわち本多の受けとりかた[223,326,182]はどのようなものであったろうか。次回はそのあたりから説きおこしたい。

（未完）

（今回の冒頭で「まず広根の仕事を追うことからはじめたい」と書きながら，その前にちょっとヨーロッパにおける状況を一瞥しておこうと取りかかった解説に予想外の時間と紙数をついやして，広根・彦坂にまで筆の及ばないまま，これまで私がほぼ 1 回分と想定して書いた量の 2 倍半をこえる量となってしまった。今回はとりあえずここまでとしたい。）

註ならびに文献

214) この一文は『物性研究』31 No.1（1978年10月），No.5（1979年2月），33 No.1（1979年10月），35 No.1（1980年10月）所載の第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ部のつづきである。

215) T. Hirone, T. Hikosaka "Zur Theorie des Ferromagnetismus" Z. Phys. 73 62－73 (1931)。

216) 宮原将平「回顧と展望」『物性』13 354－360 (1972)，357頁左段。

217) 宮原のこの見解には同意しがたい。勝木渥「広根・彦坂は異端の芽か？」『物性研究』29 93－107 (1977) を見よ。

218) 河宮信郎「『回顧と展望』への感想」『物性』13 589－591 (1972)。

219) 宮原将平「本多スクールと Weiss-Heisenberg 理論」『物性』13 591－593 (1972) 593頁。なお，のちに宮原は茅が初期に Weiss 理論に疑念を表明していたこと[220] を指摘している[221]。

220) 茅誠司「磁気と其測定法（Ⅰ）」『金属の研究』4 157－166 (1927)，158頁。

221) 宮原将平「日本の磁気学の100年 ──研究者のみたもの──」『日本応用磁気学会誌』2 29－32 (1978)。

222) 文献215。この論文は私の調べた限りでは広根の第2論文であり，これに先立って広根には1929年に本多・大久保と連名での，鋼の磁化の際の熱の発生に関する論文[223]がある。1976年秋の広根へのインタビューにこたえて広根は，広根が1931年9月に理研本多研究室の助手として理学部物理教室の大久保研から金研の本多のもとに移るまでは，本多とは全然関係なかったと語った[224]けれども，本多のもとに移る以前に上記の論文がある。もっともこの論文の発表は1929年（論文の末尾に Sendai, July, 1929年と，発信の場所と時が示されている）で，ちょうど広根の病気療養の時期（1929年4月 ── 1930年3月，文献217の註23参照）と重なっている。発病前に大久保のもとで広根のやった実験に基づいて大久保が本多・広根との連名の論文にまとめたものであろうか。そのために，広根には，本多研に移るまでは自分は本多とは無縁であったと思えていたのであろうか。

223) K. Honda, J. Ôkubo, T. Hirone "On the Heat-Evolution during the Magnetisation of Steels" Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 18 409－418 (1929)。

224) 「物性研究史聞書きノート」勝木－Ⅱ（1976年10月5日，広根徳太郎その1）6～

7 頁，発言 27～39，特に 27, 37 [225]。

225)　この「ノート」は，今のところ私的な研究ノートとしての性格をもつものであるが，自分の心覚えのために，頁と整理番号をつけておいた。しかるべき資料センターのような所ができて，公開・利用できるようになることが望ましいと思う。

226)　T. Hirone "Some Problems on the Theory of Ferromagnetism" Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **23** 523－536 (1934)。

227)　広根徳太郎「強磁性体の電気抵抗の異常に関する簡単なる理論」『理研彙報』 **14** 1－4 (1935)，（昭和 9 年 11 月 2 日受理）。

228)　T. Hirone "A Simple Theory on the Anomaly of Electric Resistance of Ferromagnetic Substances" Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **24** 122－127 (1935)。

229)　広根徳太郎「ニッケル及びニッケルを主成分とする二，三の合金の磁性について」『理研彙報』 **16** 1409－1418 (1937)，（昭和 12 年 10 月 15 日受理）。 これを英文にした論文[230]が翌年に出た。

230)　T. Hirone "On the Magnetic Properties of Nickel and Nickel Rich Alloys" Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **27** 101－114 (1938)，（1938 年 1 月 25 日受理）。

231)　W. Heisenberg "Zur Theorie des Ferromagnetismus" Z. Phys. **49** 619－636 (1928)。

232)　多電子系の交換エネルギーの固有値が付加定数を別にして $-\sum_{\{i,j\}} 2J_{ij}\, \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j$ の固有値に等しいことを最初に示したのは Dirac であった[233]。私にはいわゆる Heisenberg Hamiltonian は Heisenberg-Dirac Hamiltonian とよばれるべきであるように思われる。なお，日本で，この Dirae の論文を一番はじめに読んで紹介したのは小谷正雄である（文献 217 の註 20 参照）。

233)　P. A. M. Dirac "Quantum Mechanics of Many-Electron System" Proc. Roy. Soc. A **123** 714－733 (1929)。

234)　私が大学後期（旧制 3 年）に在学している頃"Collected Papers on Ferro-and Antiferromagnetism" と題する小型（A 5 版程度の大きさ，14.5 cm× 21 cm，厚さ 1.5 cm，322 頁）の論文選集が出た。名大 S 研には 1952 年 11 月 7 日から 1958 年 12 月 10 日までの研究室ノート（研究室会議議事録）全 3 冊が残っていて，その最も初期の部分（1952 年 11 月 7 日，10 日）には，Helium, Magnetism, Superconductivity の 3 つが研究室としてアタックすべきテーマとしてあげられ，それぞれどんな問題があ

るかということとそれを手がける分担者の名前が列記され，またそれぞれの分野における基本文献がリスト・アップされている。その強磁性の部分にあげられた文献のかなりのものは上記 Collected Papers（われわれは「マグネのコレペ」あるいは単に「コレペ」と略称していた）に採録されているものである。マグネの勉強にこの「コレペ」は大いに活用された。その中のやさしいものは後期学生（あるいは大学院1年になっていたか）の輪講で読まれ（たとえば Van Vleck の反強磁性の論文，J. Chem. Phys. **9** 85－90（1941）），あるものは研究室の輪講会で読まれた（私は今ソニーにいる満間猛氏が Bloch のスピン波の論文，Z. Phys. **61** 206－219（1930）を研究室の輪講会で読んだのを覚えている）。しかし研究室の輪講会でも学生の輪講でも Heisenbergの最初の論文はとりあげられなかった。そんなことで，多分もう大学院に入ってからだったと思うが，同級生たちで自主的にやっていたゼミで Heisenberg のこの論文もやろうということになり，盲蛇に怖じずで私がそれをひきうけた。前もって Van Vleck の本 " The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities "（まだ訳本は出ていなかった）の第12章で Heisenberg の強磁性理論のことをしっかりとよく予習し，それをよく理解した上で[235] Heisenberg の原論文にとりついてびっくりした。Van Vleck で勉強したHeisenberg 理論とは似ても似つかぬ代物ではないか！ 何が何やらさっぱり分らない。ついに降参して原論文を読むことはあきらめて，Van Vleck の本[236] の Heiseberg 理論の紹介でお茶をにごしたら，勉強家の御子柴宣夫が最後にひとことときついことを言った，「どうせ読むなら，ちゃんと原論文を読んで紹介してくれよ。」この小論で Heisenberg の議論の展開をやや詳しく追うことにしたのは，何よりも広根－彦坂の理解のためにそれが不可欠だからであるが，当時の同級生たちへの28年ほどおくれたレポートというつもりがなくもない。そしてまた，しかるべき磁性の教科書で磁性を勉強した若い人たちのうちのきわめて例外的な奇篤な人がこの有名な Heisenberg の原論文をひもといてみようという気を起こすことがあるかも知れない，そんなときに，それを読むための道しるべとして多少でも役に立てば，というつもりもある。

235) Van Vleck の本には Heisenberg の原論文にほぼ即した Heisenberg の強磁性理論の紹介もなされている（§77）。どうも私は Heisenberg の論文を $-\sum_{\{i,j\}} 2J_{ij}\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j$ の形の交換エネルギーを導出した論文であろうと予測して，§76 の Heisenberg Exchange Effect の所だけを勉強して（§77は読まずに）Heisenberg の論文にとりついたのだったらしい。私がそれでお茶をにごした Van Vleck の議論の紹介も§76の所であって，§77に及ばなかったと思う。今ざっと§77を眺めてみるに，当時の私の能

力からみて，私が§77を読みこなしえたとは全く思えない。多分§77 をみても何のことやらさっぱり分らず，§77は読まずに，§76だけを読んでHeisenbergの原論文にくいつこうとしたのであろう，Heisenberg の原論文に書いてあるのは§77をもっと分りにくくしたような話だなどとは夢にも思わずに。

236)　小谷正雄は，来日して直接強い印象を与えたHeisenbergとか Dirac とかは別として，具体的な研究とか学風というようなことでは，「Van Vleck にずいぶん影響をうけたような気がする。物性論的な面白さというような事を感じたのは，Van Vleck の本を読んでからくらいだ」と述懐している[237)]。この本がのちに小谷らによって訳出される[238)]のは，小谷のこのような気持ちによってであろう。また，久保亮五は Van Vleck の本について「これは理論専門家には必読の書とされていたが，磁性研究者はどれほどよんだか」とコメントしている[239)]。久保の若かりし頃，Van Vleckの本が理論家には「必読の書とされていた」ことには，小谷の影響ないし小谷の主張の反映があったのではないかと想像される。

237)　「物性研究史聞書きノート」勝木－Ⅷ（1977年6月15日，小谷正雄・犬井鉄郎）22頁，発言 493, 495 [225)]。

238)　小谷正雄・神戸謙次郎共訳，ブァン・ブレック『物質の電気分極と磁性』（吉岡書店，1958）。

239)　「物性研究史聞書きノート」勝木－Ⅰ（1976年7月18日，宮原将平・久保亮五）4頁。宮原の発言51につけた勝木の註への校訂の際の久保のコメント[225)]。宮原が「Fröhlich の“Elektronentheorie der Metalle”が当時よく読まれた」（発言51）と述べたのへ勝木が「この対談では全然出てこなかったが，Van Vleck の本が磁性研究者にどのように読まれたかも調べておくべきであろう」と註をつけておいた，その註に対する久保の朱書。

240)　W. Heitler, F. London “Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik” Z. Phys. **44** 455－472 (1927)。

241)　かれらの論文を一々ここにあげることは省略する。Heisenberg の原論文の引用文献欄を参照されたい。

242)　$(n+s)$ 個の原子が上向きスピンの電子をもち，$(n-s)$ 個の原子が下向きスピンの電子をもつとき，全系の全スピン磁気量子数 s_z は s に等しいが，このような場合の数は ${}_{2n}C_{n+s}$ 通りある。$s_z=s+1$ の状態は ${}_{2n}C_{n+s+1}$ 通りある。$s_z=s$ の状態は全スピン量子数が s 以上であるときにあらわれ，$s_z=s+1$ の状態は全スピン量子数が s

より大きいときにあらわれるから，前者の場合の数から後者のそれを差引いたものが，全スピン量子数が s であるような場合の数，すなわちそのような多重項の数に等しい。$n=2$ の場合を例にとってみよう。4個の電子のスピンの各々を上か下かに向けた 16 通りの場合の全スピン磁気量子数 s_z をみてやると，$s_z=\pm 2$ が各々1通り，$s_z=\pm 1$ が各々4通り，$s_z=\pm 0$ が6通りある。これから5重項が1つ，3重項が3つ，1重項が2つあることが分る。この場合，次註に示す Heisenberg の用語を用いれば，1個の5重項が $s=2$ なる Termsystem をつくり，3個の3重項が $s=1$ なる Termsystem をつくり，2個の1重項が $s=0$ なる Termsystem をつくるわけである。

243) Heisenberg は“……全スピンモーメント s の各々の値に1つの Termsystem(„σ”) が属する……”という言い方をしているが，私の理解に基づいて，私なりの表現をしてみた。なお，Termsystem という単語もいささか冗長に訳してみた。以下必要があれば“項の系”または“項体系”という訳語を用いる。

244) Heisenberg の原論文にある番号つきの式は，その番号の前にHをつけてあらわすことにする。

245) 私が勝手に“置換積分”という語を用いた。もちろん J_{E} =クーロン積分，$J_{\text{互換}}$=交換積分，である。

246) このような近似をやっているので，状況の理解のために n の小さい場合について具体的にやってみて，(H・14)，(H・17) 式と比べてみても，うまく合わない。

247) 原論文 632 頁，4～7行。

248) ただし Heisenberg はまだ Bohr 磁子ということばも μ_{B} という記号も用いていない。$2\mu_{\mathrm{B}}$ の代りに，電子の質量を μ として，$\dfrac{e}{\mu c}\dfrac{h}{2\pi}$ と書いている。

249) この式をも含めて Heisenberg が番号をつけていない原論文の3つの式を詳しく論ずる必要があるので，原論文ではあらわに書くことを省略してある1つの式 (H・20c) をおぎなって，(H・20a)～(H・20d) という式番号をつけておくことにする。

250) 部分積分

$$\int g(x)\,f'(x)\,dx=[\,gf\,]_{\text{下限}}^{\text{上限}}-\int g'(x)\,f(x)\,dx$$

で，x の変化が有限量ずつ起こるとして，これを和の形になおせば，和の上限，下限を適当にとって

$$\sum_s g(s)\,\varDelta f(s)=[\,gf\,]_{\text{下限}}^{\text{上限}}-\sum_s \varDelta g(s)\,f(s)$$

のような形になることが期待される。（H・20a）式で $f(s)=\binom{2n}{n+s}$，$\Delta f(s)=f(s+1)-f(s)$ とおけば，右辺の s での和は $-\sum_s g(s)\Delta f(s)$ と書ける。上記の関係式を念頭におけば，これは $-[gf]+\sum \Delta g\cdot f$ のような形となるであろう。具体的には（H・20a）の右辺の s についての和の各項に $g(s+1)f(s+1)$ を足して引くことによって

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}\sum_{s=|m|}^{n}[g(s)\{f(s)-f(s+1)\}+g(s+1)f(s+1)\\
&\qquad\qquad\qquad -g(s+1)f(s+1)]\\
&=\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}[\sum_{s=|m|}^{n}\{g(s)f(s)-g(s+1)f(s+1)\}\\
&\qquad\qquad +\sum_{s=|m|}^{n}\{g(s+1)-g(s)\}f(s+1)]\\
&=\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}\{g(|m|)f(|m|)-g(n+1)f(n+1)\}\\
&\qquad\qquad +\sum_{m=-n}^{n}\sum_{s=|m|}^{n} e^{\alpha m}\{g(s+1)-g(s)\}f(s+1)
\end{aligned}
$$

を得るが，第1項は，$f(n+1)=0$ であり，また $g(s)$，$f(s)$は偶関数であるから，$\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}g(m)f(m)$に等しく，（H・20b）の第1項すなわち S_1 を与える。第2項は和の順序を入れかえれば（H. 20b）の第2項すなわち S_2に等しい。Heisenberg のやった“部分積分に似た変形”とは多分このような計算であったろう。

（H・20a）から（H・20b）を導くもう1つの方法がある。すなわち，$s=|m|$ の項だけをまずとり出して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=-n}^{n}\sum_{s=|m|}^{n} e^{\alpha m}g(s)\{f(s)-f(s+1)\}\\
&\quad=\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}g(m)f(m)+\sum_{m=-n}^{n}\sum_{s=|m|+1}^{n} e^{\alpha m}g(s)f(s)\\
&\qquad-\sum_{m=-n}^{n}\sum_{s=|m|}^{n} e^{\alpha m}g(s)f(s+1)
\end{aligned}
$$

と変形し，第2項で $s-1$ をあらためて s とかき，第3項で $s=n$ の項が0 であることを考慮して

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m}g(m)f(m)\\
&\qquad+\sum_{m=-n}^{n}\sum_{s=|m|}^{n-1} e^{\alpha m}\{g(s+1)-g(s)\}f(s+1)
\end{aligned}
$$

を得，第2項の和の順序を入れかえて

$$= \sum_{m=-n}^{n} e^{\alpha m} g(m) f(m) + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=-s}^{s} e^{\alpha m} \{ g(s+1) - g(s) \} f(s+1)$$

を得る。これは(H•20b)式に等しい。ただ Heisenberg の原論文の式で第2項の s についての和が0から n までとられるのに，上式の第2項では0から($n-1$) までしかとられていない[251]。もっとも，$s=n$ の項は0になるから，あってもなくても同じである。

251) 日本物理学会発行の新編物理学選集 36「強磁性理論」(柳瀬章責任編集)所収の Heisenberg の論文では(H•20b)，(H•20d) 式の s についての和の上限の n が $n-1$ と書きなおされている。編集者またはこの論文の原版を提供した人が，多分第2の計算法で計算をチェックして，s についての和の範囲を書きなおしておいたのであろう。Z. Phys. の大元の論文では s の和の上限は n になっている。「マグネのコレペ」(註 234 参照)では和の上限は書き直されておらず，Z. Phys. の論文のままである。

252) 原論文 629 頁 16 ~ 20 行。$(n-s)/(n+s) \sim 1$ と近似すると

$$S_2 \sim -\sum_{s=-n}^{n} e^{\alpha s} g(s) \binom{2n}{n+s}$$

が得られる。これは s を m と書き直せば S_1 と同じ形をしている，マイナスがついてはいるけれども。

253) (H•20)式から(H•21)式へいたる式の変形も Heisenberg の強磁性の論文の1つの重要なポイントだと思うので，註 250 ~ 252 で，やや詳しく計算の過程を考察しておいた。

254) 強磁性理論のその後の展開はこういう方向はとらなかった。Heisenberg の原論文がわれわれになじみにくいのは，このことにもよっているだろう。武藤俊之助[255]によれば，Peierls が $\overline{\Delta E_\sigma^3}$，$\overline{\Delta E_\sigma^4}$ 等を実際計算して調べてみたが，その結果，$\overline{\Delta E_\sigma^3}$ 等を考慮しても強磁性の理論において本質的改良は得られなかったそうである。武藤は引用した Peierls の論文を明示していないので私はまだその Peierls の議論を具体的には知らない。1928 年から 1934 年までの Ann. der Phys. と Z. Phys. の著者索引と表題とを見た限りでは，武藤の上記言及に該当すると覚しき Peierls の論文をみつけることはできなかった。ロンドン物理学会による「磁性の討論」のレポート(Proc. Phys. Soc. 42 356 (1930))，ソルヴェイ会議の報告 “Le Magnétisme” (1932)，アメリカ物

理学会の「強磁性シンポジウム」(Phys. Rev. **39** 337 (1932)) を武藤は引用しているから，あるいは前2者のどちらかに Peierls の報告があるのかも知れない(最後のものにはなかった)。原島鮮[256]が1932年に Epstein の強磁性の論文[257]を紹介しているが，その末尾に Peierls が近着の Zentralblatt für mathematik und ihre Grenzgebiete **5** 40 (1932) でこの Epstein の論文を紹介し，方程式の解が完全でないことを非難している旨の付記がある。あるいはその中で武藤のいうようなことがなされているのかも知れない。

255) a) 武藤俊之助「強磁性結晶の量子理論」『日本数学物理学会誌』**8** 467－498 (1934)，477頁7－9行。

b) 武藤俊之助『強磁性の量子理論』(岩波書店，科学文献抄 1，1936)，33頁13－17行。

256) 原島鮮 (論文紹介)『日本数学物理学会誌』**6** 219－225 (1932)，225頁。

257) P. S. Epstein "On Ferromagnetism and Related Problems of the Theory of Electrons" Phys. Rev. **41** 91－109 (1932)。

258) Heisenberg は，Heisenberg 理論と Weiss 理論の関係については，論文の冒頭の要約のところで" Weiss の分子力を量子力学的交換現象に帰着せしめる"と書き，また§3 " 統計；Weiss の式との関係" の中で，Heisenberg の得た (H・22) 式あるいは (H・24) 式は Weiss の式と本質的に同じである，Weiss の場合の $\coth x - \frac{1}{x}$ の代りに $\tanh x$ があらわれていることと，(H・24) の第Ⅱ式に3次の項があらわれていることが Weiss の式とちがっているが，と述べているが，Weiss の分子場と J_0 との関係をあらわに与えることはしていない。Weiss の分子場係数を a とし，分子場が全系の磁化 $M=2m_0\mu_B$ を用いて aM とあらわされるとすると，(H・24) のⅠ式の x は $\mu_B(H+aM)/kT$ と書かれるべき量に相当するから，(H・24) の第Ⅱ式の左辺を $2\mu_B(H+aM)/kT$ とおき，α, β, y を (H・19) および (H・23) を用いて書きなおすと，結局

$$a=\frac{zJ_0}{4n\mu_B^2}\left[1-\frac{J_0}{kT}+\frac{J_0}{2kT}\left(\frac{m_0}{n}\right)^2\right]$$

が得られる。これが分子場係数を交換相互作用に結びつける式である。つまり分子場係数は定数ではなく，温度および磁化に依存する形になっている。

259) F. Bloch "Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern" Z. Phys. **52** 555－600 (1928)。

260) 私はこのことを1979年12月2日～4日に名古屋で開かれた「固体物理学(物性論)

史研究ゼミナール」[261] での Hoddeson の講演によって知った。このときの講演の内容と同じ話を Hoddeson は同じ表題で Proc. Roy. Soc. に書いている[262]。

261) 1979年9月から80年1月にかけて学振の招きで来日して名大理学部物理教室S研に滞在したG. Baym に同行して，アメリカの物性物理学史研究家L. Hoddeson (Baym 夫人) が来日し名古屋に滞在した。この Hoddesonと日本の物性物理学史研究志向グループとが共同で，名大工学部の河宮信郎を世話役として，名大S研の厚意のもとに開いたごくごく小規模の国際的な研究会が，この名古屋での「固体物理学 (物性論) 史研究ゼミナール」であった。これは，1972年11月に物性研短期研究会として開かれた「本多光太郎研究会」を第1回のそれとして数えることができるならば，わが国における2回目の「物性物理学史」の研究会であった (3回目は1980年8月に松本で開かれた「物性物理学史研究会」—『日本物理学会誌』 **35** №.12「学界ニュース」欄参照)。この名古屋ゼミナールについては，参加者の1人，広川俊吉 (名大工) が『物理学史通信』№.22 (1980. 1. 31付) に簡単な報告を書いている。また，同じく参加者の白鳥紀一 (阪大理) と目片守 (京大理) によって，このゼミナールでの Hoddesonの講演のひとつがそれへの参加者から出されたコメントをも含めて「ベル研究所の誕生からトランジスタまで」と題して『固体物理』 **15** №.9 (1980年9月号) に紹介・報告されている。

262) L. Hoddeson, G. Baym "The devlopment of the quantum mechanical electron theory of metals : 1900－28." Proc. Roy. Soc. A **371** 8－23 (1980)。この雑誌のこの論文の載った号 (№.1744, 1980年6月10日発行) は Mott が主宰して1979年4月30日～5月2日にロンドンで開いた「固体物理学の草分けの頃 (The Beginnings of Solid State Physics)」と題するシンポジウム[263]の報告にあてられている。1981年春の物理学会年会 (広島) で" Recollections of the early days of quantum mechanics" を語った Peierls は，ロンドンでは "Recollections of early solid state physics" を語った。

263) このロンドンでのシンポジウムが開かれたことを私 (われわれ) が知ったのは，1979年12月の前記名古屋ゼミナールのとき，Hoddeson の口を通してであった。これらのことからも分るように，最近，現代物理学史研究の一環として，物理学の発展に貢献した人々のインタビューをとりライブラリーをつくろうという活動が次第に拡がりつつある。Hoddeson はアメリカ物理学会 (American Institute of Physics, AIP) の中にもうけられた物理学史センター (Center for History of Physics) による現代物理学の資料の収集・保存計画の中で物性部門を担当している人である。世界的な規模での現

代物性物理学史の解明がなされるべきであるとするならば，欧米とならんでわが国における それの解明もまた不可欠であろう。Hoddeson から欧米におけるこれらの動きを知らされたとき，それらの動きをほとんど知らないままそれとは完全に独立にはじめたわれわれのごくささやかな仕事が，この方面の分野で日本が完全に空白のままであることを辛うじて防ぐことになっていたことを知って，私はいささか意を強くした。とはいえ，日本での仕事はまだその量も少なくかつ散発的であり，欧米に比して大きく立ちおくれている。副業ないし兼業としてではなく，専業としてこのような仕事に打ち込もうという人がもし10人もいたら，この分野での仕事の発展はおそらくめざましいものが期待されるであろう。

264) E. Fermi “Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases” Z. Phys. **36** 902－912 (1926)。

265) W. Pauli “Über Gasentartung und Paramagnetismus” Z. Phys. **41** 81−102 (1927)。

266) A. Sommerfeld “Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik. I. Teil : Allgemeines, Strömungs- und Austrittsvorgänge” Z. Phys. **47** 1－32 (1928)。

267) W. V. Houston “Elektrische Leitfähigkeit auf Grund der Wellenmechanik” Z. Phys. **48** 449－468 (1928)。

268) J. Dorfman, R. Jaanus “Die Rolle der Leitungselektronen beim Ferromagnetismus. I. Teil” Z. Phys. **54** 277－288 (1929)。

269) C. Lapp, C. R. **186** 1104 (1928) ; P. Weiss, R. Forrer, Ann. de Phys. **5** 153 (1926)。文献268による孫引き。

270) J. Dorfman, I. Kikoin, “Die Rolle der Leitungselektronen beim Ferromagnetismus. II. Teil” Z. Phys. **54** 289－296 (1929)。

271) Dorfman と Kikoin は，この式の導出を L. Landau 氏に負うている，と註をつけている。のちに Stoner は強磁性体の性質を論じた論文[272]の中で Curie 点におけるモル比熱のとび（Stoner はそれを（$\Delta S_M)_{T=\theta}$ という記号であらわした）の量子論における表式が

$$(\Delta S_M)_{T=\theta} = \frac{5R}{2}\,\frac{j^2+j}{j^2+j+\frac{1}{2}}$$

(Stoner の論文の (35) 式) であることを示した所へ“This formula is quoted by J. Dorfman and I. Kikoin”と註をつけているが，この式を最初に与えたのは Dorfman と Kikoin (したがって Landau) であるのか，あるいは，方向量子化さえやれば易しく導ける式なのでとりたてて誰が一番さきにこの式を論文に書いたかなどとは言わずもがなのことなのか。

272) E. C. Stoner, “The Magnetic and Magnetothermal Properties of Ferromagnetics” Phil. Mag. 10 27－48 (1930)。

273) かれらは Bohr 単位 (Bohrsche Einheit) という用語を用いている。私の知るかぎりでは Bohr 磁子ということばを用いた一番古い論文は，Pauli の有名な Pauli 常磁性の論文で，そこでは $\mu_0 = eh/4\pi m_0 c$ を Bohrsches Magneton とよんでいる[274)]。

274) 文献 265 の 99 頁 10 行目。

275) 文献 266 の Sommerfeld の論文，および文献 265 の Pauli の論文。

276) この引用文を含む段落の末尾に註をつけてかれらは，この考察を J. Frenkel 教授に負う，と述べている。伝導電子が，強磁性に本質的な役割を演ずるがゆえに，自由電子ではありえず (自由電子間には交換効果が生じないから)，自由電子でないから閉じていない量子軌道を運行する，という論理は，とくに自由電子の量子軌道は閉じていることを暗黙裡に前提としているがゆえに，自由電子の波動関数が平面波 $e^{ik\cdot r}$ であることを知っているわれわれにはいささか奇異にみえる[277)]。しかし，Frenkel が Heisenberg の強磁性理論の論文があらわれる直前に発表した金属の磁気的・電気的性質に関する論文[278)]を読むと，その論理を理解することができる。

277) Dorfman と Kikoin がレニングラードからこの論文を発信したのは 1928 年 12 月 31 日であり，他方 Bloch の結晶内電子に関する論文[259)]の刊行は 1928 年 12 月 17 日であるから，Dorfman と Kikoin，さらに Frenkel はまだ Bloch のこの論文を知らなかった。Pauli の論文[265)]にも Sommerfeld の論文[266)]にも，自由電子の波動関数は与えられていない。結晶内自由電子の波動関数が平面波 $e^{ik\cdot r}$ であることを示したのも Bloch[259)] である。

278) J. Frenkel, “Elementare Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur” Z. Phys. 49 31－45 (1928)。この論文は1928年 3 月発信，3 月 30 日受理，1928年 6 月 8 日に刊行された (Heisenberg の強磁性理論の論文[231)]の刊行は 7 月 16 日)。

この論文で Frenkel は，問題を絶対零度にかぎることによって，きわめて簡単に

Pauli の常磁性磁化率の式を導出してみせる。Pauli が有名な Pauli 常磁性をみちびいた[265]のは，Pauli の問題意識に即していえば，アルカリ金属の温度によらない常磁性磁化率の理論的説明のためというよりは，Fermiの1原子理想気体の量子統計の理論[264]を角運動量をもつ原子より成る理想気体に一般化したときどうなるかというのがかれの主題であり，そのようにして得た彼の表式を角運動量をもつ原子より成る理想気体の一例としての金属内自由電子気体に適用してそれが実験とよく合う結果を与えることを示して，Fermi-Pauliの量子統計理論の正しさを誇示するためであった(ように私には思われる)。その道具立てはかなり仰々しい。問題を絶対零度に限ればこのような統計的方法でなしに準静的な方法で，つまり磁場をかけたときエネルギーが最小になるように電子を再配置させることによって，Pauli の式が簡単に導き出せるとして Frenkelは次のような議論を展開する。Pauli-Fermi の気体統計の基礎的な考え方は，位相空間の体積 h^3 の細胞にたかだか2個の電子しか存在しえないという点にある。その2個の電子はそれの磁軸が互いに逆を向いている。Frenkel はこの電子の対を“磁気的な夫婦 magnetisches Ehepaar”と形容している。絶対零度では全エネルギー最小の状態が実現する。ところで位相胞の形状は任意だから，それを金属の全体積 V と運動量空間における同心球殻との積と考える。つまり運動量空間を体積 h^3/V ごとの同心球殻($4\pi p^2 \Delta p = h^3/V$)に区切ってゆく。電子数を N とするとき，最外殻すなわち中の方から数えて $Z_0 = N/2$ 番目の殻の半径 p_0 は

$$\frac{4\pi}{3} p_0^3 = \frac{h^3}{V} Z_0 = \frac{h^3 N}{2V}$$

で与えられる。運動量空間におけるこのような同心球殻の様子は1つの原子における電子の配分の様子と全くよく似ている。つまり，金属の場合の運動量空間の中心の“静止殻”($p=0$)は原子における一番内側の“K殻”に対応し，運動量空間での半径 p_0 をもつ最外殻は原子における一番外側の“価電子殻”に対応する。さて，金属を磁場中に入れると，最外殻 Z_0 にある電子のうち1つが(Z_0+1)番目の殻に移って運動エネルギーは増大するが2個の電子が磁場方向にそろうことによって $2\mu H$ だけ磁気エネルギーが減少する(μ は電子の磁気モーメント)。(Z_0-1)番目の殻にあるそれは(Z_0+2)番目の殻に，かくの如くして運動エネルギーの増大と磁気エネルギーの減少とが等しくなる(Z_0-Z+1)番目の殻のそれの(Z_0+Z)番目の殻への移行にいたる。$Z \ll Z_0$ であるから，問題になっている殻のエネルギー準位が $\Delta\varepsilon_0$ の等間隔でならんでいると見なせば，平衡状態で

$$2Z\Delta\varepsilon_0 = 2\mu H\ ,$$

また，金属全体の磁化 M は

$$M = 2Z\mu$$

であり，フェルミ準位のところでのエネルギー準位間隔は

$$\Delta\varepsilon_0 = \frac{1}{m_0}\ p_0\Delta p_0 = \frac{4}{3}\ \frac{\varepsilon_0}{N} \quad (\ \varepsilon_0 = \frac{p_0^2}{2m}\ )$$

であるから，これらを用いて磁化率 κ を算出すると

$$\kappa = \frac{3}{2}\frac{\mu^2 n}{\varepsilon_0} \quad (\ n = N/V\ )$$

を得るが，これは Pauli の結果と完全に一致する。

この Frenkel のやり方は，今日われわれが学生たちに最も簡単に Pauli 磁化率を導いてみせるときにやるやり方，つまり放物線型の状態密度を用いてフェルミ準位まで電子をつめ，ある磁場のもとでフェルミ準位近傍のスピン下向き電子をスピン上向きバンドに移した時の運動エネルギーの増大と磁気エネルギーの減少を天秤にかける，そのときフェルミ準位近傍で状態密度を一定とみなす，というやり方と完全に同等である。

さらに Frenkel はエネルギー準位等間隔の近似をやめ，電子再配置 (Frenkelはこれを外側の方の Z 個の“夫婦 Ehepaar” の離別 Trennung と表現している) 後の，($Z_0 - Z$) 番目の殻 (半径 p_1) から ($Z_0 + Z$) 番目のそれ (半径 p_2) までの $2Z$ 個の殻にある $2Z$ 個の電子の運動エネルギーを

$$L_1 = \int_{p_1}^{p_0} \frac{1}{2m} p^2\ \frac{4\pi V}{h^3} p^2\, dp$$

と

$$L_2 = \int_{p_0}^{p_2} \frac{1}{2m} p^2\ \frac{4\pi V}{h^3} p^2\, dp$$

との和として与え，再配置による運動エネルギーの増加 $\Delta L = L_2 - L_1$，これは

$$\Delta L = L_0 \left[\frac{1}{2} (\ 1 - \frac{M}{\mu N}\ )^{5/3} + \frac{1}{2}(\ 1 + \frac{M}{\mu N}\ )^{5/3} - 1\ \right] \qquad (\mathrm{F}\cdot 8)^{279)}$$

とかける，と磁気的エネルギーの減少 $-MH$ とによるエネルギー変化 $\Delta W = \Delta L - MH$ を最小にする条件 $\partial\Delta W / \partial M = 0$ から H と M との関係として

$$H=\frac{5}{6}\ \frac{L_0}{\mu N}\left[\left(1+\frac{M}{\mu N}\right)^{2/3}-\left(1-\frac{M}{\mu N}\right)^{2/3}\right] \qquad (\mathrm{F}\cdot 9)$$

を導出している。ここで

$$L_0=\int_0^{p_0}\frac{1}{m}p^2\frac{4\pi V}{h^3}p^2dp$$

である。

このFrenkelのやり方も，今日の放物線型状態密度を用いてのやり方と完全に同等である。

Frenkelがここで展開した議論の背後においた考え，すなわち，孤立原子における電子の閉殻構造と類比させての金属内自由電子の運動量空間における球殻構造という考えから分るように，Frenkelは自由電子の量子軌道を閉じたものとして思いえがいていたのである。そして，この考えにもとづいて，Pauli常磁性はかくも簡単にみごとに導出された。おそらくFrenkelはかれのこの考えに大いに自信をもったことであろう。

常磁性につづいて，Frenkelは強磁性を論じて以下のような議論を展開する。常磁性の議論の際には自由電子相互間の，あるいは自由電子と束縛電子との，何らかの相互作用を考慮しなかったが，この相互作用による内部エネルギーは一般に位置だけではなく電子相互間の相対的な方向にも依存する。この内部エネルギーの電子の方向づけの依存性を調べることは容易ではないが，一般に内部エネルギーが電子の方向づけによって生ずる“自発”磁化の減少関数(下線はFrenkelが活字の間隔をあけて強調している部分)でなければならないことは確かだろう。非閉殻をもった孤立原子では最低エネルギー準位は最高多重項に対応するという周知の事実(Hundの規則)はこのことによっている。Pauli原理の金属電子への適用からも同様なことが期待されるが，孤立原子と金属との主要なちがいは，金属では自由電子の並進運動が何ら磁気モーメントを生じない点にある。しかし，孤立原子におけると同様，金属において自由電子の s-ベクトル相互間の結合が生じ，さらに陽イオンが閉殻をもたない場合は(下線は，前述の意味で，Frenkel)自由電子の s-ベクトルと非閉殻をつくる束縛電子の s-ベクトルとの間の結合が生じる。その結果としてイオンもある方向を向き，そのことから全体としての金属の自発磁化が生ずる(ここの所でFrenkelは，この考察がDorfmann博士との突込んだ討論に負うていることと，この討論に基づいてこの論文ができたことを註記している)。自由電子の方向づけは自由電子の運動エネルギーの増大をともなうから，前述の

常磁性の場合と同様，一般には外側の運動量殻に属する電子の方向づけだけが起こる。しかし，若干の金属において，電子の方向づけによって生ずる電子相互のポテンシャル（下線は，前述の意味で，Frenkel）エネルギーの減少 ΔU が対応する運動エネルギーの増大 ΔL よりつねに大きい（常磁性の場合にも外部磁場が非常に大きい場合にこういうことが起こる），という事が除外されているわけではない。この時，絶対零度で，強磁性体に特徴的な飽和現象が生ずる。

このFrenkel の議論の中には，後年の Slater の Ni の強磁性の論文[280]にみられる考え方の萌芽に相当するものが見られるといってよいであろう。

Frenkel は，さらに論をすすめて，上述の考察が強磁性（下線は，前述の意味で，Frenkel）の定量的な説明に対する鍵を提供すると思われると述べたのちに，この説明への量子論の特別の役割は，新しい Pauli-Fermi 統計の導入（これは量 ΔL にあらわれる）だけにあるのではなく，Heisenberg の共鳴現象（下線は，前述の意味で，Frenkel），これは種々の電子の同一性から結果するもので適当な条件下で，“磁気的”エネルギー ΔU にきわめて大きな負の値を与える，を考慮することにもあるのだ，ここで形容詞“磁気的”は勿論その字義どおりに解されるべきではない，Heisenberg の多重項理論や Heitler-London の同極分子の理論におけると同様，ΔU は電気的（クーロン）エネルギーすなわち電子の部分的な（事実上完全な）方向づけによってあらわれた付加的な電気的エネルギーをあらわすものだ，と明言している。

このように Frenkel は，Heisenberg の強磁性理論にわずかに先立って，強磁性の本質に対する正しい洞察を公けにしているのである。したがって，Heisenberg の強磁性理論の意義は，強磁性の本質が交換相互作用にあることをはじめて洞察（下線は勝木）したことにあるのではなく，その洞察を理論にまで高めた形で提出したことにある，といえるであろう。Heisenberg の強磁性理論はヨーロッパにおいて発表後ただちに全面的に，もしくは部分的批判をともないつつも本質的に，受け容れられる。これは，このFrenkel の論文からもうかがい知ることができるように，強磁性の本質が交換相互作用にあるということは当時のヨーロッパの先端的な理論物理学者たちの共通の認識となっており，それの理論的定式化が待ち望まれる状況にあったためであろう。

Frenkel は“磁気的”エネルギー ΔU の本質をこのように正しく洞察しながらもそれに対する理論的・本質的議論を展開することはあきらめ，ただこのエネルギーが磁化 M の平方に比例すると仮定して

$$\varDelta U = -\frac{1}{2}\beta M^2 \quad (\beta > 0)$$

とおく。そして，外場がないときのMの値が条件 $\frac{\partial}{\partial M}(\varDelta U + \varDelta L) = 0$ から決められるとして，常磁性の場合の（F・9）式の左辺のHを“分子磁場”βMでおきかえた式

$$\beta M = \frac{5}{6}\ \frac{\gamma L_0}{\mu N}\left[\left(1 + \frac{\gamma M}{\mu N}\right)^{2/3} - \left(1 - \frac{\gamma M}{\mu N}\right)^{2/3}\right] \qquad (\mathrm{F}\cdot 11)$$

を得る。ここで右辺でMの代りにγMが，L_0の代りにγL_0があらわれているのは，Mは自由電子とイオンとに由来する全体の（下線は，前述の意味で，Frenkel）磁化なので，そのうちの自由電子に由来する部分をγMと書き，$\varDelta L$に対する表式（F・8）の中のMをγMでおきかえたためである。さて，（F・11）によって自発磁化が与えられたわけであるが，Frenkel は，外部磁場がない場合にはこの磁化の方向は定まらない，外場Hがあれば磁化は場の方向を向く，Hの関数としてのMの大きさ（下線は，前述の意味で，Frenkel）は（F・11）の左辺の βMを$H + \beta M$でおきかえることによって見出すことができる，として，$\mu N/\gamma = M_0$，$\frac{10}{9}\frac{L_0}{M_0^2} = \alpha$ とおき，右辺の級数展開でM/M_0の4次以上の項を省略して

$$H = (\alpha - \beta) M + \frac{2}{27}\frac{\alpha}{M_0^2}M^3$$

を得た。ここから Frenkel は次のような考察をおこなう。$\beta = 0$ のとき Pauli の温度によらない金属常磁性が得られる。$\beta \neq 0$ かつ $\beta < \alpha$ のとき，温度に敏感なずっと大きな常磁性磁化率（$\kappa \cong \frac{1}{\alpha - \beta}$）が得られる。$\beta > \alpha$，あるいはむしろ $\beta > \frac{10}{9}\frac{L_0}{\mu^2 N^2}$ の場合が強磁性金属の場合に対応する。磁化にともなう運動エネルギーの増大が何ら顧慮されていない強磁性の古典論（Weiss 理論）においては，分子場 $\beta' M$の定数 β' を内部磁気エネルギーが$-\frac{1}{2}\beta' M^2$ に等しくなるように定義するのが常であるが，今やこの内部エネルギーは和 $\varDelta U + \varDelta L = -\frac{1}{2}\beta M^2 + \frac{1}{2}\alpha M^2 + \cdots\cdots$ と一致せねばならない。それゆえ近似的に

$$\beta' = \beta - \alpha$$

を得る。だから，分子場の“真の”定数βは“みかけ”の定数β'よりずっと大きい。鉄の場合 $\beta' M$は約10^7 Gauss であるが，αMは，したがってβMも，10^{11} Gauss 程度の値となる。Weiss の意味での負の分子場は $\beta < \alpha$の場合にあたる[281]。

以上が Frenkel による金属の強磁性理論の大要である。強磁性条件 $\beta' > 0$ を $\gamma = 1$,

$M \to 0$ の場合にあらわにかけば Stoner の強磁性出現条件になることは，Frenkel の議論の進め方をみればほとんど自明であろう（実際，容易にそのことを示すことができる）。

Frenkel は，このあと，さらに自由電子の仕事関数，接触電位差，密度と圧縮率を，かれのこの模型に基づいて論じているが，それについてはここでは触れない。

Frenkel が，ここまで深く金属強磁性の本質に迫りつつも，その議論が現象論の段階にとどまらざるを得なかったのは何故であろうか。それは一つには，この論文におけるかれの主要な問題意識が，強磁性の問題の一つにしぼってそれを解明することにではなく，むしろ，金属自由電子に対するかれの運動量空間における球殻配置模型の有効性を検証することにあったためであろう。かれは金属の示す広範囲の現象，磁性のみならず仕事関数，接触電位差，密度，圧縮率等々をかれの模型で説明しようとしたのであった（この点，Heisenberg が問題を強磁性にしぼり，Bloch が問題を電気伝導にしぼったのと対蹠的である。—もっとも Bloch は結晶内電子の論文で，Bloch 関数，電気伝導だけでなく，強く束縛された電子の比熱も論じているが—）そしてかれの球殻配置模型は，現在の目からみると，放物線型の状態密度を用いることと同等であった。二つには，かれがこのような模型を採用したこととも関連するが，金属内自由電子の波動関数を把握しかねていたことによっている。自由電子の強磁性の理論は，のちの Bloch[282] にまたなければならなかったが，Bloch にとってそれが可能であるためには，かれの結晶内電子の論文[259] が先行していなければならなかった。金属内自由電子の波動関数が平面波で与えられることを前もって明らかにしていたからこそ，Bloch は自由電子の強磁性の理論を展開しえたのである。

279） Frenkel の論文にある番号つきの式のうちのいくつかを，その番号の前に F. をつけた式番号で示すことにする。

280） J. C. Slater “The Ferromagnetism of Nickel” Phys. Rev. **49** 537－545 (1936)。

281） ある種の常磁性塩の磁性の説明のために必要な見かけ上の“負の分子場”は，当時の物理学者の目には奇妙なものと映っていたらしい。Frenkel はここでそれへの一つの説明を与えたのである。なお，註 137（小論 III，『物性研究』**33** No. 1），註 163 および 164（小論 IV，ibid. **35** No. 1）をも参照のこと。

282） F. Bloch “Bemerkung zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus und der elektrischen Leitfähigkeit” Z. Phys. **57** 545－555 (1929)。

283)　今から見れば明らかにおかしい（磁性に寄与するのは $3d$－孔，伝導に寄与するのは $4s$－電子のはずである）Dorfman たちの推論から，伝導電子のスピンモーメントの値や原子あたりの伝導電子数についてそう的外れではない結果が得られたのは何故かを，落着いて考えてみたいと思うが，まだ果しえていない。$3d$－孔の数と $4s$－電子の数とが Ni で等しいことにその原因があるか？

なお，予告された第３論文は２年あまりのちに発表された[284)]。

284)　J. Dorfman, R. Jaanus, K. Grigorow, M. Czernichowski "Die Rolle der Leitungselektronen beim Ferromagnetismus. Ⅲ. Teil" Z.Phys. 70 796－807 (1931)。この第３論文の発表までに２年あまりを要したのは，Fe の Curie 温度が Ni のそれよりもかなり高いために，実験技術上解決すべき問題があったことが一つにあったらしい。また第１，２論文に符号のまちがいがあったことを Borelius 教授から手紙で指摘され，多分その点についての検討に手間どったであろうことにもよっているかも知れない。かれらは Borelius の指摘をうけいれ，"熱電流の方向を正確に考察すれば $\Delta C_{\varepsilon \mathrm{Ni}}$ は ΔC_{aNi} と逆符号をもつ" という結果を実験は示すこと，したがって第１，２論文で導き出した素磁石の本性についての理論的結論は不確かであることを認めたのちに，とはいえ，この逆符号であることが本来何を意味するのかが明らかでないから第１，２論文における理論的結論がその基礎を失ったとは断言しきれないと遠慮がちに述べている。かれらは，この第３論文で実験的には新たに Fe の $\Delta C_{\varepsilon \mathrm{Fe}}$ を熱電気測定から導き出した。かれらは，この $\Delta C_{\varepsilon \mathrm{Fe}}$ の値と Ni のそれとの比をとったり，また ΔC_{a} や飽和磁化の Fe と Ni における比をとったりしながら，未練ありげな苦しい議論を展開しつつ，伝導電子（のスピン）が素磁石の役割を演じていると主張したのちに，この考えの正当性は絶対零度の飽和磁化から算出した原子あたりの磁気モーメントが Bohr 磁子の整数倍ではないことで示されている，Landau もこの事実こそ伝導電子が素磁石の役割を演じていることの確かな証拠だとわれわれに言った。と述べている。この第３論文は，1931年４月14日にレニングラードから発信され，４月24日に受理，７月29日に刊行された。

285)　文献282。この論文はその冒頭から Dorfman-Jaanus-Kikoin の問題提起をとりあげて論じている。私が Dorfman たちの仕事の存在を知ったのは，この Bloch の論文によってであった。そして Dorfman-Kikoin の論文によって Frenkel の論文[278)] の存在を知った。さらに Dorfman らの第３論文を読むことによって，熱電気現象と強磁性の関係をめぐって（つまり Dofman らの仕事をめぐって）'28－９年から'31年頃にかけて，

Bloch, Pauli, Peierls, Stoner, Ehrenfest らも加わった若干の論争があったらしいことを知った。この問題はちゃんと結着がついて解決したのか，あるいは未解決のままいつとはなしに問題自体が忘れ去られた，もしくは，捨て去られたのか，今のところ私は知らない。

286) 高林武彦『量子論の発展史』(中央公論社， 1977) § 10. 1「固有値問題の一般化」pp. 230－232 参照。ただし，この節のこの部分の記述が，誰かの何かの論文をふまえた上での歴史的な記述なのか，次節以下の理解を容易ならしめるための高林による解説なのかが，ちょっと判然としない。

287) たとえば，永宮健夫・久保亮五編『固体物理学』(岩波書店， 1961；第 2 版 1966) § 38， pp. 493－4；永宮健夫ほか『物質の磁性』(共立出版，『物性物理学講座 6』1958) 中の第 3 章「強磁性と反強磁性の電子論」(執筆者：芳田奎) § 3. 12, pp.203－206)。

288) Bloch は $2N$ 個の電子が存在し，それが細胞 1 から d までを 2 重に，細胞 $d+1$ から $d+2n$ までを 1 重に占めていて，1 重に占められた $2n$ 個の細胞の $2n$ 個の電子のうち ($n+m$) 個がたとえば右を，($n-m$) 個が左を向いている場合を考察する。このとき成立つ

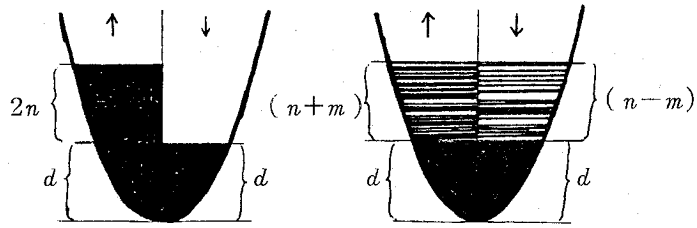
$$2N = \underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{d=(N-n)\text{-回}} + \underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{2n\text{-回}}$$

という関係 (Bloch はこんな書き方はしていない) と，註 289 で述べる Heisenberg の

$$2n = \underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{(n-s)\text{-回}} + \underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{2s\text{-回}}$$

と書きあらわされる配分とは，似て非なるものである。Heisenberg にあっては各原子 (＝細胞) に 1 電子をわりあてたから，Bloch の意味ではすべての細胞が 1 重に占められているわけである。Bloch の問題を Heisenberg にならって表わせば，Bloch において 1 重に占められた $2n$ 個の状態について，まさに Heisenberg におけると同じ配分の表式が得られることになる。そして，2 重に占められた d 個の状態，すなわち，$2d$ 個の電子はこの場合考慮の外におかれる (ただし，交換エネルギーの計算で J_{rs} の和をスピン平行な r，s についてとるときには，この 2 重に占められた状態も勘定に入る)。したがって，Bloch の設定したこの状況をバンド模型的に第 6 図 a のように図示したとす

ると，これは正しくない。むしろ第6図bのように画く方が概念的にはより正しい。もっとも，このような図で正しく書きあらわそうとすること自体が，もともと無理なのであるけれども。



a　　　　　b

第6図

289)　Fowler と Kapitza[290)] や Stoner[272)] らは，自分たちの論文の中で Heisenberg の強磁性理論の解説をおこなっているが，そこでも f_σ の導出の際に，スピン上向き電子が $(n+s)$ 個，下向き電子が $(n-s)$ 個というようなことは何らいわないままで，全スピン量子数 s の状態は $2n$ 個のものを2個づつのもの $(n-s)$ 組（合成スピンが0）とと単独のもの $2s$ 個（合成スピンが s）とにわけるわけ方に関係しており，そのわけ方の数が

$$f_\sigma=\frac{2n!}{(n+s)!\,(n-s)!}-\frac{2n!}{(n+s+1)!\,(n-s-1)!}$$

に等しいということを，導出の仕方についてのこれ以上の説明なしで与えている。この式自体はむしろ Bloch の，あるいは私が註242で示した，導出法を暗示するかのようであるが，実際はそれとは別の群論的なやり方があったのであるらしい。Heisenberg 自身も $2n$ の上記のような配分を

$$\text{“}\ 2n=\underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{(n-s)\text{-}mal}+\underbrace{1+\cdots\cdots+1}_{2s\text{-}mal}\ \text{”}$$

と書きあらわしたのちに“Die Partitio des “reziproken” Systems heißt dann einfach $2n=(n-s)+(n+s)$”と書いている。どんなつもりで das “reziproken” System といったのかよく分らないが[291)]，$2n=(n-s)+(n+s)$ という式はスピン下向き電子 $(n-s)$ 個，上向き電子 $(n+s)$ 個を連想させる。しかし，ここでも Heisenberg は f_σ が置換群の恒等置換の指標 χ_σ^{E} に等しいことを指摘したのちに Heitler[292)] を援用して

$$f_{\sigma} = \chi^{\mathrm{E}}_{n-s,\, n+s} = \frac{(2n)!\,(2s+1)}{(n-s)!\,(n+s+1)!}$$

を天降り的に与えている。Heitler の導出法は，当時，量子力学に関心をもつものにとっては周知であったのであろうか。確かに Heitler の導出法は，論文の中でその導出法を説明するにはくだくだしく長々しいようなものに思われる。

290) R. H. Fowler, P. Kapitza, “Magnetostriction and the Phenomena of the Curie Point” Proc. Roy. Soc. A **124** 1－15 (1929)。

291) Heitler の論文[292)]には，各々の Termsystem に対して reziprokes Termsystem が存在する，というようなことが書かれている。ゆっくり落着いて Heitler の論文を読めば理解できるのであろうが，それをしているとますます寄り道が長くなるので，それは別の機会にゆずる。

292) W. Heitler “Zur Gruppen theorie der homöopolaren chemischen Bindung” Z. Phys. **47** 835－858 (1928)。

293) J. C. Slater “The Theory of Complex Spectra” Phys. Rev. **34** 1293－1322 (1929)。この論文の受理は1929年7月29日，刊行は1929年11月15日，Slater の所属は Jefferson Phys. Lab. Harvard Univ. となっている。Blochの論文は6月10日にZürich から発信されているので，Bloch の読んだ Slater の論文の Manuskript は完成されたプレプリント以前の段階のものと思われる。Blochは脚注で多くの友誼的な Unterredung に対して Slater に感謝しているから，Slater の欧州滞在中にいろいろ議論したのかも知れない。

294) F. Bloch “Zur Theorie des Ferromagnetismus” Z. Phys. **61** 206－219 (1930)。

295) F. Bloch “Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika” Z. Phys. **74** 295－335 (1932)。

296) これを人々にわかり易い形で示したのは Van Vleck であるように思われる。Dirac は交換相互作用がスピン間の結合の形であらわされることを示したけれども，それを用いて何か強磁性に関する論文を書くことは，私の知るかぎりでは，していない。新しい形の理論が出されたとき，それが人々の間に浸透して常識となってゆくのにはまたそれなりの過程がある。新しい形の理論をやさしく嚙みくだいて，人々に理解しやすい形に説きなおす人がいたり，新しい形の理論を用いた仕事を人々がどんどんやっていったりすることによって，新しい理論が人々のものとなってゆく。$-\sum_{\{i,j\}} 2J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j$ の形で

Heisenberg Hamiltonian が人々の間に浸透していく上での Van Vleck の役割もきちんとしらべておく必要があるだろう。

297)　Fowler と Kapitza[290] にしろ，次に説明する Stoner[272] にしろ，Heisenberg 理論にふれつつ自説を展開するときには，Heisenberg の論文[231] を引用してそれですませるのではなしに，自分の論文の中で Heisenberg の得た主要な式を Heisenberg のやり方をなぞって導出してみせたり，自分なりの Heisenberg 理論の再構成をこころみたりしている。してみると，私がこの小論の冒頭で Heisenberg理論のやや冗長な紹介・説明をこころみたことは，まんざら的外れのことでもないらしい。

298)　Fowler と Kapitza の論文[290] にある番号つきの式を，その番号の前に F･K をつけてあらわすことにする。

299)　(F･K･10) から (F･K･11) への変形のしかたを Fowler と Kapitzaは全然説明していない。かれらには Heisenbergのアクロバットのような変形のしかたが，ごく自然なものに思えていたのだろうか？　Fowler は鞍点法の創始者の１人であり，多分このような計算における群を抜いた大家であろう。ここのところの変形のやり方に納得がいかずこだわる私が物分りが悪いのか，大家の炯眼に一分のすきがあったのか。

300)　この式に Fowler と Kapitza は番号をつけていないが，多分番号のつけおとしである。原論文には式 (21) がない。

301)　このことを指摘したのは Stoner[272] である。

302)　左辺角括弧内の第３項の分母が原論文では $2z$ になっているが，$4z$ になおしておいた。

303)　Stoner の論文[272] にある番号つきの式を，その番号の前に S をつけてあらわすことにする。

304)　この見積りは Heisenberg 理論にそっての見積りではなく，量子化された系に対して Langevin-Weiss 理論で得られる式

$$\left\{\frac{d(\sigma/\sigma_0)^2}{d(T/\theta)}\right\}_{T=\theta}=-\frac{10}{3}\,\frac{(j+1)^2}{j^2+(j+1)^2} \qquad (\mathrm{S}\cdot 26)$$

で $j=1/2$ とおくことによって得られるものである。Heisenberg理論に忠実に計算すると

$$\left\{\frac{d(\sigma/\sigma_0)^2}{d(T/\theta)}\right\}_{T=\theta}=\frac{6(4-\beta_c)}{3\beta_c-10}$$

が得られる。これは $\beta_c=2$ のとき -3 に等しくなるが，これは $z=\infty$ の場合に相当する。

305)　（S・45）式の右辺に因子$\frac{1}{2}$が余分についている。（S・44）式から導出すれば，右辺の最初の数因子は$\frac{3}{2}$ではなくて3である。したがって，$z=12$のときのΔCは$0.55R$でなくて$1.1R$となる。Heisenberg理論に忠実に計算した式

$$\Delta C = -R\left[\frac{\beta_c}{4}\left(1-\frac{2\beta_c}{z}\right)\right]\frac{6(4-\beta_c)}{3\beta_c-10}$$

を用いて算出すると，$z=8$のとき$\Delta C=0$，$z=12$のとき$\Delta C=1.344R$となる。

306)　F. Tyler "The Magnetic Characteristics of Nickel" Phil. Mag. 9 1026−1038 (1930)。Tylerの所属はLeeds大学物理教室となっており，Tylerは論文末尾でDr. Stonerにvaluable adviceとconstructive criticismを感謝している。

307)　P. Weiss, R. Forrer, Ann. de Phys. 5 153 (1926)。孫引き。

308)　このことを示すために，Blochの方法を$N=4$の1次元輪状格子の場合に適用してみよう。この4電子系の状態は1個の5重項（$s=2$）と3個の3重項（$s=1$）と2個の1重項（$s=0$）に分類されるが，最近接原子間の交換相互作用のみを考慮し，エネルギー原点を5重項のエネルギー準位のところにえらべば，5重項で$\varepsilon=0$，3つの3重項のエネルギーはそれぞれ$\varepsilon=2J$，$2J$，$4J$，2つの1重項のエネルギーがそれぞれ$\varepsilon=2J$，$6J$となる。さてBlochによれば，スピン右向き電子の数rが$r=0$のとき全スピン磁気量子数mは$m=2$であり，このとき$\varepsilon=0$であるが，$m=2$の状態は多重項$s=2$に属するから，このエネルギーは5重項のそれに等しい。$r=1$（$m=1$）のときBlochの得た，今われわれがスピン波と呼ぶところの，励起エネルギーは$k=0$（波数0）のとき0，$k=1$および3（波数$\pi/2a$，および$3\pi/2a$または$-\pi/2a$，ただしaは隣接原子間距離）のとき$2J$，$k=2$（波数π/a）のとき$4J$となる。$m=1$の状態は4つあるが，うち1つは5重項に属して$\varepsilon=0$，残り3つはそれぞれ各々の3重項に属して$\varepsilon=2J$，$2J$，$4J$である。つまり，波数0の"スピン波"が5重項のエネルギーを正確に，波数$\pm\pi/2a$およびπ/aの"スピン波"がそれぞれ1つずつの3重項のエネルギーを正確にあらわしているのである。$r=2$（$m=0$）のときは，"スピン波"間の"相互作用"を考慮に入れないで単純に"スピン波"が2個励起したときのエネルギーをBlochに従って算出すれば$\varepsilon=0$，$2J$，$2J$，$4J$，$4J$，$4J$，$4J$，$6J$，$6J$，$8J$の10通りの状態を得るが，多重項の計算から得られる正しい結果は$0(s=2)$，$2J(s=1)$，$2J(s=1)$，$2J(s=0)$，$4J(s=1)$，$6J(s=0)$の6通りの状態である。Bloch自身も，Bloch流の計算では余分の状態がえられてしまう，予期された$N!/(N-r)!\,r!$通りの状態の代りに$(N+r-1)!/(N-1)!\,r!$通りの状態がえ

られてしまうことを注意している(論文の212頁)。"スピン波"間の"相互作用"を考慮した"スピン波"近似によって多重項のエネルギー分布が正しく求められたとき，"スピン波"間の"相互作用"が正しくとりいれられた，ということができるのであろう。

309) F. Bloch, G. Gentile "Zur Anisotropie der Magnetisierung ferromagnetischer Einkristalle" Z. Phys. **70** 395－408 (1931)。

310) 犬井鉄郎，『日本数学物理学会誌』**6** 100－107 (1932年7月) (F. Bloch, "強磁性の交換問題と残留磁気現象の理論" Z. Phys. **74** 295－335 (1932))。

311) Bloch のこの論文の中の番号つきの式のうちのいくつかを，その番号のまえにBをつけてあらわすことにする。

312) Bloch は，演算子の積であらわされる演算をほどこすとき，左側にある演算から順にやっているらしいので(そうやらないとこの論文にあるいろいろな式がうまく出て来ない)，(B・8)式(およびその他の式)を，Bloch の論文にある通りではなく，今のわれわれのやりなれた順序に書きなおしておいた。

313) R. Becker, "Zur Theorie der Magnetisierungskurve" (第1報) Z. Phys. **62** 253－269 (1930)。

314) R. Becker, M. Kersten "Die Magnetisierung von Nickeldraht unter starken Zug" (文献313の第2報) Z. Phys. **64** 660－681 (1930)。

315) N. S. Akulov, "Zur Theorie der Magnetisierungskurve von Einkristallen" Z. Phys. **67** 794－807 (1931)。

316) S. Kaya, "On the Magnetization of Single Crystals of Cobalt" Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **17** 1157－1177 (1928)。

317) W. Gerlach "Eiseneinkristalle" (第1報"Magnetisierungskurven") Z. Phys. **38** 828－840 (1926); W. Gerlach "Eiseneinkristalle" (第2報"Magnetisierung, Hysterese und Verfestigung") Z. Phys. **39** 327－331 (1926)。

318) K. J. Sixtus, L. Tonks, "Propagation of Large Barkhausen Discontinuities" Phys. Rev. **37** 930－958 (1931)。この論文は1931年4月15日に発行された。Bloch の磁壁の論文(文献295)の受理は1931年9月14日である。

319) F. Bloch "Zur Suszeptibilität und Widerstandsänderung der Metalle im Magnetfeld" Z. Phys. **53** 216－227 (1929)。この小論では紹介しなかったが，Bloch はこの時期こういう論文も書いている。発信は1928年12月7日，Zürich の E.

T. H. の物理教室から (E. T. H. は Elektrotechnische Hochschule 電気大学か？)，受理が 12月15日，発行が 1929年2月12日である。

320) ここで紹介した論文のうち，たとえば Frenkel[278]，Dorfman[268, 270]，Fowler-Kapitza[290]，Stoner[272] らの論文は，私が丹念に引用文献をさかのぼることによってみつけたものだといううぬぼれめいた気持ちを持たぬでもなかった。しかし，これらの論文はすべて Van Vleck の本[321] の脚註に出ており，本文の中で部分的に簡単な紹介のなされているものもある。私は Van Vleck がその本の中で引用した文献のうちのいくつかを，それと知らずに読んでしまったのであるらしい。また，永宮・久保編『固体物理学』第2版 (岩波， 1966) 489頁，Heisenberg 模型の節には「‘Weiss 場’ の謎に量子力学の立場から新しい光を投げかけたのは 1928年の有名な Heisenberg の論文であり，またそれと独立にほぼ同時に行われたFrenkel の仕事であった」という記述がある (犀川和彦氏の御教示による)。おそらく，この Frenkel の仕事というのは，註278 で私が説明した Frenkel の論文であろう。執筆者に脱帽する。

321) J. H. Van Vleck “The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities” (Oxford University Press, 1932)。この本は Fowler と Kapitza を総編集者として刊行された叢書“The International Series of Monographs on Physics” 中の1冊として書かれた。Van Vleck の序文の日付は 1931年6月となっている。 邦訳は文献238。Fowler と Kapitza の論文は状態和の算出の鞍点法が§77「Heisenberg の強磁性体論」註17 (p. 330，訳本354頁) の中で引用され，また§79「磁気－ 熱効果と磁歪効果」(pp. 343－347，訳本 368－373頁) においては随所に Dorfman, Fowler- Kapitza, Stoner が引用されている。特にこの節の註42 (p. 345，訳本371－372頁) では，Dorfman の論文にあらわれる比熱のとびの式が最初 Landau の未発表の仕事で得られたらしいとコメントし，また Stoner の (S・45) 式に因子 1/2 が余分についていると指摘し，ガウス分布をつかえばスピン 1/2 に対する比熱のとびの理論値は

$$\frac{3Rz}{8}\left[\sqrt{1-\frac{8}{z}}-1+\frac{8}{z}\right]$$

となるとのべている (これは (S・45) から余分の因子 1/2 を除いたものに等しい)。また註43 (pp. 345－346，訳本 371－372頁) では Dorfman の実験についても言及し，電子比熱の不連続が普通の初等的見地から予期するものとは反対の符号をもつという困難があると指摘し，それゆえ Dorfman の興味ある測定の理論的意味は現在では少

しばかりあいまいだと指摘している(Dorfmanの第3論文[284])の刊行は1931年 7月29日であり，この本のVan Vleckの序文の日付が1931年6月であるから，この註が書かれたのはDorfmanの第3論文刊行より前である。Dorfmanの第1・第2論文は人々の興味を引き，ほどなく符号の反対であることがはっきりし，それは第3論文の刊行以前に，Dorfmanの仕事に興味をいだいていた人々 — Van Vleckもおそらくその1人 — の間には知れ渡っていたのであろう)。 Frenkelの論文に関しては，Van Vleckは§80「弱い常磁性」の中で，Pauli常磁性を“Frenkelによる簡単で優美な方法”にしたがって導出してみせる中で，引用している(p. 350，訳本376－77頁)。

322)　有山兼孝は，来日したSommerfeldの話をきいた時の印象を“(量子力学が)それまでは原子とか分子とかばかりでしかなかった。それがも少し大きなかたまりの物質とかガスとかの性質と結びついてきた。非常に抽象的な段階から多少とも物質がかった所におりてきたような感じがして”[323]“量子力学に対する親近感が初めて植えつけられた”[325]と述懐している。ヨーロッパにおけるこのような雰囲気を，有山は有山なりに，Sommerfeldの話から感じとったのであろう。

323)　「物性研究史聞書きノート」勝木－Ⅳ(1976年12月4日，有山兼孝) 16頁，発言173[324]。

324)　このノートは，私的な研究ノートとしての性格をもつものであるが，自分の心おぼえのために頁と整理番号をつけておいた。このインタビューのきき手は，勝木渥，河宮信郎，長岡洋介，山田一雄の4名であった。

325)　有山兼孝「物性論における一連の問題」(名大理学部最終講義， 1968年3月15日)『物性研究』 29 No.2 (1977) pp. 53－68， 55頁。

326)　K. Honda, “Über die ferromagnetischen Theorien von P. Weiss und W. Heisenberg” Z. Phys. **63** 141－148 (1930)。